
Математическое моделирование

УДК 519.6

Моделирование и оценивание длинной памяти финансовых временных рядов

Е. Ю. Щетинин, Ю. Г. Прудников, П. Н. Марков

*Кафедра прикладной математики
ГОУ ВПО МГТУ «Станкин»*

Вадковский пер., 1, МГТУ «Станкин», Москва, 127994, Россия

В настоящей работе исследованы свойства длинной памяти временных рядов стоимостных показателей финансовых активов. Для моделирования таких процессов нами использованы модели авторегрессии дробно-интегрированного скользящего среднего, являющиеся наиболее успешными среди всех подобных моделей. В работе проведён обзор методов оценивания параметров таких моделей, дан анализ их основных достоинств, выделены их недостатки и предложен новый метод, позволяющий устойчиво оценивать параметр длинной памяти для нестационарных рядов, содержащих полиномиальный тренд. В работе исследованы временные ряды стоимостных показателей некоторых финансовых активов и получены количественные оценки показателя их длинной памяти.

Ключевые слова: длинная память, дробно-интегрированные процессы ARFIMA, периодограмма, метод Уиттла.

1. Введение

Временные ряды с долговременной памятью привлекают все возрастающее внимание исследователей в таких областях экономики и финансов, как макроэкономические показатели, структура финансов, международные рынки валюты и др. Одной из наиболее успешных математических моделей этих процессов стали так называемые дробно-интегрированные процессы $I(d)$, являющиеся некоторой обобщённой промежуточной стадией между белым шумом $I(0)$ и процессами единичного корня $I(1)$, и по своим свойствам уже позволяющим успешно моделировать долговременную память в различных областях, содержащих подобное явление [1–3].

Процессы с длинной памятью впервые были исследованы инженером Херстом при изучении притоков Нила и оптимальных размеров резервуаров воды. До начала 1950-х г. модели, традиционно использовавшиеся в гидрологии, предполагали, что притоки и оттоки рек являются независимыми во времени или, по крайней мере, слабо зависимыми. В этих условиях изучение истории уровней воды не приносило никакой полезной информации для понимания будущего поведения реки. Другими словами, эффект шока, произведённый, например, крупным паводком, должен был быстро исчезать, не оказывая влияния на изучаемый ряд. В этом случае мы говорим о нулевой памяти (полная зависимость) или о короткой памяти (слабая зависимость между наблюдениями и краткосрочная зависимость). Хёрст показал, что эти модели в значительной степени недооценивают сложность гидрологических колебаний, а изучение предшествующих уровней воды предоставляет крайне ценную информацию относительно будущего поведения реки.

Необходимо отметить, что понятие длинной памяти является промежуточным между понятиями памяти короткой и памяти бесконечной. Это замечание приобретает особую важность, поскольку зачастую оказывается затруднительным проведение жёсткого разграничения между этими типами поведения временных рядов, в особенности в случае рассмотрения экономических данных. В случае с короткой памятью эффект шока не оказывает влияния на поведение анализируемого ряда в долгосрочном периоде. Напротив, для ряда, характеризующегося

бесконечной памятью, эффект шока сказывается на всех без исключения будущих значениях данного ряда. В промежуточном случае наличие во временном ряде эффекта долгосрочной памяти приводит к крайне длительным, но не перманентным последствиям шока. Эти последствия не являются постоянными в том смысле, что рано или поздно ряд вернётся к своему равновесному уровню (такой уровень часто называют «нормальным» или «естественным»), тогда как ряд с бесконечной памятью никогда не возвращается к равновесному уровню после произошедшего шока. Это разграничение становится особенно важным при изучении финансовых рынков. В 1990-е г. появилось множество исследований, посвящённых использованию длинной памяти в макроэкономических и финансовых приложениях. Пионерские работы [2–4] и др. показали возможность повышения качества прогноза показателей доходности финансовых активов, демонстрирующих эффекты длинной памяти, на основе предложенных ими моделей линейных дробно-интегрированных процессов *ARFIMA*. В дальнейшем идеи были развиты для моделирования процессов стохастической волатильности и успешно применены к расчётам стоимостных показателей производных инструментов (опционов, и т.д.). Так, Боллерслев, Миккельсен [5] показали, что цена опциона возрастает вместе со степенью интегрирования. Это означает, что *GARCH* модели дают нижнюю (наименьшую) цену, тогда как *IGARCH* модели дают её верхнее (максимальное) значение.

2. Определение длинной памяти

Стохастический процесс называется процессом с длинной памятью, если его спектральная плотность удовлетворяет следующим свойствам

$$f(\lambda) \sim c_1 |\lambda|^{-2d}, \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0; \quad (1)$$

где $d \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ — некоторый показатель длинной памяти. Также можно дать определение длинной памяти с использованием автоковариационной функции $\gamma(\tau)$

$$\gamma(\tau) \sim c_2 |\tau|^{-2d}, \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty.$$

Для характеристики длинной памяти X_t вводится следующий показатель

$$d = H - \frac{1}{2}, \quad (2)$$

что связано напрямую с параметрами некоторых моделей таких процессов, описание которых ждёт нас далее.

3. Модели временных рядов с длинной памятью

Рассмотрим некоторые примеры процессов с длинной памятью, модели их описывающие. Необходимо уточнить, что в дальнейшем мы будем говорить только о линейных и стационарных процессах, обладающих длинной памятью. Нелинейные модели будут предметом исследования следующей нашей статьи.

3.1. Гауссов процесс

Гауссов процесс имеет длинную память, если и только если его автоковариационная функция имеет вид (1) с показателем Хёрста $2 - 2H$, $1/2 < H < 1$. Линейный процесс $X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \varepsilon_{t-j}$, $\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j^2 < \infty$, $\{\varepsilon_t\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин. Если $\{\varepsilon_t\}$ — гауссов белый

шум, тогда $\{X_t\}$ является гауссовым. Достаточным условием длинной памяти является условие $a_j = l(j) j^{-d-1/2}$, $d \in (0, 1/2)$, $l(j)$ — медленно меняющаяся функция на бесконечности. Тогда X_t обладает длинной памятью с показателем Хёрста $H = d + 1/2$.

3.2. Фрактальный гауссовский шум

Этот процесс определяется как $X_t = B_H(t) - B_H(t-1)$, $t \in R$ и имеет автоковариационную функцию в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_s, X_t) &= \frac{1}{2} \left(||t-s|-1|^{2H} + ||t-s|+1|^{2H} - 2|t-s|^{2H} \right) \sim \\ &\sim H \left(H - \frac{1}{2} \right) |t-s|^{2(H-1)}, \quad \text{при } |t-s| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тогда процесс X_t имеет параметр длинной памяти $d = H - \frac{1}{2}$.

3.3. Фрактальное броуновское движение

$$\text{cov}(B_H(s), B_H(t)) = \frac{1}{2} \left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - 2|t-s|^{2H} \right).$$

3.4. Авторегрессионная модель дробно-интегрированного скользящего среднего

Прекрасной математической моделью процесса с длинной памятью является предложенная в [3] линейная авторегрессионная дробно-интегрированная модель скользящего среднего $ARFIMA(p, d, q)$, являющаяся обобщением линейной авторегрессионной интегрированной модели скользящего среднего $ARIMA(p, q)$ [5]. Говорят, что процесс X_t является авторегрессионным порядка p проинтегрированным процессом $I(d)$ порядка d скользящего среднего порядка q , если имеет место следующее его представление:

$$\begin{aligned} (1-L)^d y_t &= \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T, \\ \varphi(L) \varepsilon_t &= \Theta(L) \eta_t, \quad \Phi(L) \varepsilon_t = \theta(L) \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma^2). \\ \varphi(L) (1-L)^d X_t &= \theta(L) \eta_t, \end{aligned} \tag{3}$$

L — оператор обратного сдвига ($LX_t = X_{t-1}$), $\varphi(L) = 1 - \varphi_1 L - \dots - \varphi_p L^p$, $\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q$. Оператор L называется лаговым оператором, и процесс ε_t является процессом с короткой памятью, т.е. $I(0)$. Параметр d подразумевается в этом случае дробным числом из области $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Оператор $(1-L)^d$ имеет следующее разложение в ряд

$$(1-L)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)} L^j,$$

где $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ — гамма-функция. Автокорреляционная функция такого ряда имеет вид

$$\rho_k = \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1-d)} \sim \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} k^{2d-1}, \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

для $d \in (0, 1/2)$, где $C > 0$. В этом случае процесс X_t является стационарным. При $d = 0$ процесс имеет короткую память, по существу, это белый шум $I(d=0)$. Случай $d \in (-1/2, 0)$ представляется достаточно редким и описывается как свойство антиперсистентности ряда. Для $d \in (1/2, 1)$ X_t является нестационарным процессом, требующим дополнительных исследований и обработки. При $d = 1$ процесс X_t следует процессам единичного корня. При $d \in (1, 3/2)$ процесс является нестационарным и требуется либо его приведение к стационарному ряду либо применение специальных процедур оценивания d , инвариантных к тренду.

4. Методы оценивания параметра длинной памяти

Среди различных методов оценивания параметра d наибольшее распространение получили два подхода: методы периодограммы и локальной оценки Уиттла [3, 4]. Периодограммой временного ряда $\{x_t\}$, $t = 1, \dots, T$ называется

$$I_i = I(\lambda_i) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=1}^T x_t e^{it\lambda_i} \right|^2, \quad (4)$$

где $\lambda_i = 2\pi i/T$, $1 \leq i < m$, где m — число ортант периодограммы, включаемых в периодограмму таким образом, что оно растёт медленнее, чем размерность выборки $m/T \rightarrow 0$. Оценка Портера–Худака основана на оценке метода наименьших квадратов уравнения линейной логарифмической регрессии следующего вида

$$\log(I(\lambda_i)) = c + d_{LP} R_i + \varepsilon_i,$$

$R_i = \log(4 \sin^2(\lambda_i/2))$. Для оценки (6) справедливо

$$\sqrt{m} (\hat{d}_{LP} - d) \sim N\left(0, \frac{\pi^2}{24}\right).$$

Стандартная ошибка оценки составляет $\pi/\sqrt{24m}$. Оптимальный выбор значения m согласно [6] составляет

$$m_{LP} = \left(\frac{27}{512\pi^2}\right)^{1/5} \frac{1}{\tau^{2/5}} T^{4/5}. \quad (5)$$

Метод локальной оценки Уиттла основан на минимизации логарифмической функции максимального правдоподобия в спектральной области в следующем виде:

$$R(d) = \log(G(d)) - \frac{2d}{m} \sum_{j=1}^m \log(\lambda_j), \quad (6)$$

$$G(d) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \lambda_j^{2d} I_y(\lambda_j).$$

Кюнч предложил локальную оценку Уиттла, в которой суммирование производится не по всей области частот. Вместо этого полагается, что $m \rightarrow \infty$ несколько медленнее, чем размерность выборки $T \rightarrow \infty$ таким образом, что

$$\frac{1}{m} + \frac{m}{T} \rightarrow 0, \quad \text{при } T \rightarrow \infty.$$

Тогда локальная оценка Уиттла имеет следующий вид

$$\hat{d}_{LW} = \arg \min_{d \in [d_1, d_2]} R(d). \quad (7)$$

Робинсон доказал [7], что при определённых условиях справедливо

$$\mathfrak{R}_d = \sqrt{m} \left(\hat{d}_{LW} - d \right) \rightarrow N \left(0, \frac{1}{4} \right),$$

для $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$.

Этот результат может быть расширен до $d < 0,75$, более того, оценка (7) остаётся состоятельной и при $d < 1$. Оценка (7) довольно распространена на практике, поскольку она более эффективна, чем метод оценивания *GRH*. Более того, она является робастной в условиях гетероскедастичности [8, 9]. Практическое применение разработанного метода упирается в оптимальный выбор значения ширины спектральной области суммирования, т.е. величины m^* , выбор которой определяется соотношением вариации оценки (8) и её смещением.

Остановимся на этой проблеме более подробно. Как известно, выбор излишне большой или слишком малой области влечёт излишне большую смещённость и, соответственно, слишком большую вариацию оценки (7). Так, например, для нахождения баланса в соотношении этих показателей в [9] оптимальное значение m^* предлагается выбирать в следующем виде

$$m^* = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{4/5} \left(\frac{1}{\tau + d/12} \right)^{2/5} T^{4/5}.$$

Несмотря на то, что, как правило, количество гармоник периодограммы выбирается фиксированным, в работе [9] предложен итерационный алгоритм нахождения оптимального значения m^* , базирующийся на методе минимизации среднеквадратичной ошибки оценки:

$$\begin{aligned} \hat{d}^{(k)} &= \arg \min R \left(\hat{m}^{(k)}, d \right), \\ \hat{m}^{(k+1)} &= \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{4/5} \left| \theta^* + \frac{\hat{d}^{(k)}}{12} \right|^{-2/5} T^{4/5}, \end{aligned} \quad (8)$$

для $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$ и начального значения $\hat{m}^{(0)} = T^{4/5}$. В случае модели *ARFIMA* параметр θ^* может быть приближённо выбран как $\theta^* = \frac{f_x''(0)}{2f_x(0)}$, согласно [7], где $f_x(\lambda)$ спектральная плотность *ARMA* процесса. Также в этой работе показано, что эффективная оценка для этого параметра может быть на оценке регрессии методом наименьших квадратов:

$$I(\lambda_j) = \sum_{k=0}^2 Z_{jk} \left(\hat{d}^{(0)} \right) \tilde{\varphi}_k + \tilde{\varepsilon}_j, \quad Z_{jk}(d) = \frac{|1 - \exp(i\lambda_j)|^{-2d} \lambda_j^k}{k!},$$

$$I(\lambda_j) = |1 - \exp(i\lambda_j)|^{-2\hat{d}^{(0)}} \left(\tilde{\varphi}_0 + \tilde{\varphi}_1 \lambda_j + \tilde{\varphi}_2 \frac{\lambda_j^2}{2} \right) + \tilde{\varepsilon}_j, \quad j = 1, \dots, \hat{m}^{(0)}.$$

Оценками $f'(0)$ и $f''(0)$ являются $\tilde{\varphi}_0$ и $\tilde{\varphi}_2$ соответственно, так что величину θ^* в (10) можно заменить на $\hat{\theta}^* = \tilde{\varphi}_2/2\tilde{\varphi}_0$.

Существенной проблемой при оценивании параметра d является определение типа стационарности исследуемых данных. Как правило, для этих целей применяется широкий класс известных критериев на стационарность и единичные корни. Однако их мощности не всегда достаточно для того, чтобы с высокой надёжностью выявить наличие дробно-интегрированных процессов и, соответственно, долговременной памяти. Применительно к $I(d)$ процессам проблема состоит в выборе $d \geq 1/2$ или $d < 1/2$, так как $I(d)$ являются нестационарными при $d \geq 1/2$.

В работе [10] предложен новый метод оценки d , так называемый метод точной локальной оценки Уиттла (*ELW*), позволяющий получить оценку d вне зависимости от области стационарности процесса. *ELW*-оценка является состоятельной и имеет нормальное распределение $N(0; 1/4)$ для всех значений d , если процедура оценивания покрывает интервал значений d не менее, чем $9/2$ и известно математическое ожидание.

Однако, как правило, математическое ожидание экономических временных рядов неизвестно и представляет собой полиномиальные тренды, которое довольно сложно выделить. В результате исследований доказано, что, во-первых, если неизвестное математическое ожидание заменить на среднее выборки, *ELW*-оценка сохраняет состоятельность при $d \in (1/2, 1)$ и асимптотическую нормальность; во-вторых, если неизвестное математическое ожидание заменить на начальное значение процесса, тогда *ELW*-оценка состоятельна для $d > 0$ и асимптотически нормальна для $d \in (0, 2)$, но при этом требуется наложить более строгие ограничения на число используемых компонент периодограммы, используемых при оценивании.

В настоящей работе предложен усовершенствованный двухшаговый метод локальной точной оценки Уиттла, комбинирующий в себе оба этих подхода. Целевая функция модифицирована таким образом, чтобы она сочетала в себе как медианную оценку выборки и оценку начального значения, зависящую от d . Нами показано, что модифицированный таким образом двухшаговый *ELW* метод, использующий функцию тейпирования на первом шаге, имеет предельное нормальное распределение $N(0, 1/4)$, а получаемые с его помощью оценки являются состоятельными для $d > -1/2$. Рассмотрим некоторые примеры применения разработанного метода к исследованию финансовых временных рядов на предмет обладания ими длинной памяти.

5. Исследование эффектов длинной памяти в финансовых временных рядах

В этом разделе мы попытались продемонстрировать эффективность применения рассмотренных выше методов для оценивания длинной памяти различных экономических показателей, таких как инфляция, стоимость золота, фондовый индекс NASDAQ. На рис. 1 приведены результаты оценивания параметра длинной памяти различными методами для искусственных данных, полученных с помощью модели $ARFIMA(0, d, 0)$.

Анализ их показал, что наилучшим методом для стационарных процессов является вейвлетный метод. Однако применение этих методов для нестационарных процессов, содержащих линейный тренд, уже даёт неудовлетворительные результаты (рис. 2). Однако оказалось, что разработанный нами улучшенный двухшаговый метод локальной оценки Уиттла в условиях присутствия детерминированного тренда позволяет с хорошей точностью оценить d даже для квадратичных трендов. На рис. 3 приведены соответствующие расчёты с использованием различных модификаций метода локальной оценки Уиттла: 1) метод локальной оценки; 2)

метод точной локальной оценки; 3) усовершенствованный двухшаговый метод локальной точной оценки Уиттла.

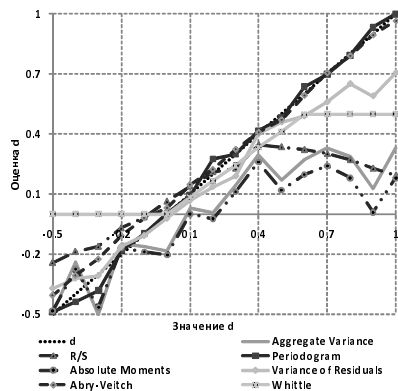


Рис. 1. Оценки параметра длинной памяти искусственных данных, полученные на основе модели $ARFIMA(0, d, 0)$

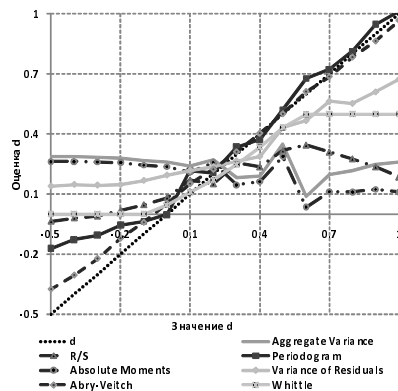


Рис. 2. Оценки параметра длинной памяти искусственных данных, полученные на основе модели $ARFIMA(0, d, 0)$ + линейный тренд

Для анализа параметра длинной памяти реальных данных были выбраны 3 ряда финансовых показателей: Инфляция США (средний показатель за месяц 1950–2000 г.г.), курс валют USD/RUB (ежедневный курс с 1990–2010 г.г.), NASDAQ (месячный показатель с 1987–2010 г.г.). Из представленных графиков можно сделать вывод о том, что все 3 ряда обладают длинной памятью и первые два из них являются нестационарными, что также подтверждается стандартными тестами на стационарность.

Стационарность ряда проверялась двумя тестами: Дики–Фуллер и Филипс–Перрон. Эти тесты удобно использовать в паре, так как они имеют разные нулевые гипотезы $I(0)$ и $I(1)$, соответственно. Для первого (USD/RUB) и третьего (Инфляция США) ряда оба теста отвергают нулевые гипотезы, что является классическим случаем для процессов с длинной памятью. Для второго ряда (NASDAQ) тестом Филипса–Перрона на уровне значимости 0.05 принимается нулевая гипотеза (о стационарности ряда), что говорит либо о принадлежности ряда к $I(1)$, либо о значении параметра длинной памяти близком к 1. Так как параметр длинной памяти может быть больше 1, необходимо также построить функции автокорреляции для приращений рядов.

При этом выяснилось, что ряды были передифференцированы, т.е. приращения обладают отрицательной памятью. Следовательно, они являются нестационарными, а параметр длинной памяти этих рядов принадлежит интервалу $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Кроме того, исследовались логарифмические приращения этих рядов. Результаты оценок параметра длинной памяти данных рядов и их логарифмических приращений приведены в табл. 1.

6. Заключение

Таким образом, проведённые в работе исследования подтвердили тот факт, что большинство экономических процессов обладают длинной памятью. Существующие методы её оценивания в своём большинстве не позволяют адекватно

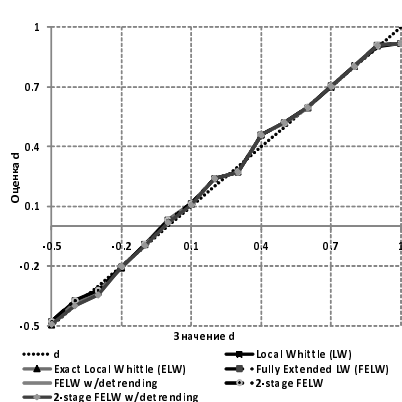


Рис. 3. Оценки параметра d , полученные различными модификациями метода Уиттла для искусственных данных $ARFIMA(0, d, 0)$

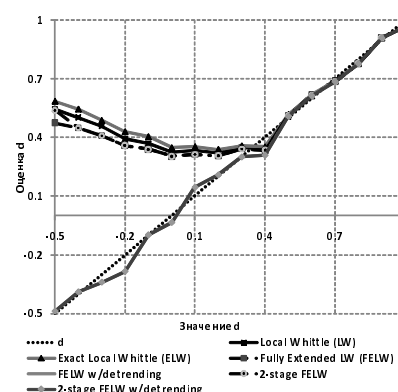


Рис. 4. Оценки параметра d , полученные различными модификациями метода Уиттла для искусственных данных, содержащих линейный тренд. $ARFIMA(0, d, 0) + \text{linear trend}$

Таблица 1

Параметр длинной памяти реальных данных и их логарифмических приращений

Ряд	$d(X_t)$	$d(\log(X_t/X_{t-1}))$
NASDAQ	0,924	0,212
USD/RUB	0,763	-0,056
Инфляция США	0,412	-0,143

вычислить её характеристики, поскольку практически все экономические временные серии являются нестационарными, содержат детерминированный тренд, сезонную компоненту, сложную стохастическую компоненту. В настоящей работе исследованы наиболее известные методы, направленные на преодоление этих препятствий, и на основе вычислительных экспериментов показано, что предложенный в работе обобщённый двухшаговый метод Уиттла позволяет устойчиво определять параметр длинной памяти при наличии линейного и квадратичного тренда. Это позволило расширить диапазон значений параметра d и сохранить при этом асимптотическую состоятельность его оценки. В дальнейшем необходимы исследования, направленные на тестирование устойчивости предложенного метода к гетероскедастичности остатков, а также решение проблемы разрывов значения параметра длинной памяти в исследуемых рядах.

Литература

1. *Hosking J.* Fractional Differencing // *Biometrika*. — 1981. — No 1. — Pp. 165–176.
2. *Granger C.* Long Memory Relationships and the Aggregation of Dynamic Models // *Journal of Econometrics*. — 1980. — No 14. — Pp. 261–279.
3. *Mandelbrot B. B., Van Ness J. W.* Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications // *SIAM Rev.* — 1968. — No 10. — Pp. 422–437.

4. *Granger C., Joyeux R.* An Introduction to Long Range Time Series Models and Fractional Differencing // *Journal of Time Series Analysis*. — 1980. — No 1. — Pp. 15–30.
5. *Baillie R. T., Bollerslev T., Mikkelsen H.* Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity // *Journal of Econometrics*. — 1996. — No 14. — Pp. 3–30.
6. *Baillie R. T.* Long Memory Processes and Fractional Integration Economics // *Journal of Econometrics*. — 1996. — No 73. — Pp. 5–59.
7. *Robinson P. M.* Time Series with Long Memory. — Oxford: Oxford University Press, 2003.
8. *Peters E. E.* Fractal Market Analysis. Applying Chaos Theory to Investment and Economics. — New York: John Wiley&Sons Inc., 2003.
9. *Beran J.* Statistics for Long Memory Processes. — Chapman & Hall: New York, 1994.
10. *Doukhan P., Oppenheim G., Taqqu M. S.* Theory and Applications of Long-Range Dependence. — Cambridge, MA: Birkhauser, 2003.

UDC 519.6

Long Range Memory Modeling and Estimation for Financial Time Series

Eu. Yu. Shchetinin, Yu. G. Prudnikov, P. N. Markov

*Chair of Applied Mathematics
Moscow State Technology University "STANKIN"
3a, Vadkovsky lane, Moscow, 127055, Russia*

This paper deals with several aspects in time series modeling concerning estimation and tests of long memory, fractional integration, and cointegration, as well as applications to financial data. The aim of the paper is to develop new and improved estimation and testing techniques, in particular to extend existing work concerning fractional processes and also to introduce new areas of application. The formulation allows the widely used fractional autoregressive integrated moving average ARFIMA models and our asymptotic results provide a theoretical justification of the findings in simulations that the local Whittle estimator is robust to deterministic polynomial trends. Finally, we explore the existence of long memory in some financial time series and conclude using a novel approach in their exploration.

Key words and phrases: long memory, fractionally integrated autoregression models, periodogram, Whittle method.