

Математика

УДК 531.36

Устойчивость движения спутника на эллиптической орбите в случае цилиндрической прецессии при резонансе лунного типа

Т. Е. Чуркина

*Кафедра теоретической механики
Московский авиационный институт*

Волоколамское шоссе, д. 4, А-80, ГСП-3, Москва, Россия, 125993

Исследуется устойчивость частного движения спутника относительно центра масс на эллиптической орбите в случае цилиндрической прецессии при резонансе лунного типа. В пространстве параметров задачи (инерционный параметр и эксцентриситет орбиты) построены области устойчивости в первом приближении, в которых проведён подробный нелинейный анализ устойчивости. Применяются аналитические и численные методы исследования.

Ключевые слова: спутник, цилиндрическая прецессия, устойчивость, резонанс.

1. Постановка задачи

Рассмотрим движение динамически симметричного спутника — твёрдого тела относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле. Характерные размеры спутника предполагаем малыми по сравнению с размерами орбиты. Орбита центра масс спутника e может быть как эллиптической, так и круговой [1].

Пусть $OXYZ$ — орбитальная система координат, при этом ось OZ направлена по прямой, соединяющей притягивающий центр и центр масс O спутника, OX — по трансверсали, OY — по бинормали к орбите. Введём систему координат $Oxyz$, жёстко связанную со спутником, оси которой направлены вдоль его главных центральных осей инерции. Ориентация спутника в орбитальной системе координат задаётся при помощи углов Эйлера ψ , θ , φ .

Движение спутника относительно центра масс может быть описано каноническими дифференциальными уравнениями с гамильтонианом [2]:

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{p_\psi^2}{2(1+e\cos\nu)^2\sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{2(1+e\cos\nu)^2} - p_\psi \operatorname{ctg}\theta \cos\psi - \\
 & - \frac{\alpha\beta(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos\nu)^2} p_\psi \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - p_\theta \sin\psi + \alpha\beta(1-e^2)^{3/2} \frac{\cos\psi}{\sin\theta} + \\
 & + \frac{\alpha^2\beta^2(1-e^2)^3}{2(1+e\cos\nu)^2} \operatorname{ctg}^2\theta + \frac{3}{2}(\alpha-1)(1+e\cos\nu)\cos^2\theta. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Здесь введены безразмерный инерционный параметр $\alpha = \frac{C}{A}$ ($0 < \alpha \leq 2$), равный отношению полярного момента инерции к экваториальному, и безразмерная угловая скорость $\beta = r_0/\omega_0$ (отношение проекции абсолютной угловой скорости спутника на ось симметрии к среднему движению его центра масс). За независимую переменную принята истинная аномалия ν , а обобщённые импульсы p_ψ , p_θ приведены к безразмерной форме.

Статья поступила в редакцию 25 ноября 2008 г.

Автор выражает глубокую благодарность профессорам А.П. Маркееву и О.В. Холостовой за внимание к данной работе.

Уравнения движения, соответствующие гамильтониану (1), допускают частное решение: $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\psi_0 = \pi$, $p_{\psi_0} = 0$, $p_{\theta_0} = 0$, отвечающее одному из трёх известных стационарных режимов движения динамически симметричного спутника, называемому цилиндрической прецессией [3]. В этом случае ось симметрии спутника нормальна к плоскости орбиты и описывает в абсолютном пространстве цилиндрическую поверхность. Сам спутник во все время движения вращается относительно оси симметрии с постоянной угловой скоростью r_0 .

Рассмотрим частный случай вращений спутника на орбите, соответствующий $\beta = 1$. При таком движении спутник вращается относительно оси симметрии в направлении движения центра масс по орбите, при этом в абсолютном пространстве он, совершив оборот по орбите, возвращается в начальное положение в своём вращении (так называемый «резонанс лунного типа»). Ставится задача об устойчивости этого стационарного вращения.

Отметим, что случай $\beta = 0$ исследован в [4], случай $\alpha = 2$ — в [5].

2. Линейная задача

2.1. Нормализация функции Гамильтона

Сделаем в гамильтониане (1) каноническую замену переменных $\theta, \psi, p_\theta, p_\psi \rightarrow q_1, q_2, p_1, p_2$ по формулам $\theta = \pi/2 + q_1$, $\psi = \pi + q_2$, $p_\theta = p_1$, $p_\psi = p_2$ и разложим гамильтониан в ряд Тейлора по степеням q_1, q_2, p_1, p_2 . Получим: $H = H_2 + H_4 + \dots$, где H_n — совокупность членов n -го порядка относительно величин q_j, p_j ($j = 1, 2$), многоточием обозначены члены выше четвёртого порядка по q_1, q_2, p_1, p_2 . В разложении гамильтониана возмущённого движения будут отсутствовать формы H_n нечётного порядка.

Рассмотрим сначала случай, когда эксцентриситет орбиты мал. В предельном случае ($e = 0$), соответствующем круговой орбите центра масс спутника, характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет вид $\lambda^4 + (\alpha^2 + \alpha - 1)\lambda^2 + 4(\alpha - 1)^2 = 0$. Будем предполагать, что данное уравнение имеет только чисто мнимые корни вида $\pm i\omega_k$ ($k = 1, 2$). В противном случае невозмущённое движение неустойчиво [6]. Условие существования только чисто мнимых корней у характеристического уравнения таково: $0,8541096 \simeq \frac{3\sqrt{5}-5}{2} < \alpha \leq 2$.

При $e = 0$ строится каноническая замена переменных $q_i, p_i \rightarrow q'_i, p'_i$, приводящая форму H_2 к алгебраической сумме гамильтонианов двух линейных, не связанных между собой осцилляторов [7]. Эта замена имеет вид $(q_1 \ q_2 \ p_1 \ p_2)^T = \mathbf{A} (q'_1 \ q'_2 \ p'_1 \ p'_2)^T$. Элементы a_{ij} матрицы \mathbf{A} таковы:

$$a_{2i} = C_i a_i, \quad a_{3i} = C_i b_i \quad (i = 1, 2); \quad a_{1i} = C_{i-2}, \quad a_{4i} = d_{i-2} C_{i-2} \quad (i = 3, 4),$$

где

$$a_i = (-\omega_i^2 + 4\alpha - 4) / \gamma_i, \quad b_i = (-\omega_i^2 (1 - \alpha) - 4\alpha + 4) / \gamma_i, \\ d_i = (-\omega_i^2 + \alpha^2 + \alpha - 2) \omega_i / \gamma_i, \quad \gamma_i = \omega_i (2 - \alpha).$$

Невыписанные элементы равны нулю. Здесь ω_i ($i = 1, 2$) находятся из характеристического уравнения, считаем, что $\omega_1 > \omega_2 > 0$. Константы C_i выбраны следующим образом:

$$C_i = (2 - \alpha) \sqrt{|\omega_i / (\omega_i^2 C_{11} + C_{22})|}, \quad \text{где } i = 1, 2,$$

$$C_{11} = (\alpha^2 - 7\alpha + 7), \quad C_{22} = (4\alpha - 4)(\alpha^2 - \alpha + 1).$$

При $\alpha = 2$ матрица нормализующего преобразования \mathbf{A} указанного вида не существует. В этом случае нормализация проводится отдельно, а элементы матрицы \mathbf{A} таковы: $2a_{11} = a_{33} = 2a_{41} = -\sqrt{2}$, $a_{34} = a_{42} = -a_{24} = 1$. Невыписанные элементы равны нулю.

В результате данного преобразования форма H_2 приводится к виду

$$H_2 = \frac{1}{2}\omega_1 (q_1'^2 + p_1'^2) + \sigma \frac{1}{2}\omega_2 (q_2'^2 + p_2'^2), \quad (2)$$

при этом $\sigma = -1$, если $(3\sqrt{5} - 5)/2 < \alpha < 1$, и $\sigma = 1$, если $1 < \alpha \leq 2$.

2.2. Случай параметрического резонанса

При малых значениях эксцентриситета представим преобразованную функцию Гамильтона H_2 в виде ряда по степеням e :

$$H_2 = H_0^{(2)} + eH_1^{(2)} + e^2H_2^{(2)} + \dots, \quad (3)$$

где $H_0^{(2)}, H_1^{(2)}, \dots$ — квадратичные формы переменных q_1', q_2', p_1', p_2' , причём коэффициенты формы $H_0^{(2)}$ постоянны, а коэффициенты форм $H_1^{(2)}, H_2^{(2)}, \dots$ — непрерывные вещественные функции ν с общим периодом 2π . При этом $H_0^{(2)}$ совпадает с (2).

По теореме Крейна-Гельфанда-Лидского [7, 8] при $0 < e \ll 1$ в задаче неустойчивость возможна тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из трёх соотношений $\omega_1 + \sigma\omega_2 = N_1, 2\omega_1 = N_2, 2\omega_2 = N_3, N_i = 0, 1, 2, \dots$ ($i = 1, 2, 3$). Значения $\alpha = \alpha_0$, при которых выполняются эти соотношения в предельном случае $e = 0$, являются порождающими точками областей параметрического резонанса. Порождающие точки $\alpha = \alpha_0$ оси $e = 0$ выписаны в табл. 1. Отметим, что точки $\alpha_0 = 1$ и $\alpha_0 = 2$ являются точками кратных резонансов, поскольку в них выполняются сразу несколько резонансных соотношений второго порядка.

При малых e уравнения границ областей неустойчивости получены аналитически при помощи метода Дебри-Хори [7, 9, 10]. Уравнения соответствующих границ областей неустойчивости приведены в табл. 1. Обозначение α_j^+ соответствует «верхней» границе, α_j^- — «нижней» границе. Если в таблице приводится только одно уравнение, то это означает, что либо границы сливаются в одну (резонансные соотношения с номерами 3-5), либо, что в допустимой области значений для параметров задачи находится лишь одна граница области неустойчивости в первом приближении (резонансные соотношения с номерами 1, 10). Отметим, что область неустойчивости, соответствующая резонансному соотношению с номером 11, исходит в область $\alpha > 2$, не являющуюся допустимой для инерционного параметра α ; в той же порождающей точке $(e; \alpha) = (0; 2)$ (точке кратного резонанса) выполняются резонансные соотношения с номерами 9, 10, и в область допустимых значений параметров задачи исходят сразу две области неустойчивости.

2.3. Численное построение областей устойчивости в первом приближении

При больших значениях эксцентриситета исследование устойчивости требует привлечения численных расчётов на ЭВМ. Для этого при фиксированных параметрах e и α следует построить фундаментальную систему решений линейной системы дифференциальных уравнений, соответствующих гамильтониану H_2 в точке $\nu = 2\pi$, а затем подсчитать коэффициенты характеристического уравнения $\rho^4 - a_1\rho^3 + a_2\rho^2 - a_1\rho + 1 = 0$. Если при этом выполняются неравенства $4(a_2 - 2) < a_1^2 < (a_2 + 2)^2/4, -2 < a_2 < 6$, то рассматриваемые значения параметров e и α лежат в области устойчивости в первом приближении [11]. Здесь коэффициент a_1 равен следу фундаментальной матрицы линейной системы, вычисленной при $\nu = 2\pi$, a_2 — сумма всех её главных миноров второго порядка.

На рис. 1 области неустойчивости заштрихованы, а области устойчивости — оставлены светлыми.

Таблица 1

Резонансы второго порядка

№	Резонанс	α_0	Уравнения границ
1	$\omega_1 - \omega_2 = 0$	$\frac{3\sqrt{5}-5}{2} \simeq 0,8541096$	$\alpha_1 = 0,85410196 - 4,487804058e^2 + 0e^3 + \dots$
2	$2\omega_2 = 1$	$\frac{11-\sqrt{6}}{10} \simeq 0,855051$	$\alpha_2^+ = 0,855051 + 0,130783e + \dots$ $\alpha_2^- = 0,855051 - 0,130783e + \dots$
3	$2\omega_1 = 2$		
4	$2\omega_2 = 0$	1	$\alpha_{3,4,5} = 1$
5	$\omega_1 \pm \omega_2 = 1$		
6	$2\omega_2 = 1$	$\frac{11+\sqrt{6}}{10} \simeq 1,344949$	$\alpha_6^+ = 1,344949 + 0,449217e + \dots$ $\alpha_6^- = 1,344949 - 0,449217e + \dots$
7	$\omega_1 + \omega_2 = 2$	$\frac{\sqrt{61}-5}{2} \simeq 1,405125$	$\alpha_7^+ = 1,405125 + 3,223104e^2 + \dots$ $\alpha_7^- = 1,405125 - 1,465903e^2 + \dots$
8	$2\omega_1 = 3$	$\frac{41-3\sqrt{46}}{14} \simeq 1,475215$	$\alpha_8^+ = 1,475215 + 2,569456e^2 + 13,172605e^3 + \dots$ $\alpha_8^- = 1,475215 + 2,569456e^2 - 13,172605e^3 + \dots$
9	$2\omega_2 = 2$	2	$\alpha_9^+ = 2 - \frac{3}{2}e + \frac{723}{320}e^2 + \dots$ $\alpha_9^- = 2 - \frac{3}{2}e + \frac{483}{320}e^2 + \dots$
10	$\omega_1 + \omega_2 = 3$	2	$\alpha_{10} = 2 - \frac{17}{40}e^2 + \dots$
11	$2\omega_1 = 4$	2	

Область устойчивости в первом приближении с номером I очень узка, поэтому для наглядности вынесена отдельно на увеличенный фрагмент рис. 1. Порождающие точки областей неустойчивости, лежащие на оси $O\alpha$, обозначены на рис. 1 как A_i , номера точек i совпадают с номерами строк в табл. 1, где приведены соответствующие им значения параметра $\alpha = \alpha_0$.

В области устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений, соответствующих функции Гамильтона H_2 , последнюю при помощи вещественной канонической 2π -периодической по ν замены переменных $q_i, p_i \rightarrow q_i'', p_i''$ можно привести к виду $H_2 = \sum_{i=1}^2 \lambda_i (q_i''^2 + p_i''^2) / 2$. Величины λ_1 и λ_2 определяются неоднозначно. Для их однозначного определения воспользуемся их непрерывностью по параметру e . Тогда из условия $\lambda_1 = \omega_1$ и $\lambda_2 = \sigma\omega_2$ при $e = 0$, величины λ_1 и λ_2 вычисляются численно по формулам в соответствии с табл. 2. Выбор формулы осуществляется в зависимости от принадлежности значений параметров e, α той или иной области устойчивости. Для каждой из таких областей в табл. 2 в первой колонке приведён её номер (в соответствии с рис. 1), во второй — значения α , принадлежащие им при $e = 0$. В табл. 2

$$z_1 = \left(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8} \right) / 4, \quad z_2 = \left(a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 8} \right) / 4.$$

Опишем более подробно рис. 1. В рассматриваемом случае существует 7 областей устойчивости в первом приближении. Области VII и VIII имеют только одну общую граничную точку, формулы подсчёта величин λ_i ($i = 1, 2$) для них одинаковы.

Для всех областей устойчивости в первом приближении (для достаточно малых значений e) резонансные соотношения на границах остаются теми же, что

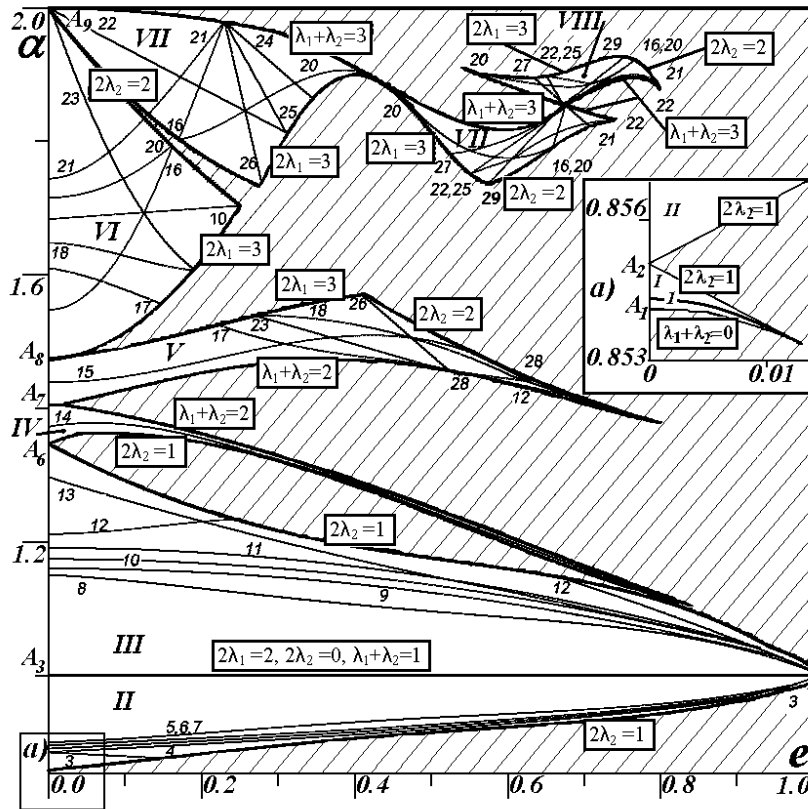


Рис. 1. Области устойчивости в первом приближении, кривые резонансов четвёртого порядка

Формулы для вычисления λ_1 и λ_2

Таблица 2

№ обл. уст.	α	λ_1	λ_2
I	$\left(\frac{3\sqrt{5}-5}{2}; \frac{11-\sqrt{6}}{10}\right)$	$1 - \frac{1}{2\pi} \arccos z_1$	$-1 + \frac{1}{2\pi} \arccos z_2$
II	$\left(\frac{11-\sqrt{6}}{10}; 1\right)$	$1 - \frac{1}{2\pi} \arccos z_1$	$-\frac{1}{2\pi} \arccos z_2$
III	$\left(1; \frac{11+\sqrt{6}}{10}\right)$	$1 + \frac{1}{2\pi} \arccos z_1$	$\frac{1}{2\pi} \arccos z_2$
IV	$\left(\frac{11+\sqrt{6}}{10}; \frac{\sqrt{61}-5}{2}\right)$	$1 + \frac{1}{2\pi} \arccos z_1$	$1 - \frac{1}{2\pi} \arccos z_2$
V	$\left(\frac{\sqrt{61}-5}{2}; \frac{41-3\sqrt{46}}{14}\right)$	$1 + \frac{1}{2\pi} \arccos z_2$	$1 - \frac{1}{2\pi} \arccos z_1$
VI	$\left(\frac{41-3\sqrt{46}}{14}; 2\right)$	$2 - \frac{1}{2\pi} \arccos z_2$	$1 - \frac{1}{2\pi} \arccos z_1$
VII	2	$2 - \frac{1}{2\pi} \arccos z_2$	$1 + \frac{1}{2\pi} \arccos z_1$

при $e = 0$ в соответствующих порождающих точках областей параметрического резонанса. Для некоторых из областей устойчивости в первом приближении (например, областей V, VII, VIII) границами служат не две кривые, на которых выполняются резонансные соотношения второго порядка, а более. При этом смена резонансного соотношения происходит в «угловых» точках, являющихся точками кратного резонанса второго порядка, в которых также могут иметь место и резонансные соотношения более высоких порядков. На рис. 1 в рамках приведены резонансные соотношения, которые имеют место на соответствующих границах.

3. Нелинейный анализ

В областях устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений, соответствующих гамильтониану H_2 , для полного исследования требуется проведение нелинейного анализа.

В общем случае в гамильтоновой системе в области её устойчивости в первом приближении неустойчивость возможна для тех значений параметров e и α , при которых имеет место резонанс третьего или четвёртого порядков

$$n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 = N, \quad (4)$$

где n_i , N — целые числа, $|n_1| + |n_2| = 3$ или $|n_1| + |n_2| = 4$. Резонансы третьего порядка к неустойчивости в данной задаче не приводят, так как в разложении гамильтониана возмущённого движения отсутствует форма третьей степени относительно q_i , p_i . Будем рассматривать однократные резонансы четвёртого порядка.

На рис. 1 построены кривые резонансов четвёртого порядка, пронумерованные в соответствии с табл. 3. В плоскости e , α при $e = 0$ резонансные кривые исходят из точек $\alpha^{(0)}$ (см. табл. 3). Кроме того, из точки кратного резонанса $e = 0$, $\alpha = 2$ исходят две резонансные кривые $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 5$ (номер 22 на рис. 1), $\lambda_1 - 3\lambda_2 = -1$ (номер 23 на рис. 1). Помимо резонансных кривых, имеющих порождающие точки при $e = 0$ на оси $O\alpha$, существуют резонансные кривые, идущие из части плоскости (e, α) , лежащей вне исследуемой области значений параметра α . Это резонансные кривые с номерами 24 ($4\lambda_2 = 5$), 25 ($\lambda_1 - 3\lambda_2 = -2$), 26 ($2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 1$), 27 ($4\lambda_2 = 5$), 28 ($3\lambda_1 - \lambda_2 = 3$), 29 ($2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 1$).

Опишем подробнее характерное поведение кривых резонансов четвёртого порядка при произвольных значениях эксцентриситета внутри областей устойчивости в первом приближении. Из рис. 1 видно, что многие кривые резонансов четвёртого порядка лежат не в одной области, а проходят через несколько областей. К таким кривым относятся, например, резонансные кривые с номерами 17, 18, 23 (проходят через области V, VI), 26 (области V, VII). Кроме этого, некоторые кривые, покидая конкретную область устойчивости в первом приближении, «возвращаются» в ту же область. Такими кривыми являются 3 и 12 из областей II и III соответственно. Многие кривые резонансов четвёртого порядка проходят через «угловые» точки, в которых выполнены ещё по два резонансных соотношения второго порядка. Это кривые с номерами 14, 18, 19, 26 (см. табл. 3). Отметим также, что на границах областей устойчивости в первом приближении существуют точки кратных резонансов: так, на границах, выходящих из порождающей точки $e = 0$, $\alpha = 2$, существуют две точки, в которых выполнены резонансные соотношения 20 и 16, помимо этого, существует точка пятикратного резонанса четвёртого порядка (в ней сходятся кривые 16, 21, 24–26); на границе подобластей VII, VIIa есть четыре точки, в которых сходятся кривые 22, 25 и 16, 20. Отметим интересное свойство подобластей VII, VIII: наблюдается схожесть в расположении кривых резонансов четвёртого порядка относительно единственной общей точки границы данных подобластей, в которой также имеет место кратный резонанс четвёртого порядка.

При малых e уравнения кривых резонансов четвёртого порядка (4), найденные при помощи метода Дебри–Хори [7], имеют следующий вид: $\alpha = \alpha^{(0)} + e\alpha^{(1)} + e^2\alpha^{(2)} + \dots$. Все коэффициенты $\alpha^{(1)}$ обращаются в нуль, значения $\alpha^{(2)}$ приведены в табл. 3.

Таблица 3

Резонансы четвёртого порядка

№	Резонанс	$\alpha^{(0)}$	$\alpha^{(2)}$
1	$\lambda_1 + 3\lambda_2 = -1$	$\simeq 0,854342$	$\simeq -7,547477$
2	$\lambda_1 - 3\lambda_2 = 2$	$\simeq 0,857745$	$\simeq 7,508868$
3	$4\lambda_1 = 3$	$\frac{274-3\sqrt{709}}{220} \simeq 0,882358$	$\simeq -0,581157$
4	$3\lambda_1 + \lambda_2 = 2$	$\simeq 0,886792$	$\simeq -0,152313$
5	$2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1$	$\frac{\sqrt{46-5}}{2} \simeq 0,891165$	$\simeq 0,176176$
6	$\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$	$\frac{\sqrt{805-23}}{6} \simeq 0,89542$	$\simeq 0,427568$
7	$4\lambda_2 = -1$	$\frac{86-\sqrt{109}}{84} \simeq 0,89952$	$\simeq 0,619463$
8	$4\lambda_2 = 1$	$\frac{86+\sqrt{109}}{84} \simeq 1,148099$	$\simeq 0,511326$
9	$\lambda_1 + 3\lambda_2 = 2$	$\simeq 1,1601497$	$\simeq -0,53287$
10	$2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 3$	$\frac{3\sqrt{6-5}}{2} \simeq 1,174235$	$\simeq -0,252872$
11	$3\lambda_1 + \lambda_2 = 4$	$\simeq 1,190838$	$\simeq 0,160542$
12	$4\lambda_1 = 5$	$\frac{102-5\sqrt{61}}{52} \simeq 1,210553$	$\simeq 0,77991$
13	$\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$	$\frac{17-\sqrt{85}}{6} \simeq 1,296743$	$\simeq -4,582362$
14	$\lambda_1 + 3\lambda_2 = 3$	$\simeq 1,37354$	$\simeq 1,975201$
15	$3\lambda_1 + \lambda_2 = 5$	$\simeq 1,439295$	$\simeq 1,37206$
16	$3\lambda_1 - \lambda_2 = 4$	$\simeq 1,547446$	$\simeq 6,358259$
17	$4\lambda_2 = 3$	$\frac{274+3\sqrt{709}}{220} \simeq 1,608551$	$\simeq -4,676567$
18	$\lambda_1 + 3\lambda_2 = 4$	$\simeq 1,647269$	$\simeq -2,753948$
19	$2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 5$	$\frac{\sqrt{70-5}}{2} \simeq 1,6833$	$\simeq 0,019677$
20	$3\lambda_1 + \lambda_2 = 6$	$\simeq 1,715651$	$\simeq 3,486425$
21	$4\lambda_1 = 7$	$\frac{118-7\sqrt{141}}{20} \simeq 1,74398$	$\simeq 7,44354$

Если $n_1 n_2 < 0$, то имеет место формальная устойчивость [12].

Пусть теперь числа n_1, n_2 имеют одинаковые знаки. При помощи алгоритма нормализации, изложенного в статье [13], для значений параметров, принадлежащих кривым резонансов четвёртого порядка, гамильтониан системы приводится к виду

$$H = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + G(r_1, r_2) + r_1^{n_1/2} r_2^{n_2/2} (\beta_{n_1, n_2} \sin \Phi + \gamma_{n_1, n_2} \cos \Phi) + O\left((r_1 + r_2)^{3/2}\right), \quad (5)$$

где $\Phi = n_1 \varphi_1 + n_2 \varphi_2 - N\nu$,

$$G(r_1, r_2) = c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2, \quad q_i^* = \sqrt{2r_i} \sin \varphi_i, \quad p_i^* = \sqrt{2r_i} \cos \varphi_i.$$

Изучаемое движение неустойчиво по Ляпунову, если выполняется неравенство $|G(n_1, n_2)| < n_1^{n_1/2} n_2^{n_2/2} (\beta_{n_1, n_2}^2 + \gamma_{n_1, n_2}^2)^{1/2}$ (при $n_i = 0$ считаем, что $n_i^{n_i/2} = 1$). Если же выполнено обратное неравенство, то имеет место устойчивость при учёте в разложении гамильтониана форм по крайней мере до четвёртого порядка включительно относительно q_i^*, p_i^* ($i = 1, 2$).

Расчёты показывают, что на всех резонансных кривых четвёртого порядка имеет место устойчивость при учёте в гамильтониане членов по крайней мере до четвёртого порядка включительно. Отметим, однако, что устойчивость в точках пересечения резонансных кривых не исследовалась.

Если предположить, что резонансы до четвёртого порядка включительно отсутствуют, то в (5) $\beta_{n_1, n_2} \equiv 0$, $\gamma_{n_1, n_2} \equiv 0$. Тогда при условии знакоопределённости квадратичной формы $G(r_1, r_2)$ в области $r_i \geq 0$ движение формально устойчиво [14]. Невозмущённое движение устойчиво для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий, если выполняется неравенство $D = c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} \neq 0$.

На рис. 2 вертикальной штриховкой обозначены области формальной устойчивости. Проверка условия равенства нулю величины D показала, что устойчивость для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий имеет место почти всюду в областях устойчивости в первом приближении (за исключением, возможно, кривых $D = 0$ рис. 2).

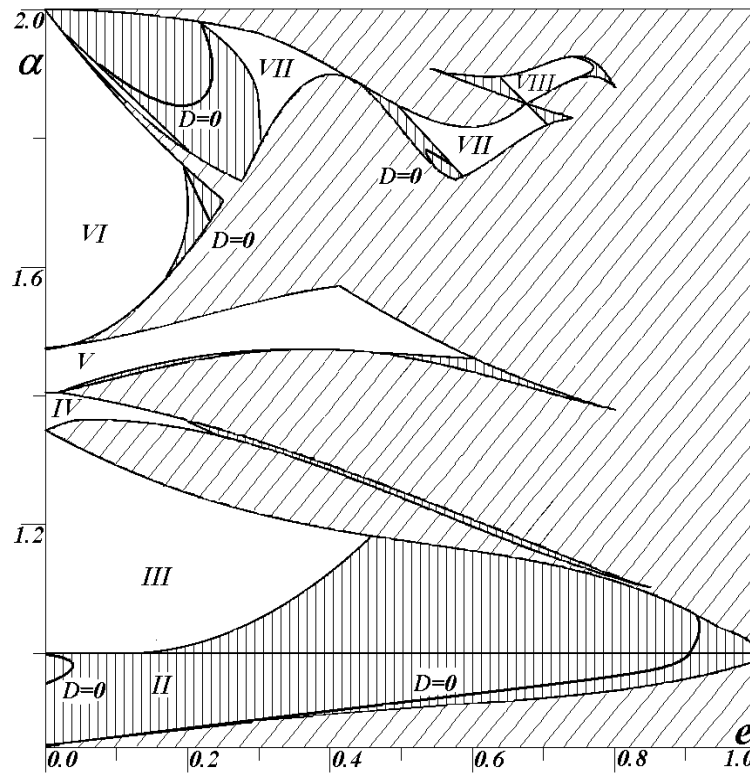


Рис. 2. Области формальной устойчивости, кривые $D = 0$

Литература

1. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965. — С. 416.
2. *Маркеев А. П.* Исследования устойчивости движения в некоторых задачах небесной механики. — М.: Институт прикладной математики АН СССР, 1970. — С. 163.

3. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Издательство МГУ, 1975. — С. 308.
4. *Маркеев А. П., Чеховская Т. Н.* Об устойчивости цилиндрической прецессии спутника на эллиптической орбите // ПММ. — 1976. — Т. 40. — С. 1040–1047.
5. *Холостова О. В.* Об устойчивости цилиндрической прецессии спутника в одном частном случае // Космич. исследования. — 2008. — Т. 46, вып. 3. — С. 270–278.
6. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. — С. 532.
7. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. — М.: Наука, 1978. — С. 312.
8. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — 1972. — С. 720.
9. *Маркеев А. П.* О кратном резонансе в линейных системах Гамильтона // Доклады АН. — 2005. — Т. 402, № 3. — С. 339–343.
10. *Маркеев А. П.* Об одном особом случае параметрического резонанса в задачах небесной механики // Письма в Астрон. журнал. — 2005. — Т. 31, № 5. — С. 388–394.
11. *Ляпунов А. М.* Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Собр. соч. Т.1. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1954. — С. 327.
12. *Moser J.* New Aspects in the Theory of Stability of Hamiltonian Systems // Commun. Pure and Appl. Math. — 1958. — Vol. 11, No 1. — Pp. 81–114.
13. *Маркеев А. П.* Конструктивный алгоритм нормализации периодического гамильтониана // ПММ. — 2005. — Т. 69, вып. 3. — С. 355–371.
14. *Glimm J.* Formal Stability of Hamiltonian Systems. — 1964. — Vol. 17, No 4. — Pp. 509–526.

UDC 531.36

On Stability of Sattellite's Elliptical Orbit Motion for Cylindrical Precession of Lunar Type Resonance

Т. Е. Churkina

*Department of Theoretical Mechanics
Moscow Aviation Institute
Volokolamskoe Shosse 4, GSP-3, Moscow, Russia, 125993*

Stability of satellite's elliptical orbit motion in the case of the cylindrical precession at Lunar type resonance is under investigation. Stability regions at first approximation have been obtained in the space of parameters of the problem (inertial parameter and eccentricity). Nonlinear analysis is carried out in these regions. Analytical and numerical methods are used.