УДК 621.39

К анализу системы $M^{[X]}|G|1|r$ с прогулками прибора

К. Е. Самуйлов, Э. С. Сопин

Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, 117198, Россия

В статье представлены результаты исследования системы массового обслуживания типа $\mathrm{M}^{[X]}|G|1|r$ с прогулками прибора на периодах простоя. Показана связь между вероятностными распределениями систем неограниченной и ограниченной ёмкости. Получено выражение для производящей функции распределения длины очереди для случая $r < \infty$ и формулы для основных вероятностно-временных характеристик.

Ключевые слова: система массового обслуживания, групповое поступление, прогулки прибора, конечная очередь.

1. Введение

Системы массового обслуживания типа (СМО) типа $\mathrm{M}^{[X]}|G|1|r$ с прогулками прибора находят применение при анализе функционирования различных узлов телекоммуникационных сетей. При этом, как правило, рассматриваются системы с неограниченной ёмкостью накопителя ($r = \infty$). Это упрощает анализ и позволяет выполнять его при весьма общих предположениях относительно характера обслуживаемой нагрузки. При малых и умеренных интенсивностях нагрузки буферная память не является дефицитным ресурсом, что довольно часто позволяет пользоваться результатами, полученными для СМО с накопителем неограниченной ёмкости. Последние известные результаты для исследуемой СМО в случае $r = \infty$ опубликованы в [1,2], а для случая $r < \infty$ авторам не известны какие-либо результаты анализа СМО с групповым поступлением заявок.

Однако нередко возникает необходимость в исследовании СМО с накопителем ограниченной ёмкости, как, например, в работе [3], где ставится задача анализа функционирования сервера присутствия подсистемы IMS (IP Multimedia Subsystem) в сети связи третьего поколения. С помощью таких моделей решаются такие задачи, как определение вероятности потери заявки, вероятности переполнения накопителя, а также расчёт среднего времени ожидания в очереди при работе системы в режиме перегрузки.

В данной статье СМО $M^{[X]}|G|1|r$ с прогулками прибора на периодах простоя системы анализируется при помощи аппарата марковских процессов восстановления, позволяющего обнаружить связь стационарных распределений длины очереди для систем неограниченной и ограниченной ёмкости. Такой метод впервые был предложен Г.П. Климовым в [4], а также Г.П. Башариным и К.Е. Самуйловым в [5]. Сначала мы исследуем случай $r = \infty$, для которого находим производящую функцию (ПФ) длины очереди и среднее время ожидания заявки в очереди. Затем, используя найденную связь двух вероятностных распределений, для случая $r < \infty$ получаем ПФ длины очереди и вероятность потери заявки.

2. Анализ модели $M^{[X]}|G|1|\infty$

Рассматривается однолинейная СМО, состоящая из одного обслуживающего прибора и накопителя неограниченной ёмкости. Заявки поступают на прибор группами, поток групп заявок является пуассоновским с интенсивностью λ. В каждую группу поступает случайное число заявок с вероятностью l_i того, что

Статья поступила в редакцию 28 октября 2010 г.
Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 10-07-00487-а).

поступит ровно i заявок. Кроме того, предполагаем, что группа не может быть пустой, т.е. $l_i = 0$. Заявка, заставшая прибор свободным, немедленно начинает обслуживаться, в противном случае занимает место в накопителе. Длительность обслуживания является случайной величиной (СВ) с функцией распределения (ФР) $B(x)$ и средним $b^{(1)} < \infty$. Будем считать, что группы заявок обслуживаются в порядке их поступления, внутри группы заявки обслуживаются в случайном порядке. В занятом состоянии прибор абсолютно надёжен. Если в некоторый момент времени прибор освободился от обслуживания заявок, он уходит на прогулку, длительность которой есть СВ с ФР $F(x)$ и средним $f^{(1)} < \infty$.

Введём случайные процессы (СП) $\xi(t)$ — число заявок в СМО в момент времени t, и $\zeta(t)$ — длина очереди в СМО в момент времени t. Пусть $t_n, n \geqslant 0$ — моменты окончания обслуживания заявок, либо окончания прогулки прибора, тогда состояния случайного процесса $\xi(t_n + 0)$ образуют вложенную цепь Маркова. Обозначим $q_j = \lim\limits_{n\to\infty} P\{\xi(t_n + 0) = j\}$, $p_j = \lim\limits_{n\to\infty} P\{\zeta(t_n) = j\}$, $j \geqslant 0$, а также $\beta_k = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\mathrm{d}B(x)$, где β_k интерпретируют как вероятность поступления в СМО k групп заявок за случайное время наблюдения, распределённое в соответствие с ФР $B(x)$. Аналогично определяются величины $\varphi_k, k \geqslant 0$ для ФР $F(x)$. Кроме этого, будем использовать следующие обозначения: $\hat\rho = \lambda b^{(1)}$, $\rho = l^{(1)}\hat\rho$, $\hat\alpha = \lambda f^{(1)}$, $\alpha = l^{(1)}\hat\alpha$, где $l^{(1)}$ — средняя число заявок в группе.

Пусть l_i^k — вероятность того, что k групп содержат ровно i заявок. Тогда нетрудно убедиться, что вероятности $q_j, j \geqslant 0$ удовлетворяют следующей системе уравнений

$$q_j = q_0\sum_{k=0}^{j} l_j^k\varphi_k + \sum_{i=0}^{j} q_{i+1}\sum_{k=0}^{j-i} l_{j-i}^k\beta_k, \quad j \geqslant 0, \tag{1}$$

и, проведя обычные для ПФ преобразования, получим, что

$$Q(z) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j z^j = q_0\frac{\beta(\lambda L(z)) - z\varphi(\lambda - \lambda L(z))}{\beta(\lambda - \lambda L(z)) - z}. \tag{2}$$

Здесь $\beta(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ — преобразования Лапласа–Стильтьеса (ПЛС) функций $B(x)$ и $F(x)$ соответственно. Отметим, что условием существования стационарного распределения вероятностей $q_j, j \geqslant 0$ являются неравенства $\rho < 1, \quad f^{(1)} < \infty$ [4]. Используя свойство $\lim\limits_{z\to 1} Q(z) = 1$, находим q_0 в виде

$$q_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho+\alpha}.$$

Далее находим связь между распределениями $\{q_j\}_{j\geqslant 0}$ и $\{p_j\}_{j\geqslant 0}$ в виде следующих соотношений

$$p_j = \tilde C^{-1}\left\{ q_0\int\limits_0^\infty [1 - F(x)]e^{-\lambda x}\left(\sum_{k=0}^{j} l_j^k\frac{(\lambda x)^k}{k!}\right)\mathrm{d}x + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=0}^{j} q_{i+1}\int\limits_0^\infty [1 - B(x)]e^{-\lambda x}\left(\sum_{k=0}^{j-i} l_{j-i}^k\frac{(\lambda x)^k}{k!}\right)\mathrm{d}x \right\}, \tag{3}$$

где $\tilde{C} = q_0 f^{(1)} + (1 - q_0) b^{(1)}$. Так как

$$\int\limits_0^\infty [1 - F(x)] e^{-\lambda x} \left(\sum_{k=0}^{j} l_j^k \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{k=0}^{j} l_j^k - \sum_{k=0}^{j} l_j^k \sum_{i=0}^{k} \varphi_i \right),$$

то из (3) получаем ПФ распределения $\{p_j\}_{j \geqslant 0}$ в виде

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j = \frac{1 - \rho}{\hat{\alpha}} \frac{(1 - z)(1 - \varphi(\lambda - \lambda L(z)))}{(1 - L(z))(\beta(\lambda - \lambda L(z)) - z)}. \tag{4}$$

Определим также P_0 — вероятность того, что прибор не занят обслуживанием заявок

$$P_0 = \tilde{C}^{-1} q_0 \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_0^\infty [1 - F(x)] e^{-\lambda x} \left(\sum_{k=0}^{j} l_j^k \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right) \mathrm{d}x = 1 - \rho. \tag{5}$$

С учётом (5) выражение для $P(z)$ можно переписать в виде

$$P(z) = \left((1 - \rho) \frac{1 - \beta(\lambda - \lambda L(z))}{\beta(\lambda - \lambda L(z)) - z} + (1 - \rho) \right) \frac{1 - \varphi(\lambda - \lambda L(z))}{\hat{\alpha}(1 - L(z))} =$$
$$= \left(P(M^{[X]}|G|1; z) + P_0 \right) \cdot R(z), \tag{6}$$

где $P(M^{[X]}|G|1; z)$ — обозначение ПФ стационарного распределения длины очереди для системы $M^{[X]}|G|1$ без прогулок, а $R(z)$ — ПФ числа заявок, поступивших за среднее время остаточной длительности прогулки [1].

Теперь, имея ПФ $P(z)$, можно найти среднюю длину очереди и среднее время ожидания заявки в очереди:

$$N = \lim_{z \to 1} P'(z) = \frac{1}{2} \lambda l^{(1)} \frac{f^{(2)}}{f^{(1)}} + \frac{\lambda^2 \left(l^{(1)} \right)^2 b^{(2)} + \hat{\rho}(l^{(2)} - l^{(1)})}{2(1 - \rho)}; \tag{7}$$

$$w = \frac{N}{\lambda l^{(1)}} = \frac{f^{(2)}}{2 f^{(1)}} + \frac{\lambda l^{(1)} b^{(2)}}{2(1 - \rho)} + \frac{b^{(1)} \left(\frac{l^{(2)}}{l^{(1)}} - 1 \right)}{2(1 - \rho)}. \tag{8}$$

Отметим, что выражение (8) распадается на три слагаемых: первое — среднее время остаточной длительности прогулки, второе – среднее время ожидания заявки в очереди, вызванное обслуживанием на приборе заявок из других групп, а третье – среднее время ожидания заявки в очереди, вызванное обслуживанием заявок из этой же группы.

Представленные выше результаты можно также найти, например, в [1, 2], но полученные с помощью аппарата линейчатых марковских процессов, что, с нашей точки зрения, усложняет анализ СМО в случае $r < \infty$, как это показано в следующем разделе статьи.

В заключение данного раздела сделаем несколько замечаний, необходимых для дальнейшего изложения. Для этого представим ПФ $P(z)$ в виде

$$P(z) = P_0 \tilde{P}(z), \quad \tilde{P}(z) = \frac{1}{\hat{\alpha}} \frac{(1 - z)(1 - \varphi(\lambda - \lambda L(z)))}{(1 - L(z))(\beta(\lambda - \lambda L(z)) - z)}.$$

Заметим, что в некоторой окрестности точки $z = 0$ при условии $\rho < 1$ функции $(\beta(\lambda - \lambda L(z)) - z)$ и $(1 - L(z))$ аналитичны и не обращаются в нуль. Следовательно, при $f^{(1)} < \infty$ функция $\tilde{P}(z)$ в этой окрестности разлагается в ряд по целым степеням z, т.е. представима в виде $\tilde{P}(z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\tilde{p}_j z^j$. Таким образом, при $\rho<1$ и $f^{(1)}<\infty$ справедливо соотношение

$$p_j = P_0\tilde{p}_j, \quad j \geqslant 0. \tag{9}$$

3. Анализ модели $M^{[X]}|G|1|r<\infty$

Введём СП $\xi^r(t)$ — число заявок в СМО, и $\zeta^r(t)$ — длина очереди в СМО в момент времени $t\geqslant 0$, где r — максимальная длина очереди. Тогда $q_j^r = \lim\limits_{n\to\infty} P\{\xi^r(t_n+0)=j\}$ и $p_j^r=\lim\limits_{t\to\infty}P\{\zeta^r(t)=j\}$, $j=\overline{0,r}$.

Введём операцию «усечения ряда» [4]: если $\varphi(z)=\sum\limits_{j\geqslant 0}a_j z^j$, то положим по определению $\varphi(z)|_r=\sum\limits_{j\geqslant 0}^{r}a_j z^j$. Заметим, что для цепей Маркова, имеющих квазиверхнетреугольную матрицу переходных вероятностей, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Даны две неприводимые непериодические однородные цепи Маркова* $\{v_n\}_{n\geqslant 0}$ *и* $\{v_n(r)\}_{n\geqslant 0}$ *с множествами состояний* $\{0,1,2,\ldots\}$ *и* $\{0,1,2,\ldots,r\}$ *соответственно. У каждой цепи Маркова существует единственное стационарное распределение* q_j^v, $j\geqslant 0$ *и* $q_j^{v(r)}$, $j\geqslant 0$, *и соответствующие производящие функции представимы в виде* $Q^{v(r)}(z)=q_0^{v(r)}\tilde{Q}^{v(r)}(z)$, $\quad Q^v(z)=q_0^v\tilde{Q}^v(z)$. *Пусть также выполняется условие:*

$$q_{ij}^{v(r)} = \begin{cases} 0, & j<r, \quad i=\overline{0,r},\\ \sum\limits_{l\geqslant r} q_{il}^v, & j=r, \quad i=\overline{0,r}, \end{cases} \tag{10}$$

тогда

$$Q^{v(r)}(z) = q_0^{v(r)}\ \tilde{Q}^v(z)\Big|_r. \tag{11}$$

Легко убедиться, что цепи Маркова с распределениями q_i и q_i^r удовлетворяют требованиям (10) приведённой леммы, поскольку заявки в СМО обслуживаются по одной, а значит можно установить следующую связь между производящими функциями этих распределений:

$$Q^r(z) = q_0^r\ \tilde{Q}(z)\Big|_r = q_0^r\ \frac{\beta(\lambda L(z)) - z\varphi(\lambda-\lambda L(z))}{\beta(\lambda-\lambda L(z)) - z}\Bigg|_r, \tag{12}$$

где q_0^r находится из условия $\lim\limits_{z\to 1}Q^r(z)=1$.

Чтобы найти связь между распределениями q_j^r и p_j^r, выпишем связывающие их отношения:

$$p_j^r = \left(\tilde{C}^r\right)^{-1}\left\{ q_0^r\int\limits_0^{\infty}[1-F(x)]e^{-\lambda x}\left(\sum_{k=0}^{j} l_j^k\frac{(\lambda x)^k}{k!}\right)\mathrm{d}x + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=0}^{j} q_{i+1}^r \int\limits_0^{\infty}[1-B(x)]e^{-\lambda x}\left(\sum_{k=0}^{j-i} l_{j-i}^k\frac{(\lambda x)^k}{k!}\right)\mathrm{d}x\right\}, \quad j=\overline{0,r-1}; \tag{13}$$

$$p_r^r = \left(\tilde{C}^r\right)^{-1} \left\{ q_0^r \sum_{n=r}^{\infty} \int_0^{\infty} [1-F(x)] e^{-\lambda x} \left(\sum_{k=0}^{n} l_n^k \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right) \mathrm{d}x + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=0}^{r-1} q_{i+1}^r \sum_{n=r-i}^{\infty} \int_0^{\infty} [1-B(x)] e^{-\lambda x} \left(\sum_{k=0}^{n} l_n^k \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right) \mathrm{d}x \right\}, \quad (14)$$

где $\tilde{C}^r = q_0^r f^{(1)} + (1-q_0^r) b^{(1)}$. Вероятность P_0^r того, что прибор не занят обслуживанием заявок, находим по аналогии с (5):

$$P_0^r = \left(\tilde{C}^r\right)^{-1} q_0^r \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [1-F(x)] e^{-\lambda x} \left(\sum_{k=0}^{j} l_j^k \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right) \mathrm{d}x = \frac{q_0^r \alpha}{q_0^r \alpha + (1-q_0^r)\rho}. \quad (15)$$

Из (4), (9), (13), (15) и определения величин $\tilde{p}_j$ следует, что

$$p_j^r = P_0^r \tilde{p}_j, \quad j = \overline{0, r-1}, \quad (16)$$

а из формулы (16) и нормирующего условия следует, что

$$p_r^r = 1 - P_0^r \sum_{j=0}^{r-1} \tilde{p}_j. \quad (17)$$

Вероятность π потери виртуальной заявки определим следующим образом:

$$\pi = \sum_{j=0}^{r} \tilde{p}_j, \quad \text{где} \quad \pi_j = \frac{1}{l^{(1)}} \sum_{k=r-j+1}^{\infty} (k-r+j) l_k. \quad (18)$$

Подставив в (18) формулы (17) и (13), проведя серию упрощений, мы доказали следующий факт, имеющий ясный физический смысл.

Лемма 2. *Вероятность потери виртуальной заявки π и вероятность P_0^r того, что прибор не занят обслуживанием заявок, связаны соотношением*

$$\rho(1-\pi) = 1 - P_0^r. \quad (19)$$

Заметим, что вероятность переполнения очереди и вероятность P_0^r связаны таким же соотношением, так как интенсивности принятой и обслуженной нагрузки совпадают. Таким образом, формула (18) есть вероятность потери заявки.

Формулу (19) можно представить в следующем виде

$$\rho \left(1 - p_r^r - P_0^r \sum_{j=0}^{r-1} \tilde{p}_j \pi_j \right) = 1 - P_0^r. \quad (20)$$

Из (17) и (20) следует, что

$$P_0^r = \left(1 + \rho \sum_{j=0}^{r-1} \tilde{p}_j - \rho \sum_{j=0}^{r-1} \tilde{p}_j \pi_j \right)^{-1}. \quad (21)$$

Исходя из (19) и (21), получаем

$$\pi = P_0^r P_{\geqslant r}, \quad \text{где} \quad P_{\geqslant r} = \sum_{j \geqslant r} p_j + \sum_{j=0}^{r-1} p_j \pi_j. \tag{22}$$

Из (20)и (21) получаем

$$p_r^r = P_0^r \left(\sum_{j \geqslant r} p_j - \rho \sum_{j=0}^{r-1} \tilde{p}_j \pi_j \right). \tag{23}$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Для любых значений $\rho < \infty$ и $\alpha < \infty$ имеет место связь между ПФ $P(z)$ и $P^r(z)$ для СМО ограниченной и неограниченной ёмкости*

$$P^r(z) = P_0^r \left(P(z)|_{r-1} + \vartheta_r z^r \right), \quad \textit{где} \quad \vartheta_r = \sum_{j \geqslant r} p_j - \rho \sum_{j=0}^{r-1} \tilde{p}_j \pi_j. \tag{24}$$

Следствие 11. Стационарные распределения случайных процессов $\zeta(t)$ и $\zeta^r(t)$ связаны следующим образом:

$$p_j^r = \begin{cases} P_0^r p_j, & j = \overline{0, r-1}, \\ P_0^r \vartheta_r, & j = r, \end{cases}$$

где

$$P_0^r = \left(1 + \rho \sum_{j=0}^{r-1} \tilde{p}_j - \rho \sum_{j=0}^{r-1} \tilde{p}_j \pi_j \right)^{-1}.$$

4. Заключение

В статье представлены результаты исследования СМО типа $M^{[X]}|G|1$ с групповым поступлением заявок и прогулками прибора на периодах простоя как для случая бесконечной очереди, так и для конечной. Результаты исследования моделей позволяют установить связь двух вероятностных распределений систем конечной и бесконечной ёмкости. Кроме того, найдены производящие функции для этих вероятностных распределений и получены формулы для расчёта основных вероятностно-временных характеристик.

Литература

1. *Choudhury G.* Analysis of the $M[X]|G|1$ Queuing System with Vacation Times // Sankhya: The Indian Journal of Statistics. — 2002. — Vol. 64, Series B. — Pp. 37–49.
2. The $M[X]|G|1$ Queue with Queue Length Dependent Service Times / B. D. Choi, Y. C. Kim, Y. W. Shin, C. E. M. Pearce // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. — 2001. — Vol. 14. — Pp. 399–419.
3. IMS Presence Server: Traffic Analysis & Performance Modelling / C. Chi, R. Hao, W. D., C. Z. // The 16th IEEE International Conference on Network Protocols / IEEE. — 2008.
4. *Климов Г. П.* Стохастические системы обслуживания. — М.: Наука, 1966. — 244 с. [*Klimov G. P.* Stokhasticheskie sistemih obsluzhivaniya. — M.: Nauka, 1966. — 244 s.]

5. *Башарин Г. П., Самуйлов К. Е.* Об однофазной системе массового обслуживания с двумя типами заявок и относительным приоритетом // Техническая кибернетика. — 1983. — Т. 3. — С. 48–56. [*Basharin G. P., Samuyjlov K. E.* Ob odnofaznoyj sisteme massovogo obsluzhivaniya s dvumya tipami zayavok i otnositeljnihm prioritetom // Tekhnicheskaya kibernetika. — 1983. — T. 3. — S. 48–56.]

UDC 621.39

On Analysis of $M^{[X]}|G|1|r$ Queuing System

K. E. Samouylov, E. S. Sopin

Telecommunication Systems Department
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

The paper presents results of analysis of $M^{[X]}|G|1|r$ queuing system with vacations and batch arrival. The relationship between the probability distributions of systems with infinite and limited capacity is shown. An expression for generating function of queue length distribution for the case of $r < \infty$ is obtained, as well as formulas for stationary probabilities, call loss probability and other characteristics.

Key words and phrases: queuing system, batch arrival, vacations, limited queue length.