Физика

УДК 531.51, 539.184

Гравиатомы с учётом релятивистских поправок и вращения минидыры

Ю. П. Лаптев*, **М. Л. Фильченков**†

* *Кафедра физики*
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
ул. 2-ая Бауманская, 5, 105005, Москва, Россия
† *Институт гравитации и космологии*
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, 117198, Москва, Россия

Рассмотрены гравитационно-связанные квантовые системы, так называемые гравиатомы, состоящие из минидыры и захваченной ею заряженной частицы [1, 2]. Учтены релятивистские поправки, спинмикрочастицы, а также вращение минидыры. Вычислена частота, сила осциллятора и интенсивность дипольного перехода $2p \to 1s$.

Ключевые слова: гравиатомы, самодействие, дипольное излучение.

1. Введение

В предыдущей работе [3] было рассмотрено влияние девиттовского взаимодействия на энергетические уровни, волновые функции и дипольное излучение водородоподобных гравиатомов. В настоящей работе в приближении Паули учтены спинмикрочастицы и другие релятивистские поправки к энергетическим уровням и волновым функциям, а также удельный момент вращения минидыры для метрики Лензе–Тирринга. Оценён относительный вклад поправок к водородоподобному спектру гравиатома, учитывающих девиттовское самодействие, спинмикрочастицы и медленное вращение минидыры. Уточнены возможные значения гравитационного эквивалента постоянной тонкой структуры. Вычислены соответствующие поправки к интенсивности дипольного перехода $2p \to 1s$.

2. Релятивистские поправки и спинмикрочастицы

В силу того, что гравитационный эквивалент постоянной тонкой структуры немал, необходимо учесть релятивистскую поправку в первом постньютоновском приближении к энергетическому спектру гравиатома. Аналогичная поправка для атома водорода была вычислена Паули как с учётом, так и без учёта спина [4, 5]. Оказывается, что поправка к водородоподобному гравиатому, обусловленную девиттовским самодействием, имеет ту же структуру, что и первая постньютоновская поправка. Запишем общую формулу, учитывающую как девиттовское самодействие, так и спин

$$\Delta E = \frac{mc^2\alpha_g^3}{2n^3}\left(\frac{2}{l+\frac{1}{2}}\cdot\frac{e^2}{\hbar c} - \frac{\alpha_g}{j+\frac{1}{2}}\right) + \frac{3mc^2\alpha_g^4}{8n^4}\,, \tag{1}$$

где $j = l \pm s \geqslant 0$ ($s = 0$ для мезонов и $s = \dfrac{1}{2}$ для лептонов); n — главное квантовое число, $\alpha_g = \dfrac{GMm}{\hbar c}$.

Для бесспиновых частиц не только энергетический спектр, но и волновые функции, имеют структуру, аналогичную той, которая была получена при учёте девиттовского самодействия, а именно, учёт первой постньютоновской поправки сводится к появлению дополнительного члена к ньютоновскому потенциалу.

Статья поступила в редакцию 10 марта 2010 г.

Уравнение Клейна–Гордона в этом случае сводится к уравнению Шрёдингера с первой постньютоновской поправкой [5]. При этом оказывается, что учёт релятивистских частиц может быть формально сделан путём замены величины $2\alpha_{eg}$ на величину α_g^2 при $n \gg 1$. Поскольку имеет место неравенство $2\alpha_{eg} \ll \alpha_g^2$, то учёт релятивистских поправок для пиона и каона более существенен, чем учёт девиттовского самодействия.

Поясним появление в формуле (1) второго члена, обусловленного спин-орбитальным взаимодействием гравиатома. Зависимость спин-орбитального взаимодействия от квантовых чисел l и j одна и та же для гравиатома и водородоподобного атома, поэтому проиллюстрируем её, опираясь на известные результаты, полученные для водородоподобного атома [6].

Полный момент всякой изолированной системы сохраняется, поэтому состояние атома можно характеризовать значением полного момента j и в том случае, когда отдельно орбитальный и спиновый моменты не сохраняются. Вследствие спин-орбитального взаимодействия энергетический уровень nl расщепляется на две компоненты $l + {}^1/_2$ и $l - {}^1/_2$. Прежде чем перейти к вычислению энергии расщепления, выразим зависимость от j в явном виде. Поскольку $j = l + s$, $j^2 = l^2 + s^2 + 2ls$, $ls = \dfrac{1}{2}(j^2 - l^2 - s^2)$. Учитывая также, что $U = -\dfrac{Ze^2}{r}$, получим

$$V = \frac{Ze^2\hbar^2}{2m^2c^2} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{1}{2}(j^2 - l^2 - s^2). \tag{2}$$

Эта формула следует из того, что только в нерелятивистском приближении можно говорить о постоянных значениях орбитального и спинового моментов. В последнем случае оказывается, что гамильтониан приобретает вид [7, 8]

$$\hat{H} = \frac{\hat{p^2}}{2m} + U = \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\hat{s}\hat{l} + O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Последнее содержит скалярное произведение векторов l, s, поэтому об этом взаимодействии часто говорят как о спин-орбитальном взаимодействии, или взаимодействии спин-орбита. Спин-орбитальное взаимодействие зависит не только от величины момента импульса l, но также и от взаимной ориентации моментов l и s, т. е. от величины полного момента $j = l + s$. Сложение моментов проводится квантово-механическим правилам сложения моментов.

Среднее значение возмущения (2) в состоянии n, l, j равно, очевидно,

$$\frac{Ze^2\hbar^2}{2m^2c^2} \cdot \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{nl} \cdot \frac{1}{2}\big(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\big).$$

Поэтому для поправки к энергии, обусловленной спин-орбитальным взаимодействий, получим

$$\Delta E''_{nlj} = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{\big(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\big)}{2l(l+1)(l + {}^1/_2)} \cdot \frac{Z^4}{n^3} Ry,$$

где постоянная Ридберга $Ry = \dfrac{me^4}{4\pi\hbar^3}$. Поправка, обусловленная спин-орбитальным взаимодействием, является суммой поправки, даваемой последней формулой и релятивистской поправки для бесспиновых частиц

$$\Delta E'_{nl} = -\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \left(\frac{1}{l + {}^1/_2} - \frac{3}{4n}\right) \frac{Z^4}{n^3} Ry,$$

т. е.

$$\Delta E_{nj} = \Delta E'_{nl} + \Delta E''_{nlj} = -\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \left(\frac{1}{j + {}^1/_2} - \frac{3}{4n}\right) \frac{Z^4}{n^3} Ry,$$

что и требовалось доказать.

Волновые функции частиц со спином $s = \dfrac{1}{2}$ в приближении Паули имеют вид

$$u_{nl,j=l\pm s,m} = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} R_{nl}(r) \begin{pmatrix} \sqrt{l \pm m + s}\, Y_{l,m-s}(\vartheta,\varphi) \\ \mp\sqrt{l \mp m + s}\, Y_{l,m-s}(\vartheta,\varphi) \end{pmatrix}.$$

Вычислим поправки к частоте и интенсивности дипольного перехода $2p \to 1s$, обусловленные наличием спина $s = {}^1/_2$. Согласно (1), наличие спина приводит к расщеплению энергетических уровней водородоподобного гравиатома, которое зависит от полного момента j (см. рис. 1). Переходу $2p \to 1s$ соответствует два перехода:

1) $2p_{\frac{3}{2}} \to 1s_{\frac{1}{2}}$ при $l = 1 \to l = 0$ $(\Delta l = 1)$, $j = l + {}^1/_2 \to j = l - {}^1/_2$ $(\Delta j = 1)$;

2) $2p_{\frac{1}{2}} \to 1s_{\frac{1}{2}}$ при $l = 1 \to l = 0$ $(\Delta l = 1)$, $j = l - {}^1/_2 \to j = l - {}^1/_2$ $(\Delta j = 0)$.

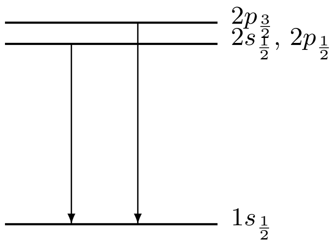

Рис. 1. **Расщепление уровня $2p$ за счёт спина**

Энергия состояний $2s_{\frac{1}{2}}$ и $2p_{\frac{1}{2}}$ равны. Переход $2s_{\frac{1}{2}} \to 1s_{\frac{1}{2}}$ запрещён. При $l = 0$ существует только одно состояние $j = {}^1/_2$, т. е. основное состояние является синглетом (не расщеплено).

Интенсивность для переходов, в которых j не меняется, легко вычисляется, используя матричные элементы координат x, y, z, где z направлена вдоль дипольного момента. Матричные элементы даются формулами для линейной и круговой поляризации соответственно

$$z_{nljm}^{n'l'jm} = m C_{lj}^{l'j} R_{nl}^{n'l'},$$

$$(x+iy)_{nljm}^{n'l'jm+1} = (x-iy)_{nljm+1}^{n'l'jm} = \sqrt{(j+m+1)(j-m)} C_{lj}^{l'j} R_{nl}^{n'l'},$$

где $C_{lj}^{l-1j} = \dfrac{1}{2j(j+1)}$. Для перехода $2p_{\frac{1}{2}} \to 1s_{\frac{1}{2}}$ они принимают вид

$$z_{11\frac{1}{2}1}^{00\frac{1}{2}0} = 0, \quad (x+iy)_{11\frac{1}{2}1}^{00\frac{1}{2}0} = \frac{1}{\sqrt{3}} R_{10}^{21},$$

где $R_{nl}^{n'l-1} = \displaystyle\int_0^\infty R_{nl} R_{n'l-1} r^2 \,\mathrm{d}r$ — матричный элемент для перехода радиальной волновой функции R_{nl}.

Частота возмущённого гравиатома для перехода $2p_{\frac{1}{2}} \to 1s_{\frac{1}{2}}$ запишется

$$\omega_{21} = \omega_{21}^{(0)} \left(1 + \frac{11}{48}\alpha_g^2\right),$$

а интенсивность имеет вид

$$I_{10,21} = \frac{1}{3} I^{(0)}_{10,21} \left(1 + \frac{11}{48}\alpha_g^2\right)^4;$$

соответственно для перехода $2p_{\frac{3}{2}} \to 1s_{\frac{1}{2}}$ имеем

$$\omega_{21} = \omega^{(0)}_{21} \left(1 + \frac{15}{48}\alpha_g^2\right), \quad I_{10,21} = \frac{2}{3} I^{(0)}_{10,21} \left(1 + \frac{15}{48}\alpha_g^2\right)^4.$$

Очевидно, интенсивность перехода $2p_{\frac{3}{2}} \to 1s_{\frac{1}{2}}$ почти в два раза больше интенсивности перехода $2p_{\frac{1}{2}} \to 1s_{\frac{1}{2}}$.

Спин-орбитальное взаимодействие не зависит от пространственных координат, поэтому радиальная функция не влияет на расщепление уровней. Для бесспиновых частиц частота и интенсивность возмущённого гравиатома примут вид

$$\omega_{21} = \omega^{(0)}_{21} \left(1 + 1{,}6\alpha_g^2\right), \quad I_{10,21} = I^{(0)}_{10,21} \left(1 + 1{,}6\alpha_g^2\right)^4 \left(1 + 1{,}9\alpha_g^2\right)^2.$$

Таким образом, учёт спиновой поправки увеличивает частоту на 5 %, а интенсивность излучения на 20 %. Однако приближение Паули для бесспиновых частиц позволяет оценить частоты и интенсивности переходов лаймановской серии только по порядку величины.

Также интересно рассмотреть переходы без изменения главного квантового числа n. Матричные элементы радиальных волновых функций имеют вид

$$R^{nl}_{n,l-1} = R^{n,l-1}_{nl} = \frac{3}{2} n \sqrt{n^2 - l^2}.$$

Рассмотрим переходы при $n = 2$.

1) $2p_{\frac{1}{2}} \to 1s_{\frac{1}{2}}$ $\Delta j = 0$, $\Delta l = 1$.
Из формулы (1) видно, что расщепление уровней при постоянном n зависит только от девиттовского самодействия. Отношение частоты этого перехода к частоте перехода $2p \to 1s$ невозмущённого гравиатома равно $\frac{4}{9} \cdot \frac{e^2}{\hbar c}\alpha_g$ (т. е. менее 1 %).
2) $2p_{\frac{3}{2}} \to 2s_{\frac{1}{2}}$ $\Delta j = 1$, $\Delta l = 1$.
Отношение частоты данного перехода к частоте перехода $2p \to 1s$ невозмущённого гравиатома равно $\frac{1}{12}\alpha_g^2$.

3. Поправки, обусловленные вращением минидыры

Для массивного источника с медленным вращением ($a \ll cr$) метрика Керра принимает вид метрики Лензе–Тирринга [9]:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} - r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right) + \frac{4GMa}{c^2 r} \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}t, \quad (3)$$

где a — удельный момент импульса чёрной дыры

$$a = \frac{2}{5}\omega r_g^2,$$

отсюда

$$\omega \ll \frac{c}{r_g},$$

где ω — угловая скорость вращения минидыры.

В случае медленного вращения угловой момент пробной частицы J_p в метрике (3) может быть приближённо записан в виде

$$J_p = \frac{mr^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{\sqrt{g_{00}^S}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},$$

где

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{E}\sqrt{g_{00}^S},$$

здесь E — полная энергия частицы, а g_{00}^S — временная компонента метрики Шварцшильда. Отсюда получаем

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{J_p}{mr^2} g_{00}^S \mathrm{d}t.$$

В этом случае при $\theta = \pi/2$ временная компонента метрики Лензе–Тирринга g_{00}^{LT} принимает вид

$$g_{00}^{LT} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(1 + \frac{2r_g a J_p}{r^2 mc^2}\right).$$

Возмущения гравиатома, обусловленные вращением минидыры, будут рассмотрены в рамках стационарной теории возмущений, как было сделано в предыдущем параграфе.

Поправка к потенциалу в уравнении Шрёдингера для водородоподобного гравиатома, обусловленная медленным вращением, имеет вид

$$V^{(l)} = \frac{ar_g\hbar\sqrt{l(l+1)}}{r^3} - \frac{ar_g^2\hbar\sqrt{l(l+1)}}{r^4}. \tag{4}$$

Здесь мы использовали формулу для квантования углового момента

$$J_p^2 = \hbar^2 l(l+1).$$

Поправка к энергии будет

$$E_{nl}^{(1)} = \int\limits_0^\infty \left[R_{nl}^{(0}\right]^2 V^{(l)} r^2\,\mathrm{d}r,$$

где $E_{n0}^{(1)} = 0$, так как $V^{(0)} = 0$.

Дипольному переходу $2p \to 1s$ соответствует матричный элемент, пропорциональный $\int\limits_0^\infty R_{10}R_{21}r^3\,\mathrm{d}r$. Поправки к невозмущённым волновым функциям выражаются через волновые функции $1s, 2s$ и $2p$ состояний [4]

$$R_{10}^{(0)} = 2e^{-r}, \quad R_{20}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{r}{2}}(1-\frac{r}{2}), \quad R_{21}^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{6}}e^{-\frac{r}{2}},$$

где r записано в единицах

$$a_B^g = \frac{\hbar^2}{GMm^2},$$

т. е. в единицах величины, являющейся аналогом боровского радиуса для водородоподобного гравиатома [1].

А при $l \neq 0$ имеем

$$E_{nl}^{(1)} = \frac{ar_g\hbar\sqrt{l(l+1)}}{[a_B^g]^3} \int\limits_0^\infty \left[R_{nl}^{(0)}\right]^2 \frac{\mathrm{d}r}{r} - \frac{ar_g^2\hbar\sqrt{l(l+1)}}{[a_B^g]^4} \int\limits_0^\infty \left[R_{nl}^{(0)}\right]^2 \frac{\mathrm{d}r}{r^2},$$

где интегралы будут равны

$$\int\limits_0^\infty \left[R_{nl}^{(0)}\right]^2 \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{1}{n^3(l+1)(l+{}^1/_2)l},$$

$$\int\limits_0^\infty \left[R_{nl}^{(0)}\right]^2 \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{3n^2 - l(l+1)}{2n^5(l+1)(l+{}^1/_2)(l-{}^1/_2)(l+{}^3/_2)l}.$$

Условие медленности вращения в квантовом случае принимает вид

$$\frac{am}{\hbar}\alpha_g^2 \ll 1. \tag{5}$$

Поправка к водородоподобному $2p$ уровню, обусловленная вращением минидыры, запишется

$$E_{21}^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{12}\alpha_g^4\left(1 - 2\alpha_g^2\right)\frac{am^2c^2}{\hbar}.$$

Матричные элементы, описывающие возмущения, имеют вид

$$V_{10,20}^{(l)} = \int\limits_0^\infty R_{10}^{(0)} R_{20}^{(0)} V^{(l)} r^2\,\mathrm{d}r, \tag{6}$$

$$V_{10,21}^{(l)} = \int\limits_0^\infty R_{10}^{(0)} R_{21}^{(0)} V^{(l)} r^2\,\mathrm{d}r, \tag{7}$$

где $V^{(l)}$ даётся формулой (4). В результате вычислений получаем следующее выражение для матричных элементов

$$V_{10,20}^{(l)} = \frac{2r_g a\hbar}{\left[a_B^g\right]^3}\left([1 + \alpha_g^2(1 + 9\alpha_g^2)]E_1(3\alpha_g^2) - \left(\frac{1}{3} + 3\alpha_g^2\right)e^{-3\alpha_g^2}\right),$$

$$V_{10,21}^{(l)} = \frac{r_g a\hbar}{\sqrt{3}[a_B^g]^3}\left(\left[(1 + 9\alpha_g^4)\right]E_1(3\alpha_g^2) - 3\alpha_g^2 e^{-3\alpha_g^2}\right),$$

где $E_1(z)$ — интегральная показательная функция

$$E_1(z) = \int\limits_z^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Выражение для разности уровней 2 и 1 запишется

$$E_2^{(0)} - E_1^{(0)} = \frac{3mc^2\alpha_g^2}{8}. \tag{8}$$

Волновые функции гравиатома, возмущённого вращением минидыры, имеют вид

$$R_{10} = R_{10}^{(0)} - \frac{32am}{\hbar}\alpha_g^2 \left([1 + \alpha_g^2(1 + 9\alpha_g^2)]E_1(3\alpha_g^2) - \left(\frac{1}{3} + 3\alpha_g^2\right) e^{-3\alpha_g^2} \right) R_{20}^{(0)} - \\ - \frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{am}{\hbar}\alpha_g^2 \left([(1 + 9\alpha_g^4)]E_1(3\alpha_g^2) - 3\alpha_g^2 e^{-3\alpha_g^2} \right) R_{21}^{(0)},$$

$$R_{21} = R_{21}^{(0)} + \frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{am}{\hbar}\alpha_g^2 \left([(1 + 9\alpha_g^4)]E_1(3\alpha_g^2) - 3\alpha_g^2 e^{-3\alpha_g^2} \right) R_{10}^{(0)}.$$

Условие применимости теории возмущений совпадает с условием медленности вращения (5).

Вычислим поправки к частоте и интенсивности дипольного излучения $2p \to 1s$, обусловленные медленным вращением минидыры. При вычислении интенсивности дипольного излучения воспользуемся формулами для невозмущённых волновых функций атома водорода и формулами для интенсивности, частоты и силы осциллятора, в которые они входят. Отношение радиальных интегралов возмущённого и невозмущённого гравиатомов при условии $3\alpha_g^2 = 1$ (соответствующее значения α_g попадает в интервал (10)) принимает вид

$$\frac{\int\limits_0^\infty R_{10} R_{21} r^3 \, \mathrm{d}r}{\int\limits_0^\infty R_{10}^{(0)} R_{21}^{(0)} r^3 \, \mathrm{d}r} = 1 - 1{,}0164 \frac{am}{\hbar} - 0{,}0023 \left(\frac{am}{\hbar}\right)^2. \tag{9}$$

Частота возмущённого гравиатома будет определяться формулой

$$\omega_{21} = \omega_{21}^{(0)} \left(1 + 0{,}0349 \frac{ma}{\hbar}\right),$$

а интенсивность даётся формулой

$$I_{12} = I_{12}^{(0)} \left(1 + 0{,}0349 \frac{ma}{\hbar}\right)^4 \left(1 - 1{,}0164 \frac{ma}{\hbar}\right)^2.$$

Таким образом, учёт медленного вращения минидыры незначительно увеличивает частоту излучения (менее 1 %), а интенсивность — уменьшает (менее 10 %). Незначительное увеличение частоты связано с тем, что уровень $1s$ не расщепляется (см. рис. 2).

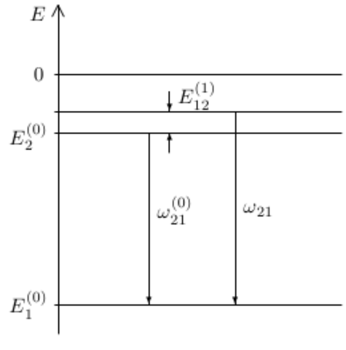

Рис. 2. **Расщепление уровней с $n = 1$ и $n = 2$ в случае медленного вращения**

Легко видеть, что поправка к водородоподобному спектру гравиатома, учитывающая девиттовское самодействие, спинмикрочастицы и медленное вращение минидыры, имеет вид:

$$E_{nl}^{(1)} = \frac{mc^2\alpha_g^3}{2n^3}\left(\frac{2}{l+{}^1/_2}\cdot\frac{e^2}{\hbar c} - \frac{\alpha_g}{j+{}^1/_2}\right) + \frac{3mc^2\alpha_g^4}{8n^4} + \\ + \frac{2\alpha_g^4 mc^2 a}{\hbar n^3 (l+{}^1/_2)^2}\left[1 - \frac{3n^2-(l+{}^1/_2)^2}{n^2(l+{}^1/_2)^2}\alpha_g^2\right],$$

где при $l \gg 1$ мы использовали формулу $l(l+1) \approx (l+{}^1/_2)^2$.

При $\frac{am}{\hbar}\alpha_g^2 \ll 1$ получаем

$$\frac{E_{nl}^{(1)}}{E_n^{(0)}} = \frac{\alpha_g^2}{n}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{4am}{\hbar}\cdot\frac{1}{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}\right).$$

Из этой формулы следует, что наибольший вклад возмущения энергетического спектра дают поправки, учитывающие полный угловой момент j.

Следует отметить, что в первом постньютоновском приближении формулы для боровского радиуса и энергии водородоподобного гравиатома соответственно принимают вид:

$$a_B^g = \frac{n\hbar\sqrt{1-\frac{\alpha_g^2}{n^2}}}{mc\alpha_g}, \quad E_n^{(0)} = -\frac{mc^2\alpha_g^2}{2(1-\frac{\alpha_g^2}{n^2})n^2}.$$

В этом случае изменяются условия существования гравиатома, зависящие от указанных выше величин. Это приводит к изменению возможных значений гравитационного эквивалента постоянной тонкой структуры, а именно теперь

$$\alpha_g = 0{,}521 \div 0{,}625. \qquad (10)$$

4. Заключение

В приближении Паули вычислены релятивистские поправки к энергетическим уровням, волновым функциям и интенсивностям дипольного излучения для водородоподобных гравиатомов с учётом медленного вращения минидыры. За счёт спин-орбитального взаимодействия энергетические уровни расщепляются в зависимости от значения полного момента. Интенсивности переходов с изменением полного момента превышают интенсивности переходов без изменения полного момента. Для бесспиновых частиц приближение Паули плохо работает. Поэтому следует решать точное релятивистское уравнение, что будет являться предметом дальнейшего исследования.

Литература

1. *Fil'chenkov M. L., Laptev Y. P.* Graviatom Dipole Radiation // Grav. Cosmol. — 2006. — Vol. 12, No 1. — P. 65.
2. *Laptev Y. P., Fil'chenkov M. L.* Electromagnetic and Gravitational Radiation of Graviatoms // Astron. Astroph. Trans. — 2006. — Vol. 25, No 1. — P. 33.
3. *Лаптев Ю. П., Фильченков М. Л.* Влияние девиттовского самодействия на дипольное излучение водородоподобных гравиатомов // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2009. — № 3. — С. 80. [*Laptev Yu. P., Filjchenkov M. L.* Vliyanie devittovskogo samodeyjstviya na dipoljnoe izluchenie vodorodopodobnihkh graviatomov // Vestnik RUDN. Seriya «Matematika. Informatika. Fizika». — 2009. — No 3. — C. 80.]
4. *Бете Г., Солпитер Э.* Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. Пер. с англ. — М.: ГИФМЛ, 1960. [*Bete G., Solpiter Eh.* Kvantovaya

mekhanika atomov s odnim i dvumya ehlektronami. Per. s angl. — M.: GIFML, 1960.]
5. *Соколов А. А., Лоскутов Ю. М., Тернов И. М.* Квантовая механика. — М.: Просвещение, 1965. [*Sokolov A. A., Loskutov Yu. M., Ternov I. M.* Kvantovaya mekhanika. — M.: Prosvethenie, 1965.]
6. *Собельман И. И.* Введение в теорию атомных спектров. — М.: Физматгиз, 1963. [*Sobeljman I. I.* Vvedenie v teoriyu atomnihkh spektrov. — M.: Fizmatgiz, 1963.]
7. *Шифф Л.* Квантовая механика. — М.: Изд-во Иностранной литературы, 1957. [*Shiff L.* Kvantovaya mekhanika. — M.: Izd-vo Inostrannoyj literaturih, 1957.]
8. *Левич В. Г., Вдовин Ю. А., Мямлин В. А.* Курс теоретической физики. Т. 2. — М.: Наука, 1971. [*Levich V. G., Vdovin Yu. A., Myamlin V. A.* Kurs teoreticheskoyj fiziki. T. 2. — M.: Nauka, 1971.]
9. *Lense J., Thirring H.* Über den Einfluss der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie // Physikalische Zeitschrift. — 1918. — Vol. B. 19. — P. 156.

UDC 531.51, 539.184

Graviatoms Taking Account of Relativistic Corrections and Minihole Rotation

Yu. P. Laptev[*], M. L. Fil'chenkov[†]
[*] *Department of Physics*
Bauman Moscow State Technical University
5, 2-nd Baumanskaya str., Moscow, 105005, Russia
[†] *Institute of Gravitation and Cosmology*
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

Gravitationally bound quantum systems, so-called graviatoms, consisting of a minihole and a charged particle have been considered [1, 2]. Relativistic corrections, particle spin and minihole rotation were taken into account. A frequency, oscillator strength and intensity of radiation were calculated for the dipole transition $2p \to 1s$.

Key words and phrases: graviatoms, self-action, dipole radiation.