УДК 519.95

Об устойчивости одной дифференциальной игры нескольких лиц при многих целевых множествах

В. Р. Барсегян, А. А. Степанян

Кафедра механики
Ереванский государственный университет
Алек Манукяна 1, Ереван 0025, Армения

В работе рассматривается устойчивость одной дифференциальной игры нескольких лиц при многих целевых множествах относительно информационных помех. Доказано, что стратегии, экстремальные к стабильным мостам гарантируют, решение задачи, устойчивое к информационным помехам.

Ключевые слова: дифференциальные игры нескольких лиц, многие целевые множества, информационные помехи, устойчивость.

1. Введение

В дифференциальных играх реализация процедур управления на практике обычно осуществляется построением ломанных Эйлера [1]. При выборе игроками управлений неизбежны различного рода информационные помехи, такие как неточные измерения игроками фазовых состояний системы. Возможны такие ситуации, в которых информационные помехи могут разрушать реализацию построенного решения. В таких случаях возникает необходимость исследования устойчивости решений.

Устойчивость дифференциальных игр для двух игроков при одном целевом множестве сформулирована и исследована в [1]. Вопросы устойчивости дифференциальных игр при многих целевых множествах рассмотрены в [2]. В данной работе исследуется устойчивость одной дифференциальной игры нескольких лиц при многих целевых множествах, которая примыкает к вышеупомянутым работам.

2. Постановка задачи

Рассматривается конфликтно-управляемая система, движение которой описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f\left(t, x, u_1, \ldots, u_k\right), \tag{1}$$

$$u_i \in P_i \subset R^{n_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, k \quad (k \geqslant 2), \quad f : [t_0, \infty) \times R^n \times R^{n_1} \times \ldots \times R^{n_k} \to R^n.$$

Здесь $x \in R^n$ — фазовый вектор системы, u_i — управляющее воздействие i-го игрока, P_i — компактное множество в пространстве R^{n_i}, функция f непрерывна по совокупности всех своих аргументов.

Введем следующие обозначения [3]:

$$P = P_1 \times \ldots \times P_k, P^{(i)} = P_1 \times \ldots \times P_{i-1} \times P_{i+1} \times \ldots \times P_k,$$
$$u = \left(u_1, \ldots, u_k\right), \quad u^{(i)} = \left(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_k\right), \quad (u \in P,\ u^{(i)} \in P^{(i)}).$$

Через $K\left(i\right)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$ обозначим множество $\{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k\}$.

Относительно функции f предположим, что она удовлетворяет следующим условиям:

Статья поступила в редакцию 11 ноября 2010 г.

1) Бесконечной продолжительности решения — существует постоянное число $\chi > 0$ такое, что при любом $x \in R^n$, равномерно по $t \in [t_0, \infty)$ и $u_i \in P_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ имеет место неравенство

$$\|f(t, x, u_1, \ldots, u_k)\| \leqslant \chi (1 + \|x\|). \tag{2}$$

2) Функция Липшицева по x — для каждого ограниченного множества G из пространства $R^{n+1} = \{\{t, x\}, t \in R, x \in R^n\}$ существует такая положительная постоянная λ_G, что при всех $\left\{t, x^{(1)}\right\} \in G$, $\left\{t, x^{(2)}\right\} \in G$ и $u_i \in P_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ выполняется неравенство

$$\left\|f\left(t, x^{(1)}, u_1, \ldots, u_k\right) - f\left(t, x^{(2)}, u_1, \ldots, u_k\right)\right\| \leqslant \lambda_G \left\|x^{(1)} - x^{(2)}\right\|. \tag{3}$$

3) Существует седловая точка «маленькой игры» [1], т.е. для любого вектора $s \in R^n$, любой позиции $\{t, x\} \in [t_0, \infty) \times R^{n+1}$ и любого номера $i = 1, 2, \ldots, k$ справедливо равенство

$$\min_{u_i \in P_i} \max_{u^{(i)} \in P^{(i)}} s' f(t, x, u_1, \ldots, u_k) = \max_{u^{(i)} \in P^{(i)}} \min_{u_i \in P_i} s' f(t, x, u_1, \ldots, u_k). \tag{4}$$

Предположим, что заданы компактные множества $M_1^{(j)}, \ldots, M_k^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, m)$ и $N_1, \ldots, N_k$ в пространстве R^{n+1}. Пусть также заданы моменты времени ϑ_j $(j = 1, \ldots, m)$, такие, что $t_0 = \vartheta_0 < \vartheta_1 < \ldots < \vartheta_m = \theta$. Предполагается также, что при любом $i = 1, 2, \ldots, k$ $M_i^{(j)} \cap \{(t, x) : t = \vartheta_j, x \in R^n\} \neq \emptyset$ $(j = 1, \ldots, m)$. Множество $M_i^{(j)}$ является целевым для i-го игрока в момент времени ϑ_j, а множество N_i — фазовое ограничение $(i = 1, 2, \ldots, k)$. $M_i^{(j)} \subset N_i$ для всех соответствующих индексов i и при любых j.

Будем рассматривать дифференциальную игру двух сторон при многих целевых множествах, в которой i-й игрок (i может быть любым из чисел $1, \ldots, k$) решает задачу встречи к моментам ϑ_j на множества $M_i^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, m)$ внутри фазовых ограничений N_i и в которой ему противодействует объединение оставшихся игроков. Эту игру, т.е. игру i-го игрока, будем обозначать символом

$$\left(i, K(i), \left\{M_i^{(j)}\right\}, \{\vartheta_j\}, N_i, j = 1, \ldots, m\right).$$

Платой в рассматриваемой дифференциальной игре является некоторый непрерывный функционал $\gamma(x[\cdot])$, где $x[\cdot]$ — реализовавшееся движение системы.

Предполагается, что i-й игрок, которому предоставлено управление u_i, стремится минимизировать значение платы γ, а объединение оставшихся $K(i)$, игроков выбирающих набор управлений $u^{(i)} = (u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_k)$ максимизируют значение γ.

Так как при выборе своих стратегий участники будут руководствоваться принципом обратной связи, при реализации которого неизбежны различного рода информационные погрешности, то возникает вопрос устойчивости решений, т.е. влияния малых погрешностей измерения фазового состояния системы на движения системы.

Требуется найти такие стратегии игроков, которые обеспечивают устойчивое решение вышесформулированной дифференциальной игры по отношению к информационным погрешностям.

3. Некоторые определения

Приведем формальное определение кусочно–позиционных стратегий и порожденных ими движений.

Пусть (t_0, x_0) — исходная позиция системы (1), где $x_0 = x(t_0)$ и Δ_r — есть разбиение полуоси $t_0 \leqslant t < \infty$, $\tau_1^{(r)}, \tau_2^{(r)}, \ldots$ — узы разбиения, диаметром разбиения будет $\delta_r = \sup\limits_s \left(\tau_{s+1}^{(r)} - \tau_s^{(r)}\right)$. Предполагается, что при любом разбиении Δ_r моменты времени ϑ_j $(j = 1, \ldots, m)$ являются узлами разбиения, т.е. $\tau_{s_0}^{(r)} = t_0 = \vartheta_0$, $\tau_{s_1}^{(r)} = \vartheta_1, \ldots, \tau_{s_m}^{(r)} = \vartheta_m = \theta$.

Рассмотрим полуинтервал

$$\left[\tau_{s_{p-1}+j-1}^{(r)}, \tau_{s_{p-1}+j}^{(r)}\right) \subset [\vartheta_{p-1}, \vartheta_p)\, (p = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, s_p - s_{p-1} + 1)$$

Определение 1. Кусочно-позиционным управлением i-го игрока на полуинтервале $\left[\tau_{s_{p-1}+j-1}^{(r)}, \tau_{s_{p-1}+j}^{(r)}\right)$ назовем отображение вида

$$u_i^{(s_{p-a}+j)} : \left[\tau_{s_{p-1}+j-1}^{(r)}, \tau_{s_{p-1}+j}^{(r)}\right) \times R^n \to P_i \subset R^{n_i}. \tag{5}$$

Определение 2. Ломанной Эйлера, выходящей из позиции

$$\left(\tau_{s_{p-1}+j-1}^{(r)}, x_\Delta^{(s_{p-1}+j-1)}\left[\tau_{s_{p-1}+j-1}^{(r)}\right]\right)$$

и порожденной управлениями

$$u_{i_1}\left[\tau_{s_{p-1}+j-1}^{(r)}, x_\Delta^{(s_{p-1}+j-1)}\left[\tau_{s_{p-1}+j-1}^{(r)}\right]\right], \ldots, u_{i_l}\left[\tau_{s_{p-1}+j-1}^{(r)}, x_\Delta^{(s_{p-1}+j-1)}\left[\tau_{s_{p-1}+j-1}^{(r)}\right]\right]$$

l игроков $(1 \leqslant l \leqslant k)$, назовем абсолютно непрерывную функцию

$$\begin{aligned} x_\Delta^{(s_{p-1}+j)}&\left[\cdot, \tau_{s_{p-1}+j-1}^{(r)}, x_\Delta^{(s_{p-1}+j-1)}\left[\tau_{s_{p-1}+j-1}^{(r)}\right]\right] = \\ &= x_\Delta^{(s_{p-1}+j)}\left[\cdot, \tau_{s_{p-1}+j-1}^{(r)}, x_\Delta^{(s_{p-1}+j-1)}\left[\tau_{s_{p-1}+j-1}^{(r)}\right],\right. \\ &\quad u_{i_1}\left[\tau_{s_{p-1}+j-1}^{(r)}, x_\Delta^{(s_{p-1}+j-1)}\left[\tau_{s_{p-1}+j-1}^{(r)}\right]\right], \ldots \\ &\quad \left.\ldots u_{i_l}\left[\tau_{s_{p-1}+j-1}^{(r)}, x_\Delta^{(s_{p-1}+j-1)}\left[\tau_{s_{p-1}+j-1}^{(r)}\right]\right], u_{i_{l+1}}[t], \ldots, u_{i_k}[t]\right], \end{aligned} \tag{6}$$

удовлетворяющим дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{x}_\Delta^{s_{p-1}+j} = f\Big(t, x_\Delta^{s_{p-1}+j}[t], u_{i_1}&\left[\tau_{s_{p-1}+j-1}^r, x_\Delta^{s_{p-1}+j-1}\left[\tau_{s_{p-1}+j-1}^r\right]\right], \ldots, \\ u_{i_l}&\left[\tau_{s_{p-1}+j-1}^r, x_\Delta^{s_{p-1}+j-1}\left[\tau_{s_{p-1}+j-1}^r\right]\right], \quad u_{i_{l+1}}[t], \ldots, u_{i_k}[t]\Big), \\ t \in \left[\tau_{s_{p-1}+j-1}^{(r)}, \quad \tau_{s_{p-1}+j}^{(r)}\right), &\quad (p = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, s_p - s_{p-1} + 1). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $u_{i_j}[\ \cdot\ ]$ $j = l+1, \ldots, k$ – произвольные интегрируемые по Лебегу функции, для которых $u_{i_j}[t] \in P_{i_j}$, $t \in [t_0, \infty)$.

Существование решения (7) и ее продолжимость на всю полуось $[t_0, \infty)$ установлено известными теоремами [1].

Определение 3. Кусочно-позиционной стратегией U_i i-го игрока назовем набор отображений вида (5), т.е. набор функций

$$u_i\left[\ \cdot\ \right] = u_i\left(\ \cdot\ , \tau^{(r)}_{s_{p-1}+j-1}, x_{\Delta}^{(s_{p-1}+j-1)}\left[\tau^{(r)}_{s_{p-1}+j-1}\right]\right)$$

при всех $t \in [t_0, \infty)$.

Определение 4. Движением $x\,[t] = x\,[t, t_0, x_0, U_{i_1}, \ldots, U_{i_l}]$, порожденным стратегиями $U_{i_1}, \ldots, U_{i_l}$ l игроков из позиции $\{t_0, x_0\}$ назовем всякую функцию $x\,[t]$, для которой на отрезке $[t_0, \theta]$ найдется последовательность ломанных

$$x_{\Delta}\left[t, t_0, x_0, U_{i_1}, \ldots, U_{i_l}, U_{i_{l+1}}\left[\ \cdot\ \right], \ldots, U_{i_k}\left[\ \cdot\ \right]\right], \quad t \in [t_0, \infty), \quad (r = 1, 2, \ldots),$$

равномерно сходящаяся к $x\,[t]$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant \theta$ при условии

$$\lim_{r\to\infty} \sup_s \left(\tau^{(r)}_{s+1} - \tau^{(r)}_s\right) = 0.$$

Совокупность всех движений, выходящих из позиции $\{t_0, x_0\}$ и порожденных стратегиями $U_{i_1}, \ldots, U_{i_l}$ l игроков, обозначим символом $X\,[t_0, x_0, U_{i_1}, \ldots, U_{i_l}]$ и назовем пучком движений.

Отмемтим, что любую пару U_i и $\{U_1, \ldots, U_{i-1}, U_{i+1}, \ldots, U_k\}$ стратегий можно одновременно реализовать, поскольку всегда можно определить движения $x\left[\ \cdot\ \right] \in X\,[t_0, x_0, U_i] \bigcap X\,[t_0, x_0, U_1, \ldots, U_{i-1}, U_{i+1}, \ldots, U_k]$, порожденные такой парой.

Определение 5. Для абсолютно непрерывных функций $x\,[t]$, $t \in [t_0, \infty)$, выполнены условия встречи с множествами $M_i^{(1)}, \ldots, M_i^{(m)}$ соответственно к моментам $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$, если $\{\vartheta_j, x\,[\vartheta_j]\} \in_i^{(j)}$ и $\{t, x\,[t]\} \in N_i$ при $t \in [t_0, \vartheta_m]$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Определение 6. Пусть $M_i^{(j)\varepsilon}$ ε-окрестность множества $M_i^{(j)}$. Будем говорить, что абсолютно непрерывная функция $x\,[t]$ $(t \in [t_0, \infty))$ уклоняется от множества $M_i^{(j)\varepsilon}$, хотя бы при одном j $(j = 1, \ldots, m)$ в момент ϑ_j, если $\{\vartheta_j, x\,[\vartheta_j]\} \overline{\in} M_i^{(j)\varepsilon}$ или $\{t, x\,[t]\} \notin N_i^{\varepsilon}$ для $t \in [t_1, t_2] \in [\vartheta_{j-1}, \vartheta_j]$.

Пусть стратегия U_i решает задачу сближения с множествами $M_i^{(j)}$ в моменты времени ϑ_j, то есть для любого из движений $x\,[\cdot] \in X\,[t, t_0, U_i]$ имеет место $x\,[\vartheta_j] \in M_i^{(j)}$ для всех $j = 1, ..., m$ и $x\,[t] \in N_i$, $t \in [t_0, \theta]$. Пусть теперь $x^*_{\Delta}\,[\tau_r]$ неточное измерение фазового состояния системы $x_{\Delta}\,[\tau_r]$ в моменты времены τ_r $(r = 0, 1, ...)$. Скажем тогда, что имеют место информационные помехи. Эти помехи приведут к неточному выбору управлений.

Определение 7. Скажем, что стратегия U_i гарантирует решение задачи, устойчивое по отношению к информационным помехам, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такие числа $\delta > 0, \zeta > 0$, что если $\tau_{r+1} - \tau_r < \delta([\tau_r, \tau_{r+1}) \subset [\vartheta_{j-1}, \vartheta_j))$, а $\|x^*_{\Delta}\,[\tau_r] - x_{\Delta}\,[\tau_r]\| \leqslant \zeta$, то управление $u^*_{\Delta}\,[t] = u\,(\tau_r, x^*_{\Delta}\,[\tau_r])$ $\tau_r \leqslant t < \tau_{r+1}$ $(r = 0, 1, ...)$ гарантирует попадания ломанных Эйлера $x_{\Delta}\,[t]$ $(t \geqslant t_0)$ в ε окрестность множеств $M_i^{(j)}$ к моментам времени ϑ_j для всех $j = 1, \ldots, m$ при сохранении их в ε окрестности множества N_i.

4. Решение задачи

Пусть в пространстве позиций (t,x) определен W_i — максимальный u_i — стабильный мост в игре $\left(i, K(i), \left\{M_i^{(j)}\right\}, \{\vartheta_j\}, N_i, j=1,\ldots,m\right)$, и определены также u_i — стабильные мосты $W_i^{(j-1)}$, отвечающие этапам $[\vartheta_{j-1},\vartheta_j]$, $(j=1,\ldots,m)$.

Рассмотрим управление $u_i^e\{t,x\}$, которое на промежутке времени $[\vartheta_{j-1},\vartheta_j)$ формируется позиционной стратегией, экстремальной к мосту $W_i^{(j-1)}$ $j=1,\ldots,m$, т.е. если гиперплоскость $\Gamma_{t_*}=\{\{t,x\}/t=t_*\}$ не имеет пересечения с множеством $W_i^{(j-1)}$ или $\Gamma_{t_*}\bigcap W_i^{(j-1)}\neq\emptyset$, но $\{t_*,x_*\}\in W_i^{(j-1)}$, то в качестве $u_i^e\{t_*,x_*\}$ берется любой вектор $u\in P_i$, в противном случае в качестве $u_i^e\{t_*,x_*\}$ берется вектор u^e, удовлетворяющий условию

$$\max_{u^{(i)}\in P^{(i)}}(x_*-w_*)' f(t_*,x_*,u_1,\ldots,u_{i-1},u^e,u_{i+1},\ldots,u_k)=$$
$$=\min_{u_i\in P_i}\max_{u^{(i)}\in P^{(i)}}(x_*-w_*)' f(t_*,x_*,u_1,\ldots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\ldots,u_k),\quad(8)$$

где $\{t_*,w_*\}\in W_i$ ближайшая, в эвклидовой метрике, позиция к позиции $\{t_*,x_*\}$.

При построении ломанных Эйлера от некоторой реализовавшейся позиции $\{\tau_i,x_\Delta[\tau_i]\}=\{t_*,x_*\}$, которая не лежит на W_i, условие (8) направляет скорость $\dot{x}_\Delta(t_*)=f(t_*,x_*,u_1,\ldots,u_{i-1},u_i^e,u_{i+1},\ldots,u_k)$ фазового вектора в этой позиции так, чтобы обеспечить предельно большой возможный сдвиг вдоль ломаной Эйлера в направлении к сечению $W_i(t_*)$ множества W_i при самом упорном сопротивлении остальных игроков.

Пусть $\{t_0,x_0\}\in W_i$. Тогда согласно [1], стратегия U_i^e обеспечивает решение задачи сближения i-го игрока.

Теорема 1. *Пусть имеют место условия 1)-3), построен W_i — максимальный u_i-стабильный мост в игре $\left(i, K(i), \left\{M_i^{(j)}\right\}, \{\vartheta_j\}, N_i, j=1,\ldots,m\right)$, сечения которого гиперплоскостями $\Gamma_t=\{\{t,x\};t=\mathrm{const}\}$ строго выпуклы и $\{t_0,x_0\}\in W_i$. Тогда кусочно-позиционная стратегия i-го игрока $U_i^e\div u_i^e(t,t_0,x_0,\vartheta_1,...,\vartheta_m)$, экстремальная к множеству W_i, гарантирует решение задачи, устойчивое по отношению к информационным помехам.*

Доказательство. Доказательство теоремы проведем в два этапа.

Сначала получим оценку, аналогичную [4], для расстояния движений $x^{(1)}[t]$ и $x^{(2)}(t)$, где $x^{(1)}[t]$ и $x^{(2)}(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\dot{x}^{(1)}[t]=f\left(t,x^{(1)}[t],u_1^*,u_2[t],\ldots,u_k[t]\right);\quad x^{(1)}[t_0]=x_0^{(1)},$$
$$\dot{x}^{(2)}(t)=co\left[f:f=\left(t,x^{(2)}(t),u_1,u_2,\ldots,u_k\right);u_1\in P_1,u_\alpha=u_\alpha^*(\alpha\in\{2,...,k\})\right],$$
$$x^{(2)}(t_0)=x_0^{(2)}.\quad(9)$$

Здесь $u_1^*\in P_1$ и $u_\alpha^*\in P_\alpha\,(\alpha\in\{2,...,k\})$ определяются соотношениями

$$\max_{u^{(1)}\in P^{(1)}}s^{*'}f(t_0,x^*,u_1^*,u_2,\ldots,u_k)=\min_{u_1\in P_1}\max_{u^{(1)}\in P^{(1)}}s^{*'}f(t_0,x^*,u_1,u_2,\ldots,u_k),$$
$$\min_{u_1\in P_1}s^{*'}f(t_0,x^*,u_1,u_2^*,\ldots,u_k^*)=\min_{u^{(1)}\in P^{(1)}}\max_{u_1\in P_1}s^{*'}f(t_0,x^*,u_1,u_2,\ldots,u_k),\quad(10)$$

а $u_2[t], \ldots, u_k[t]$ некоторые допустимые реализации. Здесь s^* и x^* удовлетворяют следующим условиям:

$$\left\| s^* - \left(x_0^{(1)} - x_0^{(2)} \right) \right\| \leqslant \sigma(\zeta) \left\| x^* - x_0^{(1)} \right\| \leqslant \zeta, \tag{11}$$

причем $\sigma(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to 0$.

Вычислим оценку для $\rho^2(t) = \left\| x^{(1)}[t] - x^{(2)}(t) \right\|$:

$$\frac{d\rho^2(t)}{dt} = 2\left(x^{(1)}[t] - x^{(2)}(t) \right)' \left(\dot{x}^{(1)}[t] - \dot{x}^{(2)}(t) \right). \tag{12}$$

Известно [1], что $\dot{x}^{(2)}(t)$ можно представить в виде

$$\dot{x}^{(2)}(t) = \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta_\nu(t) f\left(t, x^{(2)}(t), u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^* \right),$$

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} \beta_\nu(t) = 1, \quad \beta_\nu(t) \geqslant 0, \quad u_1^{(\nu)} \in P_1.$$

Подставляя последнее в (12), получим

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho^2(t)}{dt} &= 2(x^{(1)}[t] - x^{(2)}(t))' (f(t, x^{(1)}[t], u_1^*, u_2[t], \ldots, u_k[t]) - \\
&\qquad - \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta_\nu(t) f(t, x^{(2)}(t), u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^*)) = \\
&= 2(x^{(1)}[t] - x^{(2)}(t))' \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta_\nu(t)(f(t, x^{(1)}[t], u_1^*, u_2[t], \ldots, u_k[t]) - \\
&\qquad - f(t, x^{(2)}(t), u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^*)) = \\
&= 2(x^{(1)}[t] - x^{(2)}(t))' \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta_\nu(t)(f(t, x^{(1)}[t], u_1^*, u_2[t], \ldots, u_k[t]) - \\
&\qquad - f(t, x^{(1)}[t], u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^*)) + 2(x^{(1)}[t] - x^{(2)}(t))' \times \\
&\times \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta_\nu(t)(f(t, x^{(1)}[t], u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^*) - f(t, x^{(2)}(t), u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^*)).
\end{aligned}$$

Так как функция f Липшицева, то

$$\begin{aligned}
&\left\| f\left(t, x^{(1)}[t], u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^* \right) - f\left(t, x^{(2)}(t), u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^* \right) \right\| \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \lambda_G \left\| x^{(1)}[t] - x^{(2)}(t) \right\|.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\frac{d\rho^2(t)}{dt} \leqslant \\
&\leqslant 2\lambda_G \rho^2(t) + 2\left(x^{(1)}[t] - x^{(2)}(t) \right)' \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta_\nu(t) \left(f\left(t, x^{(1)}[t], u_1^*, u_2[t], \ldots, u_k[t] \right) - \right.
\end{aligned}$$

$$-f\left(t, x^{(1)}[t], u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^*\right)\Big) = 2\lambda_G \rho^2(t) + 2\left(x_0^{(1)} - x_0^{(2)} + \left(x^{(1)}[t] - x_0^{(1)}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(x^{(2)}(t) - x_0^{(2)}\right)\right)' \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta_\nu(t) \left(f\left(t, x^{(1)}[t], u_1^*, u_2[t], \ldots, u_k[t]\right) - \right.$$
$$\left. -f\left(t, x^{(1)}[t], u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^*\right)\right).$$

Учитывая, что движения рассматриваются в ограниченной области, то $\|f(\cdot)\| \leqslant \psi$. Следовательно, $\left\|x^{(1)}[t] - x_0^{(1)}\right\| \leqslant \psi(t - t_0)$, $\left\|x^{(2)}(t) - x_0^{(2)}\right\| \leqslant \psi(t - t_0)$,

$$\frac{d\rho^2(t)}{dt} \leqslant 2\lambda_G \rho^2(t) + 8\psi^2(t - t_0) +$$
$$+ 2(x_0^{(1)} - x_0^{(2)})' \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta_\nu(t) \left(f\left(t, x^{(1)}[t], u_1^*, u_2[t], \ldots, u_k[t]\right) - \right.$$
$$\left. -f\left(t, x^{(1)}[t], u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^*\right)\right).$$

Так как f непрерывна по t и Липшицева по x, действуя аналогично [1], можем записать:

$$f\left(t, x^{(1)}[t], u_1^*, u_2[t], \ldots, u_k[t]\right) = f\left(t_0, x_0^{(1)}, u_1^*, u_2[t], \ldots, u_k[t]\right) + \Delta f^{(1)}(t),$$
$$f\left(t, x^{(1)}[t], u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^*\right) = f\left(t_0, x_0^{(1)}, u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^*\right) + \Delta f^{(2)}(t),$$

где $\left\|\Delta f^{(1)}(t)\right\| \leqslant \varphi^*(t - t_0)$ $\left\|\Delta f^{(2)}(t)\right\| \leqslant \varphi^*(t - t_0)$, $\varphi^*(t - t_0) \to 0$ при $t \to t_0$. Тогда

$$\frac{d\rho^2(t)}{dt} \leqslant 2\lambda_G \rho^2(t) + 8\psi^2(t - t_0) + 4\varphi^*(t - t_0)\|x_0^{(1)} - x_0^{(2)}\| + 2(x_0^{(1)} - x_0^{(2)})' \times$$
$$\times \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta_\nu(t)(f(t_0, x_0^{(1)}, u_1^*, u_2[t], \ldots, u_k[t]) - f(t_0, x_0^{(1)}, u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^*)). \quad (13)$$

Так как имеет место условие седловой точки для «маленькой игры», то

$$s^{*'} f(t_0, x^*, u_1^*, u_2[t], \ldots, u_k[t]) \leqslant s^{*'} f\left(t_0, x_0^{(1)}, u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^*\right). \quad (14)$$

Выполняя следующие преобразования:

$$s^{*'} f(t_0, x_0^{(1)}, u_1^*, u_2[t], \ldots, u_k[t]) = s^{*'} f(t_0, x^*, u_1^*, u_2[t], \ldots, u_k[t]) +$$
$$+ (s_* - s^*)' f(t_0, x_0^{(1)}, u_1^*, u_2[t], \ldots, u_k[t]) +$$
$$+ s^{*'}(f(t_0, x_0^{(1)}, u_1^*, u_2[t], \ldots, u_k[t]) - f(t_0, x^*, u_1^*, u_2[t], \ldots, u_k[t])),$$

$$s^{*'} f(t_0, x_0^{(1)}, u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^*) = s^{*'} f(t_0, x^*, u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^*) +$$
$$+ (s_* - s^*)' f(t_0, x_0^{(1)}, u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^*) +$$
$$+ s^{*'}(f(t_0, x_0^{(1)}, u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^*) - f(t_0, x^*, u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^*)),$$

с учетом $\|s_* - s^*\| \leqslant \sigma(\zeta)$ находим

$$s_*^{'} f\left(t_0, x_0^{(1)}, u_1^*, u_2[t], \ldots, u_k[t]\right) \leqslant$$
$$\leqslant s^{*'} f\left(t_0, x^*, u_1^*, u_2[t], \ldots, u_k[t]\right) + \psi\sigma(\zeta) + \|s^*\| \lambda_G \zeta, \quad (15)$$

$$s_*^{'} f\left(t_0, x_0^{(1)}, u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^*\right) \geqslant s^{*'} f\left(t_0, x^*, u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^*\right) - \psi\sigma(\zeta) - \|s^*\| \lambda_G \zeta. \quad (16)$$

Подставляя (15) и (16) в (14), получим

$$s_*^{'}\left(f\left(t_0, x_0^{(1)}, u_1^*, u_2[t], \ldots, u_k[t]\right) + f\left(t_0, x_0^{(1)}, u_1^{(\nu)}, u_2^* \ldots, u_k^*\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2\psi\sigma(\zeta) + 2\|s^*\| \lambda_G \zeta,$$

которое, в свою очередь подставляя в (13), находим

$$\frac{d\rho^2(t)}{dt} \leqslant 2\lambda_G \rho^2(t) + 8\psi^2(t - t_0) + 4\varphi^*(t - t_0)\rho(t_0) + 4\psi\sigma(\zeta) +$$
$$+ 4\lambda_G \zeta \|s^*\| \frac{d\rho^2(t)}{dt} \leqslant 2\lambda_G \rho^2(t) + \varphi_1(t - t_0) + \varphi_*(\zeta), \quad (17)$$

где $\varphi_1(t - t_0) = 8\psi^2(t - t_0) + 4\varphi^*(t - t_0)\rho(t_0)$, а $\varphi_*(\zeta) = 4\psi\sigma(\zeta) + 4\lambda_G \zeta \|s^*\|$, $\varphi_1(t - t_0) \to 0$ при $t \to t_0$, $\varphi_*(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to 0$.

Для решения (17) обозначим $z(t) = \rho^2(t)$. Получим

$$\dot{z}(t) \leqslant 2\lambda_G z(t) + \varphi_1(t - t_0) + \varphi_*(\zeta),$$

решение которого находим методом вариации переменного.

Обозначая $\varphi(t - t_0) = \max\limits_{\tau \in [t_0, t]} \varphi_1(t - t_0)$, получим

$$\rho^2(t) \leqslant \rho^2(t_0) e^{2\lambda_G (t - t_0)} + \frac{\varphi(t - t_0)}{2\lambda_G}\left(e^{2\lambda_G (t - t_0)} - 1\right) + \frac{\varphi_*(\zeta)}{2\lambda_G}\left(e^{2\lambda_G (t - t_0)} - 1\right).$$

Следовательно,

$$\rho^2\left(t_0 + \sum_{l=1}^{r} \delta_l\right) \leqslant \rho^2(t_0) e^{2\lambda_G \sum_{l=1}^{r} \delta_l} + \frac{\varphi_*(\zeta)}{2\lambda_G}\left(e^{2\lambda_G \sum_{l=1}^{r} \delta_l} - 1\right) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{r} \frac{\varphi(\delta_l)}{2\lambda_G}\left(e^{2\lambda_G \sum_{q=l}^{r} \delta_q} - e^{2\lambda_G \sum_{q=l+1}^{r} \delta_q}\right). \quad (18)$$

Теперь перейдем к доказательству теоремы.

Так как сечения множества W_i строго выпуклы, то для каждой позиции $\{t, x\}$ ближайшая к ней позиция $\{t, w(t, x)\} \in W_i$ будет единственная. Следовательно, $s(t, x) = x - w(t, x)$ зависит от x равномерно непрерывно, т.е. $\|s(t, x_*) - s(t, x^*)\| \leqslant \sigma(\zeta)$ при $\|x_* - x^*\| \leqslant \zeta$ для всех $t \in [t_0, \theta]$, $x_* \in R^n$, $x^* \in R^n$, причем $\sigma(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to 0$. Следовательно малые погрешности измерения вектора x влекут малые погрешности в определении вектора $s(t, x)$.

Рассмотрим интервал времени $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta_1$. Пусть i-й игрок выбрал некоторое разбиение Δ_r и $u_i^*[t] = u_i^e[\tau_r, x_\Delta^*[\tau_r]]$, $t_0 \leqslant \tau_r \leqslant t < \tau_{r+1} \leqslant \vartheta_1$, экстремальную к множеству $W_i^{(0)}$, а $u_\alpha[t]$ $(\alpha \in (i))$ — некоторые допустимые реализации. Для рассматриваемой игры $\left(i, K(i), \left\{M_i^{(j)}\right\}, \{\vartheta_j\}, N_i, j = 1, \ldots, m\right)$ по теореме 56.1

из [1] построенная ломанная Эйлера сохранится в $\varepsilon_1(\zeta,\delta)$ окрестности $W_i^{(0)}$ и к моменту времени $t=\vartheta_1$ попадет в $\varepsilon_1(\zeta,\delta)$ окрестность множества $M_i^{(1)}$. Причем согласно оценке (18) (где в качестве 1-го игрока берется i-й игрок)

$$\varepsilon_1^2(\zeta,\delta)\leqslant\rho^2(t_0)\,e^{2\lambda_G\sum_{l=1}^{i_1}\delta_l}+\frac{\varphi_*(\zeta)}{2\lambda_G}\left(e^{2\lambda_G\sum_{l=1}^{i_1}\delta_l}-1\right)+\\+\sum_{l=1}^{i_1}\frac{\varphi(\delta_l)}{2\lambda_G}\left(e^{2\lambda_G\sum_{q=l}^{i_1}\delta_q}-e^{2\lambda_G\sum_{q=l+1}^{i_1}\delta_q}\right),\quad(19)$$

т.е. $\rho\left(\{t,x_\Delta^*[t]\},W_i(t)\right)\leqslant\varepsilon_1(\zeta,\delta)$, $t_0\leqslant t\leqslant\vartheta_1$, $\rho\left(\{\vartheta_1,x_\Delta^*[\vartheta_1]\},M_i^{(1)}\right)\leqslant\varepsilon_1(\zeta,\delta)$, где $\rho(t_0)\leqslant\zeta$. Следовательно, $\varepsilon_1(\zeta,\delta)\to0$, при $\zeta,\delta\to0$. Теперь рассмотрим интервал $\vartheta_1\leqslant t\leqslant\vartheta_2$. Продолжая рассуждения, построенная ломанная Эйлера сохранится в $\varepsilon_2(\zeta,\delta)$ окрестности $W_i^{(1)}$ и к моменту времени $t=\vartheta_2$ попадет в $\varepsilon_2(\zeta,\delta)$ окрестность множества $M_i^{(2)}$, причем

$$\varepsilon_2^2(\zeta,\delta)\leqslant\varepsilon_1^2(\zeta,\delta)\,e^{2\lambda_G\sum_{l=i_1}^{i_2}\delta_l}+\frac{\varphi_*(\zeta)}{2\lambda_G}\left(e^{2\lambda_G\sum_{l=i_1}^{i_2}\delta_l}-1\right)+\\+\sum_{l=i_1}^{i_2}\frac{\varphi(\delta_l)}{2\lambda_G}\left(e^{2\lambda_G\sum_{q=l}^{i_2}\delta_q}-e^{2\lambda_G\sum_{q=l+1}^{i_2}\delta_q}\right).$$

Учитывая (19), будем иметь

$$\varepsilon_2^2(\zeta,\delta)\leqslant\rho^2(t_0)\,e^{2\lambda_G\sum_{l=1}^{i_2}\delta_l}+\frac{\varphi_*(\zeta)}{2\lambda_G}\left(e^{2\lambda_G\sum_{l=1}^{i_2}\delta_l}-1\right)+\\+\sum_{l=1}^{i_2}\frac{\varphi(\delta_l)}{2\lambda_G}\left(e^{2\lambda_G\sum_{q=l}^{i_2}\delta_q}-e^{2\lambda_G\sum_{q=l+1}^{i_2}\delta_q}\right),$$

т.е. $\rho\left(\{t,x_\Delta^*[t]\},W_i(t)\right)\leqslant\varepsilon_2(\zeta,\delta)$, $\quad\vartheta_1\leqslant t\leqslant\vartheta_2$, $\quad\rho\left(\{\vartheta_2,x_\Delta^*[\vartheta_2]\},M_i^{(2)}\right)\leqslant\varepsilon_2(\zeta,\delta)$, причем $\varepsilon_2(\zeta,\delta)\to0$ при $\zeta,\delta\to0$. Выполняя аналогичные преобразования до момента времени θ, будем иметь

$$\varepsilon_m^2(\zeta,\delta)\leqslant\varepsilon_{m-1}^2(\zeta,\delta)\,e^{2\lambda_G\sum\limits_{l=i_{m-1}}^{i_m}\delta_l}+\\+\frac{\phi_*(\zeta)}{2\lambda_G}\left(e^{2\lambda_G\sum\limits_{l=i_{m-1}}^{i_m}\delta_l}-1\right)+\sum_{l=i_{m-1}}^{i_2}\frac{\phi(\delta_l)}{2\lambda_G}\left(e^{2\lambda_G\sum\limits_{q=l}^{i_m}\delta_q}-e^{2\lambda_G\sum\limits_{q=l+1}^{i_m}\delta_q}\right)\leqslant\\\leqslant\rho^2(t_0)\,e^{2\lambda_G\sum\limits_{l=1}^{i_m}\delta_l}+\frac{\phi_*(\zeta)}{2\lambda_G}\left(e^{2\lambda_G\sum\limits_{l=1}^{i_m}\delta_l}-1\right)+\sum_{l=1}^{i_m}\frac{\phi(\delta_l)}{2\lambda_G}\left(e^{2\lambda_G\sum\limits_{q=l}^{i_m}\delta_q}-e^{2\lambda_G\sum\limits_{q=l+1}^{i_m}\delta_q}\right).$$

Обозначим $\varepsilon = \max(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m)$, $\delta = \max(\delta_1, ..., \delta_{i_m})$. Следовательно, $\varepsilon \to 0$ при $\delta \to 0$ и $\zeta \to 0$, где ζ удовлетворяет соотношению

$$\varepsilon^2(\zeta,\delta) \geqslant \rho^2(t_0)e^{2\lambda_G \sum_{l=1}^{i_m} \delta_l} + \frac{\varphi_*(\zeta)}{2\lambda_G}\left(e^{2\lambda_G \sum_{l=1}^{i_m} \delta_l} - 1\right) + \\ + \sum_{l=1}^{i_m} \frac{\varphi(\delta_l)}{2\lambda_G}\left(e^{2\lambda_G \sum_{q=l}^{i_m} \delta_q} - e^{2\lambda_G \sum_{q=l+1}^{i_m} \delta_q}\right).$$

Таким образом, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдены числа $\delta > 0$ и $\zeta > 0$ такие, что если $\tau_{r+1} - \tau_r < \delta$, а $\|x^*_\Delta[\tau_r] - x_\Delta[\tau_r]\| \leqslant \zeta$, то для ломанных Эйлера имеет место $x_\Delta[t] \in W_i^\varepsilon(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \theta)$ (т.е. $x_\Delta[t]$ сохранняется и в ε окрестности множества N_i) а $\rho\left(\{\vartheta_j, x_\Delta[\vartheta_j]\}, M_i^{(j)}\right) \leqslant \varepsilon$ $(j = 1, \ldots, m)$. Теорема доказана. $\square$

Литература

1. *Крассовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. [*Krassovskiyj N. N., Subbotin A. I.* Pozicionnihe differencialjnihe igrih. — M.: Nauka, 1974.]
2. *Габриелян М. С., Члингарян А. С.* Об устойчивости игровой задачи сближения-уклонения с несколькими целевыми множествами // Известия НАН РА. Механика. — 2004. — Т. 57, № 3. — С. 51–58. [*Gabrielyan M. S., Chlingaryan A. S.* Ob ustoyjchivosti igrovoyj zadachi sblizheniya-ukloneniya s neskoljkimi celevihmi mnozhestvami // Izvestiya NAN RA. Mekhanika. — 2004. — T. 57, No 3. — S. 51–58.]
3. *Лутманов С. В.* Об одной альтернативе в дифференциальной игре нескольких лиц // ПММ. — 1977. — Т. 41, вып. 5. — С. 813–818. [*Lutmanov S. V.* Ob odnoyj aljternative v differencialjnoyj igre neskoljkikh lic // PMM. — 1977. — T. 41, вып. 5. — S. 813–818.]
4. *Габриелян М. С., Барсегян В. Р., Симонян Т. А.* Об уклонении стохастической линейной системы при целевых множествах // Ученые записки ЕГУ. — 1996. — № 1. — С. 10–16. [*Gabrielyan M. S., Barsegyan V. R., Simonyan T. A.* Ob uklonenii stokhasticheskoyj lineyjnoyj sistemih pri celevihkh mnozhestvakh // Uchenihe zapiski EGU. — 1996. — No 1. — S. 10–16.]

UDC 519.95

On a Stability of Several-Side Differential Game with Many Goals Sets

V. R. Barseghyan, A. A. Stepanyan

Department of Mechanics
Yerevan State University
1 Alex Manoogian, Yerevan 0025, Armenia

Stability of differential game of several sides with many aim sets relative to informational noise is considered. It is proved, that strategies, which are extremal to stable bridges guarantee stable task solution relative to informational noise.

Key words and phrases: several side differential games, many aim sets, informational noise, stability.