УДК 519.6

Об устойчивом продолжении решений уравнения теплопроводности с неточно заданной границы

Е. Б. Ланеев, М. Н. Муратов, Адель Салех Абдулхак Табет

Кафедра нелинейного анализа и оптимизации
Российский университет дружбы народов
ул.Миклухо-Маклая, 6, 117198, Москва, Россия

Рассматривается задача продолжения решения уравнения теплопроводности с неточно заданной границы как некорректно поставленная задача Коши для уравнения теплопроводности с данными Коши на приближённо заданной поверхности.

Ключевые слова: некорректная задача, задача Коши, уравнение теплопроводности, метод регуляризации.

1. Введение

Продолжение поля ньютоновского потенциала давно зарекомендовало себя как эффективный инструмент исследования его плотности по косвенной информации [1]. Хорошо известна связь этой задачи с задачей Коши для уравнения Лапласа [2]. Существенной проблемой при решении этих задач является их некорректность, которая затрудняет непосредственное использование формул «точного» решения для вычислений. Эта проблема принципиально решена построением теории методов регуляризации некорректно поставленных задач [3]. Тем не менее, практические задачи требуют усложнения модели. В работах [4–6] рассматривается задача Коши для уравнения Лапласа с данными на поверхности общего вида в отличие от [1], где граница плоская. При этом решение задачи строится таким образом, что расчётные формулы сводятся к рядам Фурье, как и в [1], и вычислительные алгоритмы в основе своей сохраняют стандартную структуру, ставшую уже классической. Вместе с тем задача требовала следующего естественного обобщения постановки. В самом деле, «неплоская» поверхность в прикладных задачах сама представляет собой результат измерений, конечно, содержащих погрешность, и, таким образом, возникает задача продолжения гармонической функции с поверхности, заданной приближённо. Следует отметить, что метод построения решения задачи продолжения с произвольной поверхности предполагает вычисление нормали к поверхности, что приводит к необходимости решения частной задачи устойчивого построения нормали к поверхности, заданной приближённо. В [7–9] построено устойчивое решение как такой частной задачи, так и задачи построения продолжения решения. В данной работе эти результаты распространяются на некорректные задачи Коши для уравнения теплопроводности [10].

2. Постановка задачи

Пусть в теплопроводящем теле цилиндрической формы прямоугольного сечения имеются источники тепла плотности $\rho(x,t)$. Будем считать, что на боковых гранях цилиндра поддерживается нулевая температура, а на поверхности S поддерживается конвективный теплообмен со средой нулевой температуры U. Будем

Статья поступила в редакцию 8 ноября 2010 г.
Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ грант №09-01-00633-а).

для простоты считать, что начальная температура равна нулю. Получим смешанную краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(M,t) = a^2\Delta u(M,t) + \rho(M,t), \quad M \in D(F,\infty), 0 < t < \infty \\
&\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = h(U-u)\Big|_S, \\
&u|_{x=0,l_x} = 0,\ u|_{y=0,l_y} = 0, \\
&u|_{t=0} = 0 \\
&u \to z \to \infty
\end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{gathered}
D(F,H) = \{(x,y,z):\ 0 < x < l_x,\ 0 < y < l_y,\ F(x,y) < z < H\}, \\
S = \{(x,y,z):\ 0 < x < l_x,\ 0 < y < l_y,\ z = F(x,y)\}, \\
F \in C^2(\Pi(0)),\ \Pi(z) = \{(x,y,z): 0 < x < l_x,\ 0 < y < l_y,\ z = \text{const}\}.
\end{gathered} \tag{2}$$

Пусть теперь плотность источников ρ неизвестна и подлежит определению. Заданной (измеренной) будем считать функцию

$$u|_S = f,\ 0 < t < \infty \tag{3}$$

В области $D(F,H)\otimes(0,\infty)$, считая, что носитель плотности источников расположен в области $z > H$, получаем задачу

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(M,t) = a^2\Delta u(M,t), \quad M \in D(F,H), \quad -\infty < t < \infty \\
&u|_S = f, \\
&\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = -hf \equiv g, \\
&u|_{x=0,l_x} = 0,\ u|_{y=0,l_y} = 0, \\
&u|_{t=0} = 0 \\
&u \to z \to \infty
\end{aligned} \tag{4}$$

Функции f и g считаем непрерывными на $S\otimes(0,\infty)$. Задача (4) некорректно поставлена [5] по условиям Коши на поверхности S. В [5] приведён метод построения точного и регуляризованного решения аналогичной задачи Коши для уравнения Лапласа, устойчивого по отношению к погрешностям в функциям f и g. Основной элемент этой схемы — сведение задачи к интегральному уравнению.

3. Точное решение

Применением формул Грина приближенное решение задачи (4) строится в виде

$$\begin{aligned}
u(M,t) = v(M,t) - \Phi(M,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{q-i\infty}^{q+i\infty} e^{pt}\tilde{\Phi}_{nm}(b,p)\times \\
\times e^{\frac{\sqrt{p+\pi^2\left[\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}\right]}}{a}(z-b)} \mathrm{d}p \sin\frac{\pi n x_M}{l_x}\sin\frac{\pi m y_M}{l_y} - \Phi(M,t).
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\Phi(M,t) = \int\limits_0^\infty \int\limits_S [g(P,\tau)\varphi(M,P,t,\tau) - f(P,\tau)\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}(M,P,t,\tau)]\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau, \tag{6}$$

$$\varphi(M,P,t,\tau) = \frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(z_M-z_P)^2}{4a^2(t-\tau)}} \sum_{n,m=1}^{\infty} e^{-a^2\pi^2\left[\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}\right](t-\tau)} \times \sin\frac{\pi n x_M}{l_x}\sin\frac{\pi m y_M}{l_y}\sin\frac{\pi n x_P}{l_x}\sin\frac{\pi m y_P}{l_y}.$$

Здесь $\tilde{\Phi}_{nm}(b,p)$ — образ коэффициентов Фурье функции $\Phi(M,t)|_{M\in\Pi(b)}$:

$$\tilde{\Phi}_{nm}(b,p) = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}te^{-pt}\frac{4}{l_x l_y}\int\limits_0^{l_x}\mathrm{d}x\int\limits_0^{l_y}\mathrm{d}y\ \ \Phi(x,y,b,t)\sin\frac{\pi n x}{l_x}\sin\frac{\pi m y}{l_y}.$$

Перепишем поверхностный интеграл в (6) в виде интеграла по прямоугольнику $\Pi(0)$, используя нормаль к поверхности S вида (2):

$$\Phi(M,t) = \int\limits_0^\infty \int\limits_{\Pi(0)} \Big[g(P,\tau)\varphi(M,P,t,\tau) - f(P,\tau)(\nabla_P\varphi(M,P,t,\tau),\mathbf{n}(P))\Big]n_1(P)\mathrm{d}x_P\mathrm{d}y_P\mathrm{d}\tau, \tag{7}$$

где

$$\mathbf{n}_1 = \mathrm{grad}\ (F(x,y)-z) = \left\{F'_x, F'_y, -1\right\} = \mathbf{i}F'_x + \mathbf{j}F'_y - \mathbf{k}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}_1}{n_1}. \tag{8}$$

Отсюда получаем

$$\Phi(M,t) = \int\limits_0^\infty \int\limits_{\Pi(0)} \Big[g(P,\tau)\varphi(M,P,t,\tau)n_1(P) - f(P,\tau)(\nabla_P\varphi(M,P,t,\tau),\mathbf{n}_1(P))\Big]\mathrm{d}x_P\mathrm{d}y_P\mathrm{d}\tau. \tag{9}$$

Таким образом, для вычисления функции Φ, на основе которой формируется решение (5) задачи (4), необходимо вычислить нормаль $\mathbf{n}_1$ вида (8) к поверхности S.

4. Приближенное решение

В том случае, когда функция F, определяющая поверхность S, известна с некоторой погрешностью, задача вычисления градиента этой функции — некорректно поставлена. Для получения её устойчивого решения воспользуемся постановкой [7–9], то есть рассмотрим задачу вычисления нормали к поверхности (градиента приближённо заданной функции) как задачу восстановления значений неограниченного оператора [11].

Будем считать, что вместо точной функции F задана функция F^μ такая, что

$$\|F^\mu - F\|_{L_2(\Pi(0))} \leqslant \mu. \tag{10}$$

В качестве приближения к функции ∇F, вычисляемого по известной функции F^μ, связанной с F условием (10), будем рассматривать градиент от экстремали функционала

$$N^\beta[W] = \|W - F^\mu\|^2_{L_2(\Pi(0))} + \beta \, \|\nabla W\|^2_{L_2(\Pi(0))} \, . \tag{11}$$

При этом будем рассматривать такие поверхности S, для которых $F|_{x=0,l_x} = F|_{y=0,l_y} = 0$. Это условие, в частности, имеет место в случае, когда поверхность S можно рассматривать как «возмущение» плоскости $z = 0$.

Как и в [8, 9], в качестве приближенного значения градиента функции F^μ будем рассматривать вектор-функцию

$$\nabla_{xy} W^\mu_\beta(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\tilde{F}^\mu_{nm}}{1 + \beta \left[\left(\frac{\pi n}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_y}\right)^2 \right]} \times$$
$$\times \left(\mathbf{i} \frac{\pi n}{l_x} \cos \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} + \mathbf{j} \frac{\pi m}{l_y} \cos \frac{\pi m y}{l_y} \sin \frac{\pi n x}{l_x} \right). \tag{12}$$

Ряд (12) равномерно сходится на $\Pi(0)$.

В [8, 9] показано, что если $F \in C^2$ и $\beta(\mu) = \dfrac{\mu}{\|\,\Delta F\,\|}$, то для приближенного вектора нормали

$$\mathbf{n}^\mu_1 = \mathbf{n}^\mu_{1,\beta(\mu)} = \nabla_{xy} W^\mu_{\beta(\mu)} - \mathbf{k}, \tag{13}$$

имеет место оценка

$$\left\| \, \mathbf{n}^\mu_1 - \mathbf{n}_1 \, \right\|_{L_2(\Pi(0))} \leq \sqrt{\|\,\Delta F\,\| \, \mu} \xrightarrow[\mu \to 0]{} 0. \tag{14}$$

Пусть теперь функции f и g заданы приближённо, а именно: пусть заданы функции f^δ и g^δ, такие, что

$$\max_t \left\| \, f^\delta - f \, \right\|_{L_2(\Pi(0))} \leq \delta, \quad \max_t \left\| \, g^\delta - g \, \right\|_{L_2(\Pi(0))} \leq \delta. \tag{15}$$

Тогда функция Φ вида (9) при точно заданной поверхности S может быть вычислена с некоторой погрешностью как функция Φ^δ:

$$\Phi^\delta(M, t) = \int\limits_0^\infty \int\limits_{\Pi(0)} \Big[g^\delta(P, \tau) \varphi(M, P, t, \tau) n_1(P) -$$
$$- f^\delta(P, \tau) (\nabla_P \varphi(M, P, t, \tau), \mathbf{n}_1(P)) \Big] \mathrm{d}x_P \mathrm{d}y_P \mathrm{d}\tau, \quad P \in S. \tag{16}$$

При приближенном задании поверхности S, определяемом условием (10), функция Φ может быть вычислена приближённо по формуле (16) с использованием (13):

$$\Phi^{\delta,\mu}(M, t) = \int\limits_0^\infty \int\limits_{\Pi(0)} \Big[g^\delta(P, \tau) \varphi(M, P, t, \tau) n^\mu_1(P) -$$
$$- f^\delta(P, \tau) \left(\nabla_P \varphi(M, P, t, \tau), \mathbf{n}^\mu_1(P) \right) \Big] \mathrm{d}x_P \mathrm{d}y_P \mathrm{d}\tau, \quad P \in S. \tag{17}$$

Оценим разность, считая, что $t \in (0, T)$

$$\left|\Phi^{\delta,\mu}(M,t)-\Phi(M,t)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\Phi^{\delta,\mu}(M,t)-\Phi^{\delta}(M,t)\right| + \left|\Phi^{\delta}(M,t)-\Phi(M,t)\right|, \quad M\in\Pi(b), \quad (18)$$

где функции $\Phi^{\delta\mu}$, Φ^{δ}, Φ — функции вида (17), (16), (9) соответственно. Оценим первую разность в (18), используя неравенство Коши–Буняковского:

$$\left|\Phi^{\delta,\mu}(M,t)-\Phi^{\delta}(M,t)\right| = \left|\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\Pi(0)}\Big[f^{\delta}(P,\tau)(\mathbf{n}_1^{\mu}(P)-\mathbf{n}_1(P),\nabla_P\varphi(M,P,t,\tau))-\right.$$
$$\left.-\,g^{\delta}(P,\tau)\varphi(M,P,t,\tau)(n_1^{\mu}(P)-n_1(P))\Big]_{P\in S}\mathrm{d}x_P\mathrm{d}y_P\mathrm{d}\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^{t}\int\limits_{\Pi(0)}\Big[\left|f^{\delta}(P,\tau)\right|\cdot\left|\mathbf{n}_1^{\mu}(P)-\mathbf{n}_1(P)\right|\cdot\left|\nabla_P\varphi(M,P,t,\tau)\right|+$$
$$+\left|g^{\delta}(P,\tau)\right|\cdot\left|\varphi(M,P,t,\tau)\right|\cdot\left|n_1^{\mu}(P)-n_1(P)\right|\Big]_{P\in S}\mathrm{d}x_P\mathrm{d}y_P\mathrm{d}\tau \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^{t}\Bigg(\max_{\substack{M\in\Pi(a)\\ P\in S}}\left|\nabla_P\varphi(M,P,t,\tau)\right|\cdot\left\|f^{\delta}\right\|_{L_2(\Pi(0))}+$$
$$+\max_{\substack{M\in\Pi(a)\\ P\in S}}\left|\varphi(M,P,t,\tau)\right|\cdot\left\|g^{\delta}\right\|_{L_2(\Pi(0))}\Bigg)\mathrm{d}\tau\left\|\mathbf{n}_1^{\mu}-\mathbf{n}_1\right\|_{L_2(\Pi(0))} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^{t}\Bigg(\max_{\substack{M\in\Pi(a)\\ P\in S}}\left|\nabla_P\varphi(M,P,t,\tau)\right|\left(\left\|f\right\|_{L_2(\Pi(0))}+\delta\right)+$$
$$+\max_{\substack{M\in\Pi(a)\\ P\in S}}\left|\varphi(M,P,t,\tau)\right|\left(\left\|g\right\|_{L_2(\Pi(0))}+\delta\right)\Bigg)\mathrm{d}\tau\left\|\mathbf{n}_1^{\mu}-\mathbf{n}_1\right\|_{L_2(\Pi(0))}.$$

Так как нас интересует поведение регуляризованного решения задачи (1) при $\delta\to 0$, то можно считать, что $\delta\leqslant\delta_0$, и, таким образом, с учётом (14)

$$\left|\Phi^{\delta,\mu}(M,t)-\Phi^{\delta}(M,t)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{Const}\,\|\mathbf{n}_1^{\mu}-\mathbf{n}_1\|_{L_2(\Pi(0))}\leqslant C_1\sqrt{\mu}, \quad M\in\Pi(b), \quad 0<t<T. \quad (19)$$

Для оценки второй разности получаем — так же, как в [5]:

$$\left|\Phi^{\delta}(M,t)-\Phi(M,t)\right| = \left|\int\limits_0^{t}\int\limits_{\Pi(0)}\Big[(f^{\delta}(P,\tau)-f(P,\tau))(\mathbf{n}_1(P),\nabla_P\varphi(M,P,t,\tau))-\right.$$
$$\left.-\,(g^{\delta}(P,\tau)-g(P,\tau))\varphi(M,P,t,\tau)n_1(P)\Big]_{P\in S}\mathrm{d}x_P\mathrm{d}y_P\mathrm{d}\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{Const}_{\mathbf{n_1}}\int\limits_0^{t}\max_{M\in\Pi(a)}\|\nabla\varphi(M,t,\tau)\|_{L_2(S)}\cdot\left\|f^{\delta}-f\right\|_{L_2(\Pi(0))}\mathrm{d}\tau+$$

$$+\,\mathrm{Const}^1_{\mathbf{n_1}}\int\limits_0^t \max_{M\in\Pi(a)}\|\varphi(M,t,\tau)\|_{L_2(S)}\cdot\left\|g^\delta-g\right\|_{L_2(\Pi(0))}\mathrm{d}\tau\leqslant C_2\delta,\quad(20)$$

Из (19) и (20) для оценки (18) получаем:

$$\max_{M\in\Pi(a)}\left|\Phi^{\delta,\mu}(M,t)-\Phi(M,t)\right|\leqslant C_1\sqrt{\mu}+C_2\delta=\Delta(\mu,\delta)\xrightarrow[\substack{\mu\to0\\ \delta\to0}]{}0.\quad(21)$$

Таким образом, функция Φ известна с некоторой погрешностью Δ, имеющей структуру (21). В соответствии со схемой [5] устойчивое приближенное решение задачи (1) строится введением регуляризирующего множителя [11] в (5) и может быть получено в виде

$$u^{\delta,\mu}_\alpha(M,t)=v^{\delta,\mu}_\alpha(M,t)-\Phi^{\delta,\mu}(M,t),\quad M\in D(F,H),\quad 0<t<T,\quad(22)$$

где $\Phi^{\delta,\mu}$ — функция вида (17), а $v^{\mu,\delta}_\alpha$ имеет вид:

$$v^{\mu,\delta}_\alpha(M,t)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{q-i\infty}^{q+i\infty}e^{pt}\frac{\tilde{\Phi}^{\mu,\delta}_{nm}(b,p)}{1+\alpha\exp(2\dfrac{\sqrt{p+\pi^2[\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}]}}{a}(b-H))}\times$$
$$\times\, e^{\frac{\sqrt{p+\pi^2[\frac{n^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}]}}{a}(z-b)}\mathrm{d}p\sin\frac{\pi n x_M}{l_x}\sin\frac{\pi m y_M}{l_y}.\quad(23)$$

Здесь $\tilde{\Phi}^{\mu,\delta}_{nm}(b)$ — коэффициенты Фурье функции $\Phi^{\mu,\delta}(M,t)|_{M\in\Pi(b)}$:

$$\tilde{\Phi}^{\mu,\delta}_{nm}(b,p)=\int\limits_0^\infty\mathrm{d}t e^{-pt}\frac{4}{l_xl_y}\int\limits_0^{l_x}\mathrm{d}x\int\limits_0^{l_y}\mathrm{d}y\Phi^{\mu,\delta}(x,y,b,t)\sin\frac{\pi nx}{l_x}\sin\frac{\pi my}{l_y},\quad(24)$$

а α — параметр регуляризации. В соответствии с обозначениями, введёнными выше, величина b выбирается так, чтобы $b<\min\limits_{(x,y)\in\Pi(0)}F(x,y)$.

Формулируя теорему [10] для погрешности (21) в задании функции Φ, получим следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть решение задачи (4) существует в области* $D(F,H)\otimes(0,\infty)$, $\alpha=\alpha(\Delta)$, $\alpha(\Delta)\to0$, $\Delta/\sqrt{\alpha(\Delta)}\to0$ *при* $\Delta\to0$. *Тогда функция* $u_{\alpha(\Delta)}$ *вида (5), где* $\Delta=C_1\sqrt{\mu}+C_2\delta$, *равномерно сходится к точному решению задачи при* $\delta\to0$, $\mu\to0$ *в области* $D(F+\varepsilon,H-\varepsilon)\otimes(0,\infty)$, *где* $\varepsilon>0$ *— некоторое фиксированное сколь угодно малое число.*

5. Заключение

Приближенное решение вида (22) может быть использовано для построения вычислительных алгоритмов решения задачи (4), или продолжения нестационарного температурного поля с поверхности, заданной приближённо. Отметим, что продолжение осуществляется в область $z>H$, где источники (неизвестной плотности) отсутствуют и уравнение теплопроводности однородно. Получив решение (температурное поле) продолжением в область, непосредственно примыкающую к источникам, можно получить более или менее достоверную информацию об их плотности. Как правило, эта информация формируется особенностями продолженного решения. Следует иметь в виду, что в прикладных задачах измеряемая функция $f = u|_S$ представляет собой тепловизионный снимок, уже содержащий «изображение» плотности источников. Предполагается (и это подтверждается вычислительным экспериментом), что продолженное поле даёт уточнённое изображение. Продолжение нестационарного температурного поля даёт уточнение эволюции изображения плотности источников во времени.

Литература

1. О продолжении потенциала в сторону возмущающих масс на основе метода регуляризации / А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, О. К. Литвиненко, В. Р. Мелихов // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1968. — Т. 1. — С. 38–40. [O prodolzhenii potenciala v storonu vozmuthayuthikh mass na osnove metoda regulyarizacii / A. N. Tikhonov, V. B. Glasko, O. K. Litvinenko, V. R. Melikhov // Izv. AN SSSR. Fizika Zemli. — 1968. — T. 1. — S. 38–40.]
2. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. — Новосибирск: СО АН СССР, 1962. — 92 с. [*Lavrentjev M. M.* O nekotorihkh nekorrektnihkh zadachakh matematicheskoyj fiziki. — Novosibirsk: SO AN SSSR, 1962. — 92 s.]
3. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 288 с. [*Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya.* Metodih resheniya nekorrektnihkh zadach. — M.: Nauka, 1979. — 288 s.]
4. *Ланеев Е. Б.* О задаче Коши для уравнения Лапласа в неодносвязной области // Статистическая и квантовая физика и ее приложения. Сборник научных трудов. — М.: Изд-во УДН, 1968. — С. 49–56. [*Laneev E. B.* O zadache Koshi dlya uravneniya Laplasa v neodnosvyaznoyj oblasti // Statisticheskaya i kvantovaya fizika i ee prilozheniya. Sbornik nauchnihkh trudov. — M.: Izd-vo UDN, 1968. — S. 49–56.]
5. *Ланеев Е. Б., Бхувана Васудеван.* Об устойчивом решении одной смешанной задачи для уравнения Лапласа // Вестник РУДН. Серия «Прикладная математика и информатика». — 1999. — Т. 1. — С. 128–133. [*Laneev E. B., Bkhuvana Vasudevan.* Ob ustoyjchivom reshenii odnoyj smeshannoyj zadachi dlya uravneniya Laplasa // Vestnik RUDN. Seriya «Prikladnaya matematika i informatika». — 1999. — T. 1. — S. 128–133.]
6. *Ланеев Е. Б.* О некоторых постановках задачи продолжения потенциального поля // Вестник РУДН. Серия «Физика». — 2000. — Т. 8(1). — С. 21–28. [*Laneev E. B.* O nekotorihkh postanovkakh zadachi prodolzheniya potencialjnogo polya // Vestnik RUDN. Seriya «Fizika». — 2000. — T. 8(1). — S. 21–28.]
7. *Ланеев Е. Б.* О регуляризации некоторых операций векторного анализа // Методы функционального анализа в математической физике. Сборник научных трудов. — М.: Изд-во УДН, 1987. — С. 101–106. [*Laneev E. B.* O regulyarizacii nekotorihkh operaciyj vektornogo analiza // Metodih funkcionaljnogo analiza v matematicheskoyj fizike. Sbornik nauchnihkh trudov. — M.: Izd-vo UDN, 1987. — S. 101–106.]
8. *Ланеев Е. Б., Муратов М. Н.* Об устойчивом решении одной смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа с приближенно заданной границей // Вестник РУДН. Серия «Математика». — 2002. — Т. 9(1). — С. 102–111. [*Laneev E. B., Muratov M. N.* Ob ustoyjchivom reshenii odnoyj smeshannoyj kraevoyj zadachi dlya uravneniya Laplasa s priblizhenno zadannoyj graniceyj // Vestnik RUDN. Seriya «Matematika». — 2002. — T. 9(1). — S. 102–111.]
9. *Ланеев Е. Б., Муратов М. Н.* Об одной обратной задаче к краевой задаче для уравнения Лапласа с условием третьего рода на неточно заданной границе // Вестник РУДН. Серия «Математика». — 2003. — Т. 10(1). — С. 100–110. [*Laneev E. B., Muratov M. N.* Ob odnoyj obratnoyj zadache k kraevoyj zadache

dlya uravneniya Laplasa s usloviem tretjego roda na netochno zadannoyj granice // Vestnik RUDN. Seriya «Matematika». — 2003. — T. 10(1). — S. 100–110.]

10. *Ланеев Е. Б., Муратов М. Н., Табет Адель Салех Абдулхак.* Задача продолжения нестационарного температурного поля с произвольной поверхности // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2010. — Т. 2(1). — С. 109–111. [*Laneev E. B., Muratov M. N., Tabet Adelj Salekh Abdulkhak.* Zadacha prodolzheniya nestacionarnogo temperaturnogo polya s proizvoljnoyj poverkhnosti // Vestnik RUDN. Seriya «Matematika. Informatika. Fizika». — 2010. — T. 2(1). — S. 109–111.]
11. *Морозов В. А.* Об одном устойчивом методе вычисления неограниченных операторов // ДАН СССР. — 1969. — Т. 185(2). — С. 267–270. [*Morozov V. A.* Ob odnom ustoyjchivom metode vihchisleniya neogranichennihkh operatorov // DAN SSSR. — 1969. — T. 185(2). — S. 267–270.]

UDC 519.6

On Stable Continuation of the Heat Conduction Equation Solution from Approximately Defined Boundary

E. B. Laneev, M. N. Mouratov, Adel Saleh Abdulhak Tabet

Department of Differential Equations and Functional Analysis
Peoples' Friendship University of Russia
Miklykho-Maklaya str., 6, 117198, Moscow, Russia

A problem of stable continuation of the heat conduction equation solution is considered. The continuation of the solution is performed from approximately defined boundary. The whole problem is treated as an incorrect Cauchy problem for the heat conduction equation with Cauchy data given on an arbitrary approximately defined surface.

Key words and phrases: incorrect problem, Cauchy problem, heat conduction equation, regularization.