УДК 530.12

Новый метод построения инфляционных решений в киральной космологической модели

С. В. Червон*, **А. С. Кубасов**†

* *Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова пл. 100-летия В.И. Ленина, 4, г. Ульяновск, 432700, Россия*

† *Ульяновский государственный университет ул. Л. Толстого, 42, г. Ульяновск, 432000, Россия*

В работе предложен новый метод построения точных решений для киральной космологической модели в пространственно-плоской, открытой и замкнутой Вселенной. Найдены инфляционные решения для моделей с экспоненциальным расширением и со степенным масштабным фактором в рамках двухкомпонентной киральной космологической модели. Предложено специальное распределение между киральными полями, когда одно из них ответственно за динамику в пространственно-плоском сечении, а другое – за искривление этого сечения.

Ключевые слова: космология, инфляция, нелинейная сигма модель.

1. Введение

В настоящее время инфляционная стадия, как этап сверхбыстрого расширения Вселенной, становится неотъемлемой частью стандартной космологической теории. Как правило для описания инфляционной стадии рассматривается самогравитирующее скалярное поле (инфлатон) с потенциалом самодействия. Однако такая модель приводит, в частности, к проблеме выхода из инфляции [1]. Это проблема имеет решение в «гибридной» модели инфляции, в которой присутствует второе скалярное поле и потенциал взаимодействия [2]. Модели, в которых рассматривается несколько скалярных полей, получили название «мультикомпонентных» моделей. Киральная космологическая модель [3] является естественным обобщением модели инфляции с одним или несколькими скалярными полями. Кроме того, в таких моделях учитывается кинетическое (в том числе перекрёстное) взаимодействие скалярных полей.

Для рассмотрения инфляционной стадии эволюции Вселенной наряду с экспоненциальным масштабным фактором привлекается, в целях аналитического исследования, модель степенной инфляции, когда масштабный фактор со временем меняется по степенному закону. Причём при исследовании глобальной эволюции Вселенной и космологических возмущений такая модель допускает аналитические исследования и имеет решения в элементарных функциях.

В работе мы рассматриваем обобщение метода построения точных решений для пространственно-плоской Вселенной на замкнутую и открытую модель. Интерес к открытой и замкнутой Вселенной определяется тем фактом, что в пределах точности измерения Ω допускаются все три фридмановские модели эволюции Вселенной [4]. Кроме того, интересные перспективы просматриваются в модели «Новорождённой Вселенной» [5] (см. также [6]), которая основана на замкнутой модели и связана с предположением, что Вселенная начала своё развитие с минимального размера больше планковского, на котором не требуется квантовая теория гравитация.

В данной работе предложен новый метод построения точных решений для киральной космологической модели в пространственно-плоской, открытой и замкнутой Вселенной. В разделе 2 представлены общие уравнения киральной космологической модели. Суть метода построения точных решений, который распространён на открытую и замкнутую Вселенную, подробно изложен в разделе 3. В

Работа осуществлена при частичной финансовой поддержке по программе Российско-Индийского сотрудничества РФФИ (Грант 08-02-91307-ИНД_а) и ДСТ (Грант RUS P/84 — DST).

разделе 4 приводятся новые точные решения для моделей с экспоненциальным расширением и со степенным масштабным фактором в рамках двухкомпонентной киральной космологической модели. В заключение (раздел 5) обсуждается проблема евклидовости Вселенной и делаются выводы по полученным результатом.

2. Киральные космологические модели

Действие для самогравитирующей нелинейной сигма-модели (НСМ) с потенциалом взаимодействия $W(\varphi)$ имеет вид [7]:

$$S = \int \sqrt{-g}\mathrm{d}^4x \left(\frac{R}{2\kappa} + \frac{1}{2}h_{AB}(\varphi)\varphi^A_{,\mu}\varphi^B_{,\nu}g^{\mu\nu} - W(\varphi)\right), \quad (1)$$

где $g_{\mu\nu}(x)$ — метрика пространства-времени, h_{AB} — метрика пространства-целей (кирального пространства), $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^N)$ — киральные поля, $\varphi^A_{,\mu} = \partial_\mu\varphi^A = \dfrac{\partial\varphi^A}{\partial x^\mu}$.

Тензор энергии-импульса для модели (1) записывается в следующей форме

$$T_{\mu\nu} = \varphi_{A,\mu}\varphi^A_{,\nu} - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\varphi^A_{,\alpha}\varphi^B_{,\beta}g^{\alpha\beta}h_{AB} - W(\varphi)\right). \quad (2)$$

Уравнения Эйнштейна представим в виде

$$R_{\mu\nu} = \kappa(h_{AB}\varphi^A_{,\mu}\varphi^B_{,\nu} - g_{\mu\nu}W(\varphi)) \quad (3)$$

Варьируя действие (1) по φ^C, получаем уравнение киральных полей

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\varphi^{,\mu}_A) - \frac{1}{2}\frac{\partial h_{BC}}{\partial\varphi^A}\varphi^C_{,\mu}\varphi^B_{,\nu}g^{\mu\nu} + W_{,A} = 0, \quad (4)$$

где $W_{,A} = \dfrac{\partial W}{\partial\varphi^A}$.

Рассматривая действие (1) в рамках космологических пространств, приходим к киральной космологической модели [8,9]. В данной работе в качестве источника гравитационного поля рассматривается двухкомпонентная нелинейная сигма-модель с метрикой пространства целей

$$\mathrm{d}s^2_{ts} = \mathrm{d}\varphi^2 + h_{22}(\varphi,\psi)\mathrm{d}\psi^2 \quad (5)$$

Тензор энергии-импульса (2) для киральной метрики (5) имеет вид

$$T_{\mu\nu} = \varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} + h_{22}\psi_{,\mu}\psi_{,\nu} - g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}\psi_{,\rho}\psi^{,\rho} - W(\varphi,\psi)\right]. \quad (6)$$

Метрику пространства-времени однородной и изотропной Вселенной запишем в представлении Фридмана–Робертсона–Уокера

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a(t)^2\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-Kr^2} + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right). \quad (7)$$

Решения 2-компонентной НСМ с метрикой пространства целей (5) для случая предельно жёсткого состояния материи $W(\varphi,\psi) = 0$ были исследованы ранее [7,10] (в этих работах компонента метрики $h_{22}(\varphi,\psi)$ имеет обозначение $2P(\varphi)$).

В работе [3] введена в рассмотрение массивная нелинейная сигма-модель — киральная космологическая модель. В настоящей работе нами предложен новый подход, который позволяет находить решения не только для пространственно-плоской Вселенной, но и в случае открытой и замкнутой модели Фридмана.

3. Метод построения решений

В метрике (7) полевые уравнения двухкомпонентной киральной космологической модели (4) и уравнения Эйнштейна (3) принимают вид:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{1}{2}\frac{\partial h_{22}}{\partial\varphi}\dot{\psi}^2 + \frac{\partial W}{\partial\varphi} = 0, \tag{8}$$

$$3H(h_{22}\dot{\psi}) + \partial_t(h_{22}\dot{\psi}) - \frac{1}{2}\frac{\partial h_{22}}{\partial\psi}\dot{\psi}^2 + \frac{\partial W}{\partial\psi} = 0, \tag{9}$$

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\left[\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}h_{22}\dot{\psi}^2 + W\right] - \frac{K}{a^2}, \tag{10}$$

$$\dot{H} = -\kappa\left[\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}h_{22}\dot{\psi}^2\right] + \frac{K}{a^2}. \tag{11}$$

Рассматриваемая система уравнений представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с тремя неизвестными: киральными полями φ и ψ, а также с потенциалом W. Следуя методу точной настройки потенциала [10], считаем, что закон эволюции Вселенной $a = a(t)$ задан. Метрику кирального пространства мы не будем фиксировать однозначно, как это традиционно принято, оставляя некоторую свободу её адаптации к решаемой задаче. Простыми алгебраическими преобразованиями уравнений Эйнштейна (10)–(11) находим их следствия в виде, удобном для дальнейшего решения

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2(t) + \frac{1}{2}h_{22}(t)\dot{\psi}^2(t) = \frac{1}{\kappa}\left[\frac{K}{a^2} - \dot{H}\right], \tag{12}$$

$$W(t) = \frac{3}{\kappa}\left(H^2 + \frac{1}{3}\dot{H} + \frac{2}{3}\frac{K}{a^2}\right).$$

Рассмотрим три случая:
(П) $K = 0$ — случай пространственно-плоской Вселенной;
(О) $K = -1$ — открытой Вселенной;
(З) $K = 1$ — замкнутой Вселенной.
Потребуем, чтобы отображения $\psi(t), \varphi(t)$ и $t(\psi), t(\varphi)$ были однозначными и простыми (не трансцендентными).

В случае (П) будем искать решение системы (8)–(11) в виде

$$h_{22}(\varphi,\psi) \equiv h_{22}(\varphi), \quad W(\varphi,\psi) = W_1(\varphi) + W_2(\psi).$$

В случае (О) и (З) в виде

$$h_{22}(\varphi,\psi) \equiv h_{22}(\varphi), \quad W(\varphi,\psi) = W_1(\varphi) + e^{f(\varphi)}W_2(\psi). \tag{13}$$

Рассмотрим подробно каждый из указанных случаев.

3.1. Открытая или замкнутая Вселенная ($K = \pm 1$)

Представленное разбиение потенциала (13) позволяет сделать следующие допущения:

$$W_1(\varphi(t)) = \frac{3}{\kappa}\left(H^2 + \frac{1}{3}\dot{H}\right), \tag{14}$$

$$e^{f(\varphi(t))}W_2(\psi(t)) = \frac{2}{\kappa}\frac{K}{a^2}. \tag{15}$$

Аналогично предполагаем связи на темп эволюции полей и метрику кирального пространства:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{-2}{\kappa}\dot{H}, \tag{16}$$

$$h_{22}\dot{\psi}^2 = \frac{2}{\kappa}\frac{K}{a^2}.$$

Тогда уравнение (8) расщепляется на две части

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{\partial W_1(\varphi)}{\partial \varphi} = 0, \tag{17}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial h_{22}}{\partial \varphi}\dot{\psi}^2 + W_2(\psi)e^{f(\varphi)}\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} = 0. \tag{18}$$

Из уравнения (16) киральное поле φ определяется в квадратурах

$$\varphi(t) = \pm\int\sqrt{\frac{-2}{\kappa}\dot{H}}\mathrm{d}t. \tag{19}$$

Интегрируя уравнение (19), можно перейти от $W_1(\varphi)$ как функции φ к зависимости W_1 от времени $W_1 = W_1(t)$. Тогда уравнение (17) позволяет определить искомую зависимость от времени $W_1 = W_1(t)$

$$W_1(t) = \int(\ddot{\varphi}(t)\dot{\varphi}(t) + 3H(t)\dot{\varphi}^2(t))\mathrm{d}t. \tag{20}$$

После интегрирования восстанавливаем вид зависимости составляющей потенциала от поля: $W_1(t) \to W_1(\varphi)$, так как зависимость $\varphi(t)$ определена из (19).

Для нахождения решения для второй компоненты будем подбирать функцию ξ

$$\dot{\psi}^2(t) = \xi^2(t), \tag{21}$$

$$h_{22}(t) = \frac{\frac{2K}{\kappa * a^2}}{\xi^2(t)}. \tag{22}$$

Для нахождения $h_{22}(\varphi)$ необходимо осуществить переход $h_{22}(t) \to h_{22}(\varphi)$, используя (19).

Уравнение (18) с учётом уравнений (15), (22) можно преобразовать к виду

$$f(t) = \frac{1}{2}\ln(h_{22}(t)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2K}{\kappa a^2}\frac{1}{\xi^2}\right).$$

Из соотношения (15) $W_2(\psi)$ определяется следующим образом:

$$W_2(t) = \frac{-2}{\kappa}\frac{K}{a^2}e^{-f(t)}.$$

Вновь осуществляем переход $W_2(t) \to W_2(\psi)$, используя (21).

В этом разделе следует заострить внимание на форме потенциала киральных полей $W(\varphi,\psi) = W_1(\varphi) + W_2(\varphi,\psi)$, в свою очередь $W_2(\varphi,\psi) = \sqrt{h_{22}(\varphi)}W_2(\psi)$. Таким образом, безразмерное слагаемое $h_{22}(\varphi)$ отвечает за своеобразную «перекачку» потенциальной энергии между $W_1(\varphi)$ и $W_2(\psi)$.

3.2. Пространственно-плоская Вселенная ($K = 0$)

Уравнение (12) разобьём на два ($K = 0$):

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{-2\lambda}{\kappa}\dot{H}, \tag{23}$$

$$h_{22}\dot{\psi}^2 = \frac{-2(1-\lambda)}{\kappa}\dot{H}. \tag{24}$$

Потенциал взаимодействия киральных полей $W(t)$ представим следующим образом:

$$W(t) = \lambda W(t) + (1-\lambda)\gamma W(t) + (1-\lambda)(1-\gamma)W(t),$$

полагая, что

$$W_1(\varphi(t)) = W_{1a}(\varphi(t)) + W_{1b}(\varphi(t)) = \lambda W(t) + (1-\lambda)\gamma W(t), \tag{25}$$
$$W_2(\psi(t)) = (1-\lambda)(1-\gamma)W(t),$$

где $0 < \lambda, \gamma < 1$. Тогда, соответственно

$$W_{1a}(t) = \frac{3\lambda}{\kappa}\left(H^2 + \frac{1}{3}\dot{H}\right),$$
$$W_{1b}(t) = \frac{3(1-\lambda)\gamma}{\kappa}\left(H^2 + \frac{1}{3}\dot{H}\right), \tag{26}$$
$$W_2(t) = \frac{-3(1-\lambda)(1-\gamma)}{\kappa}\left(H^2 + \frac{1}{3}\dot{H}\right).$$

Из уравнения (25) видно — для вычисления $W_1(\varphi)$ достаточно вычислить $W_{1a}(\varphi)$.

Уравнение (9) распадается на две части:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{\partial W_{1a}(\varphi)}{\partial\varphi} = 0,$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial h_{22}}{\partial\varphi}\dot{\psi}^2 + \frac{\partial W_{1b}(\varphi)}{\partial\varphi} = 0. \tag{27}$$

В уравнении (27), переходя ко временной зависимости и подставляя выражение для $\dot{\psi}^2(t)$ из уравнения (24), получим

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln(h_{22})}{\partial t}\frac{(-2(1-\lambda))}{\kappa}\dot{H} + \frac{\partial W_{1b}(t)}{\partial t} = 0.$$

Подставив значение $W_{1b}(t)$ из уравнения (26), находим $h_{22}(t)$

$$h_{22}(t) = e^{-\int\gamma\left(6H + \frac{\ddot{H}}{\dot{H}}\right)\mathrm{d}t}. \tag{28}$$

Непосредственно из уравнения (23) получаем

$$\varphi(t) = \pm\int\sqrt{\frac{-2\lambda}{\kappa}\dot{H}}\mathrm{d}t. \tag{29}$$

Из уравнения (24), с учётом (28), несложно определить

$$\psi(t) = \pm\int\sqrt{\frac{-2(1-\lambda)\dot{H}}{\kappa}e^{\int\gamma(6H + \frac{\ddot{H}}{\dot{H}})\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t. \tag{30}$$

Далее осуществляем переходы $h_{22}(t) \to h_{22}(\varphi)$, $W_1(t) \to W_1(\varphi)$, $W_2(t) \to W_2(\psi)$.

Таким образом, представленный метод позволяет при заданном масштабном факторе $a(t)$ конструировать точные решения, используя свободу выбора компоненты h_{22} метрики кирального пространства.

4. Точные решения

Для модели (12)–(13) были выбраны два масштабных фактора — степенной и экспоненциальный.

4.1. Степенная эволюция Вселенной

Выбираем масштабный фактор в виде $a(t) = At^n, \quad n > 1$.

Случай пространственно-плоской Вселенной рассмотрим отдельно.

4.1.1. Случай $K = 0$

Случай $K = 0$ приводит к следствиям уравнений Эйнштейна (29), (30) следующего вида:

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2(t) + \frac{1}{2}h_{22}\dot{\psi}^2(t) = \frac{1}{\kappa}\frac{n}{t^2}, \quad W(t) = \frac{1}{\kappa}\frac{n(3n-1)}{t^2}.$$

Решение 1

Аналогичные нижеприведённым решения были получены в работе [11]. Здесь они пересмотрены в соответствии с новым методом построения решений. Используя алгоритм, представленный в предыдущем разделе, получаем следующие решения:

$$\varphi(t) = \frac{1}{B_1}\ln(t). \quad h_{22}(\varphi) = \exp\left(-4\gamma n B_1 \varphi\right),$$

$$W_1(\varphi) = \frac{(\lambda + (1-\lambda)\gamma)n[3n-1]}{\kappa}\exp\left(-2B_1\varphi\right).$$

$$\psi(t) = \frac{1}{B_2}t^{2\gamma n}, \quad W_2(\psi) = (1-\lambda)(1-\gamma)\frac{n(3n-1)}{\kappa}(B_2\psi)^{\frac{-2}{2\gamma n}},$$

где $B_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{2\lambda n}{\kappa}}}$, $B_2 = \pm\frac{2\gamma n}{\sqrt{\frac{2(1-\lambda)n}{\kappa}}}$.

4.1.2. Случай $K = \pm 1$

В этом случае следствия уравнений Эйнштейна (29), (30) принимают вид:

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2(t) + \frac{1}{2}h_{22}\dot{\psi}^2(t) = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{n}{t^2} + \frac{K}{A^2t^{2n}}\right), \tag{31}$$

$$W(t) = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{n(3n-1)}{t^2} + 2\frac{K}{A^2t^{2n}}\right). \tag{32}$$

Из (32) видно, что при $t \to 0$ в $W(t)$ основную роль играет «искривляющее» слагаемое, а при $t \to +\infty$ преобладает первое.

Решение 2

Используя алгоритм, представленный в предыдущем разделе, получаем следующие решения:

$$\varphi^{(1)}(t) = \frac{1}{B_1}\ln(t), \quad h_{22}(\varphi) = e^{-2\zeta B_1\varphi}, \quad W_1(\varphi^{(1)}) = \frac{n}{\kappa}\left[3n-1\right]\exp\left(-2B_1\varphi\right),$$

$$f(\varphi)=\frac{1}{2}\ln\left(h_{22}(\varphi)\right), \quad \psi^{(1)}(t)=\frac{1}{B_2}\,t^{\zeta-n+1}, \quad W_2(\psi)=2\frac{K}{A^2}\left(B_2\psi\right)^{\frac{2(\zeta-n)}{\zeta-n+1}},$$

где $B_1=\pm\frac{1}{\sqrt{\frac{2n}{\kappa}}}$, $B_2=\pm\frac{\zeta-n+1}{\sqrt{\frac{2K}{\kappa A^2}}}$, $\zeta=\mathrm{const}$.

Проанализируем решения для случая $K=\pm1$ со значениями B_1, B_2, $\zeta>0$. Поле $\varphi(t)$ в этом случае растёт логарифмически со временем, а потенциал $W(\varphi)$ — убывает как $e^{-2B_1\varphi}$. Для анализа эволюции второго поля необходимо учитывать значение константы ζ.

1. При $\zeta=n$, $\psi(t)$ растёт линейно, $W(\psi)=\mathrm{const}$, а $h_{22}(\varphi)$ убывает быстрее, чем $W(\varphi)$.
2. При $\zeta>n$, $\psi(t)$ растёт пропорционально $t^{|\zeta+1-n|}$, $W(\psi)$ — растёт по степенному закону $\sim\psi^{\frac{2}{1+\frac{1}{\zeta-n}}}$, а $h_{22}(\varphi)$ — убывает быстрее, чем $W(\varphi)$.
3. При $\zeta+1<n$, $\psi(t)$ убывает пропорционально $t^{-|\zeta+1-n|}$, $W(\psi)$ изменяется по закону $\sim\psi^{\frac{2}{1+\frac{1}{-(n-\zeta)}}}$.

4.2. Экспоненциальная эволюция Вселенной

При выборе экспоненциального масштабного фактора мы рассматриваем обобщение на случай новорождённой Вселенной [5]. Нелинейные сигмамодели как источник новорождённой Вселенной рассматривались в работе [6]. Выбираем масштабный фактор в виде [12]

$$a(t)=A(\beta+e^{\alpha t})^m.$$

4.2.1. Случай $K=0$

Случай $K=0$ приводит к уравнениям (29), (30) следующего вида:

$$\frac{1}{2}\dot\varphi^2(t)+\frac{1}{2}h_{22}\dot Q^2(t)=-\frac{1}{\kappa}\frac{m\alpha^2\beta e^{\alpha t}}{(\beta+e^{\alpha t})^2}, \quad W(t)=\frac{1}{\kappa}\frac{m\alpha^2e^{\alpha t}(3me^{\alpha t}+\beta)}{(\beta+e^{\alpha t})^2}.$$

Решение 1

Используя алгоритм, представленный в разделе 3, получаем следующие решения:

$$\varphi(t)=\frac{1}{B_1}\operatorname{arctg}\left(\frac{e^{\frac{\alpha t}{2}}}{\sqrt{\beta}}\right), \quad h_{22}(\varphi)=\operatorname{tg}^{-2}(B_1\varphi), \quad \psi(t)=\frac{1}{B_2}\ln(\beta+e^{\alpha t}),$$

$$W_1(\varphi)=[\lambda+(1-\lambda)\gamma]\frac{1}{\kappa}\frac{m\alpha^2}{4}\sin^2(2\varphi B_1)[3m\operatorname{tg}^2(\varphi B_1)+1],$$

$$W_2(\psi)=(1-\lambda)(1-\gamma)\frac{1}{\kappa}m\alpha^2\left(3m+e^{-B_2\psi}\beta(1-6m)-\beta^2(1-3m)e^{-2B_2\psi}\right),$$

где $B_1=\pm\frac{1}{2\sqrt{-\frac{2\lambda m}{\kappa}}}$, $B_2=\pm\frac{1}{\sqrt{-\frac{-2(1-\lambda)m\alpha^2}{\kappa}}}$.

4.2.2. Случай $K=\pm1$

В этом случае следствия уравнений Эйнштейна (29),(30) принимают вид:

$$\frac{1}{2}\dot\varphi^2(t)+\frac{1}{2}h_{22}\dot\psi^2(t)=\frac{1}{\kappa}\left(-\frac{m\alpha^2\beta e^{\alpha t}}{(\beta+e^{\alpha t})^2}+\frac{K}{A^2(\beta+e^{\alpha t})^{2m}}\right), \tag{33}$$

$$W(t) = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{m\alpha^2 e^{\alpha t}(3me^{\alpha t}+\beta)}{(\beta+e^{\alpha t})^2} + \frac{2K}{A^2(\beta+e^{\alpha t})^{2m}}\right). \qquad (34)$$

Из (34) видно, что при $t \to 0$ в $W(t)$ основную роль играет «искривляющее», слагаемое, а при $t \to +\infty$ преобладает первое.

Решение 2

Используя процедуру интегрирования, представленную в разделе 3, находим следующие три решения:

$$\varphi(t) = \frac{1}{B_1}\operatorname{arctg}\left(\frac{e^{\frac{\alpha}{2}t}}{\sqrt{\beta}}\right), \quad \psi(t) = \frac{1}{B_2}e^{\zeta t},$$

$$h_{22}(\varphi) = \frac{1}{A^2\beta^{2m}}\left(\sqrt{\beta}\,\operatorname{tg}(B_1\varphi)\right)^{-\frac{2\zeta}{\alpha}}\cos^{4m}(B_1\varphi),$$

$$W_1(\varphi) = \frac{1}{\kappa}\frac{m\alpha^2}{4}\sin^2(2\varphi B_1)[3m\,\operatorname{tg}^2(\varphi B_1)+1],$$

$$f(\varphi) = \frac{1}{2}\ln\left(h_{22}(\varphi)\right), \quad W_2(\psi) = \frac{2K}{\kappa}\frac{\sqrt{(B_2\psi)}}{A[\beta+(B_2\psi)^{\frac{\alpha}{\zeta}}]^m},$$

где $B_1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{-\frac{2m}{\kappa}}}$, $B_2 = \pm\frac{\zeta}{\sqrt{\frac{2K}{\kappa}}}$, $\zeta = \mathrm{const}$.

Решение 3

$$\varphi(t) = \frac{1}{B_1}\operatorname{arctg}\left(\frac{e^{\frac{\alpha}{2}t}}{\sqrt{\beta}}\right), \quad h_{22}(\varphi) = \frac{1}{A^2(\beta+\beta\,\operatorname{tg}^2(B_1\varphi))^{2m}\sinh^2(\frac{2}{\alpha}\ln(\sqrt{\beta}\,\operatorname{tg}(B_1\varphi)))},$$

$$W_1(\varphi) = \frac{1}{\kappa}\frac{m\alpha^2}{4}\sin^2(2\varphi B_1)[3m\,\operatorname{tg}^2(\varphi B_1)+1],$$

$$\psi(t) = \pm\sqrt{\frac{2K}{\kappa}}\cosh t, \quad f(\varphi) = \frac{1}{2}\ln(h_{22}(\varphi)), \quad W_2(\psi) = \frac{2K}{\kappa}\frac{(B_2\psi)^2-1}{A(\beta+\operatorname{arccosh}(B_2\psi))^m},$$

где $B_1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{-\frac{2m}{\kappa}}}$, $B_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{2K}{\kappa}}}$.

Решение 4

$$\varphi(t) = \frac{1}{B_1}\operatorname{arctg}\left(\frac{e^{\frac{\alpha}{2}t}}{\sqrt{\beta}}\right), \quad h_{22}(\varphi) = \frac{1}{A^2(\beta+\beta\,\operatorname{tg}^2(B_1\varphi))^{2m}\cosh^2(\frac{2}{\alpha}\ln(\sqrt{\beta}\,\operatorname{tg}(B_1\varphi)))},$$

$$W_1(\varphi) = \frac{1}{\kappa}\frac{m\alpha^2}{4}\sin^2(2\varphi B_1)[3m\,\operatorname{tg}^2(\varphi B_1)+1],$$

$$\psi(t) = \pm\sqrt{\frac{2K}{\kappa}}\sinh t, \quad W_2(\psi) = \frac{2K}{\kappa}\frac{(B_2\psi)^2+1}{A(\beta+\operatorname{arcsinh}(B_2\psi))^m},$$

где $B_1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{-\frac{2m}{\kappa}}}$, $B_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{2K}{\kappa}}}$.

Проанализируем полученные решения со значениями $B_1, B_2, \zeta > 0$ для случая $K = \pm 1$. Эволюция поля φ и потенциала $W(\psi)$ во всех трёх случаях одинакова. Поле φ растёт $\sim \operatorname{arctg}(e^{\alpha t})$ и при $t \to +\infty$ стремится к асимптоте $\frac{\pi}{2}$, а $W(\psi)$ — периодическая функция с периодом $\frac{\pi}{B_1}$. Поле $\psi(t)$ во всех трёх случаях возрастает.

Анализ поведения потенциала $W(\psi)$ целесообразно производить при установленных значениях констант α, ζ, m.

5. Заключение

В работе найдены новые точные решения для киральной двухкомпонентной модели, порождающей степенную и экспоненциальную инфляцию в пространственно-плоской, открытой и замкнутой Вселенной. Полученные результаты позволяют взглянуть, в частности, на проблему евклидовости Вселенной несколько с иных позиций. Проблема евклидовости Вселенной обсуждается с точки зрения известных противоречий теории стандартного Большего Взрыва и их устранения за счёт введения в рассмотрение инфляционной стадии [1].

По имеющимся данным, современная наблюдаемая Вселенная близка к пространственно-плоской. С этих позиций интересно рассмотреть уравнения (14)–(15).

$$W_1(\varphi(t)) = \frac{3}{\kappa}\left(H^2 + \frac{1}{3}\dot{H}\right), \quad e^{f(\varphi(t))}W_2(\psi(t)) = \frac{2}{\kappa}\frac{K}{a^2}.$$

В случае открытой и замкнутой Вселенной ($K = \pm 1$), как было показано, данная система уравнений распадается на (17)–(20) (строго говоря возможны и другие способы разбиения, но в данной работе мы их не рассматриваем). Компоненты (17) и (19) характеризуют пространственно-плоскую Вселенную, в то время как (18) и (20) отвечают за искривление пространства–времени до открытого или замкнутого.

Рассмотрим на качественном уровне поведение составляющих потенциала кирального поля (17)–(18) без привлечения характерных размеров и размерностей. Если предположить, что Вселенная на начальном этапе развивалась как открытая или замкнутая, то для того, чтобы в нынешний период она с большой степенью точности была плоской, необходимо чтобы доминирование компоненты $\frac{2}{\kappa}\frac{K}{a^2}$ на начальном этапе сменилось на преобладание $\frac{3}{\kappa}\left(H^2 + \frac{1}{3}\dot{H}\right)$ в настоящий отрезок времени. Как несложно показать, асимптотой для такого разделения в координатах (a, t) является линейная функция, проходящая через начало координат. Соответственно для удовлетворения такому сценарию развития масштабный фактор модели при $t \to 0$ должен быть меньше линейного масштабного фактора, а на современном этапе — больше. Такому поведению из простых функций удовлетворяют, например, степенной и экспоненциальный масштабные факторы, которые и были выбраны для поиска решений.

Ещё раз отметим особенности структуры решений, отвечающих открытой и замкнутой Вселенной. В нашем подходе поля распределяются таким образом, что поле φ отвечает за пространственно-плоский сектор Вселенной, а поле ψ — за «искривление» плоского сечения до открытого или замкнутого. В свете проблемы евклидовости наблюдаемой Вселенной [1] это приводит к выводу, что если в начальный период своей эволюции Вселенная была замкнутой или открытой и ей отвечало поле ψ, то при последующем расширении преобладающим становится поле φ. Однако вопрос о физических явлениях, которые соответствуют потенциалу $W(\varphi, \psi)$, остаётся открытым и требует дополнительных исследований.

Литература

1. *Линде А. Д.* Физика элементарных частиц и инфляционная космология. — М.: Наука, 1990. [*Linde A. D.* Fizika ehlementarnihkh chastic i inflyacionnaya kosmologiya. — M.: Nauka, 1990.]
2. *Liddle A. R., Lyth D. H.* The Cold Dark Matter Density Perturbation // Phys. Rep. — 1993. — Vol. 231. — Pp. 1–105.

3. *Червон С. В.* О киральной модели космологической инфляции // Известия ВУЗов. Физика. — 1995. — Т. 38, № 5. — С. 121–125. [*Chervon S. V.* O kiraljnoyj modeli kosmologicheskoyj inflyacii // Izvestiya VUZov. Fizika. — 1995. — T. 38, No 5. — S. 121–125.]
4. *Tsujikawa S.* Dark Energy: investigations and modelling // ArXiv:asrtro-ph.CO. — 2010. — Vol. 1004.1493. — Pp. 1–49.
5. *Ellis G. F. R., Maartens R.* The Emergent Universe: Inflationary Cosmology with no Singularity // Class. Quant Grav. — 2004. — Vol. 21. — Pp. 223–232.
6. *Beesham A., Chervon S. V., Maharaj S. D.* Emergent Universe Supported by Nonlinear Sigma Model // Class. Quantum Grav. — 2009. — Vol. 26, No 075017. — Pp. 1–9.
7. *Chervon S. V.* Chiral Non-Linear Sigma Models and Cosmological Inflation // Gravitation & Cosmology. — 1995. — Vol. 1, No 2. — Pp. 91–96.
8. *Chervon S. V.* A Global Evolution of the Universe Filled by Scalar or Chiral Fields // Gravitation & Cosmology. — 2002. — Vol. 8, issue Suppl. — Pp. 32–40.
9. *Chervon S. V.* Exact Solutions in Standard and Chiral Inflationary Models // Proceedings of 9th Marcell Grossman Conference, Roma, 2000. — World Scientific, 2001. — Pp. 1909–1911.
10. *Червон С. В.* Нелинейные поля в теории гравитации и космологии. — Ульяновск: УлГУ, 1997. [*Chervon S. V.* Nelineyjnihe polya v teorii gravitacii i kosmologii. — Uljyanovsk: UlGU, 1997.]
11. *Кубасов А. С., Червон С. В.* Взаимодействие полей темного сектора в модели степенной инфляции // Труды 2-ой международной конференции GRACOS-2009, с.143. — ТГГПУ, 2009. [*Kubasov A. S., Chervon S. V.* Vzaimodeyjstvie poleyj temnogo sektora v modeli stepennoyj inflyacii // Trudih 2-oyj mezhdunarodnoyj konferencii GRACOS-2009, c.143. — TGGPU, 2009.]
12. Emergent Universe with Exotic Matter / S. Mukherjee, B. S. Paul, N. K. Dadhich et al. // Class. Quantum Grav. — 2006. — Vol. 23. — Pp. 6927–6934.

UDC 530.12

New Method of Constructing Inflationary Solution in a Chiral Cosmological Model

S. V. Chervon*, **A. S. Kubasov**†

* *Ulyanovsk State Pedagogical University named after I.N. Ulyanov*
100 years V.I. Lenin's Birthday Square, 4, Ulyanovsk 432700, Russia
† *Ulyanovsk State University*
42, Leo Tolstoy str., Ulyanovsk, 432000, Russia

New method of constructing inflationary solution in a chiral cosmological model is proposed for spatially-flat, open and closed Universe. Inflationary solutions for the models with the exponent and power law scale factor in the framework of the two-component chiral cosmological model are obtained. The special distribution between chiral fields, when one of them is responsible for the dynamics in the spatially-flat section and another – for the warping of this section, is suggested.

Key words and phrases: cosmology, inflation, non-linear sigma mode.