Математика

УДК 517.51

Дискретные неравенства типа Харди с переменными пределами суммирования. II

Альхалил Айман

*Кафедра математического анализа и теории функций
Российский университет дружбы народов
ул. Маклухо-Маклая, д.6, Москва, 117198, Россия*

В работе изучается задача о нахождении необходимых и достаточных условий выполнения дискретных неравенств типа Харди с переменными пределами суммирования в пространствах последовательностей.

Ключевые слова: дискретные неравенства типа Харди.

1. Введение

Пусть $0 < p,\ q \leqslant +\infty$. В работе рассматривается задача о нахождении необходимых и достаточных условий выполнения дискретных неравенств типа Харди вида

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n)\left(\sum_{a(n)\leqslant k\leqslant b(n)} f(k)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(\sum_{n=1}^{\infty} f^p(n)w(n)\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{для всех } f(n)\geqslant 0, \quad (1)$$

где $v(n)$, $w(n)$ — положительные числа и $a(n)$, $b(n)$ — возрастающие последовательности натуральных чисел.

Константу $C \geqslant 0$ в неравенстве (1) мы считаем выбранной наименьшей из возможных.

В статье [1] нами охарактеризовано дискретное неравенство типа Харди с переменным верхним пределом

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n)\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant b(n)} f(k)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(\sum_{n=1}^{\infty} f^p(n)w(n)\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{для всех } f(n)\geqslant 0, \quad (2)$$

при $0 < p, q \leqslant +\infty$, где $v(n), w(n)$ — положительные числа и $b(n)$ — возрастающая последовательность натуральных чисел.

Аналогичным образом доказывается теорема для дискретного неравенства Харди с переменным нижним пределом

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n)\left(\sum_{a(n)\leqslant k\leqslant \infty} f(k)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(\sum_{n=1}^{\infty} f^p(n)w(n)\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{для всех } f(n)\geqslant 0, \quad (3)$$

при $0 < p, q \leqslant +\infty$, где $v(n), w(n)$ — положительные числа и $a(n)$ — возрастающая последовательность натуральных чисел (см. ниже теорему 1).

Кроме этого, имеются естественные аналоги обоих утверждений для открытых и полуоткрытых промежутков суммирования (см. ниже Следствие 1). Пусть

Статья поступила в редакцию 6 октября 2010 г.

$a(n)$ и $b(n)$ две возрастающие последовательности, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & a(n) \text{ и } b(n) \text{ строго возрастают;} \\ \text{(ii)} & a(1) = b(1) = 1 \text{ и } a(n) < b(n) \text{ для любого } n > 1. \end{array} \tag{4}$$

Целью настоящей работы является изучение неравенства (1) при $0 < p \leqslant q < +\infty$. Аналогичная задача для непрерывных операторов изучена в серии работ В.Д. Степанова и Е.П. Ушаковой [2–4]. Необходимую информацию для случая $a(n) \equiv 1, b(n) = n$ о неравенстве (1) можно найти в монографиях [5, 6], а также в работах Г. Беннетта [7–9], М.Ш. Бравермана и В.Д. Степанова [10], М.Л. Гольдмана [11], С.А. Окпоти [12] и других авторов.

Мы используем ряд стандартных обозначений. Соотношения $A \ll B$ и $B \gg A$ означают $A \leqslant cB$ или $B \geqslant cA$ с константой c, зависящей только от p и q, $A \approx B$ равносильно $A \ll B \ll A$ или $A = cB$. Символ $\mathbb{N}$ обозначает множество всех натуральных чисел, χ_E суть характеристическая функция (индикатор) множества $E \subset \mathbb{N}$. Сопряжённый показатель p' определяется из уравнений $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, при $p \neq 1, p \neq \infty$, $p' = 1$ при $p = \infty$ и $p' = \infty$ при $p = 1$, а также мы полагаем $r = \dfrac{qp}{p-q}$ при $0 < q < p < \infty$. Знаки := и =: используются для определения новых величин, а также символ $\square$ для отметки конца доказательства.

2. Предварительные результаты

Аналогично [1, теорема 1] доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $a(n) \geqslant 1$ возрастающая последовательность натуральных чисел. Если $1 < p \leqslant q < +\infty$, то неравенство*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left(\sum_{a(n) \leqslant k < \infty} f(k)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\sum_{n=1}^{\infty} f^p(n) w(n)\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{для всех } f(n) \geqslant 0, \tag{5}$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$A := \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} v(k)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=a(n)}^{\infty} w(k)^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Более того, справедливо соотношение $C \approx A$.

Если $0 < p \leqslant q < \infty$, $0 < p \leqslant 1$, то неравенство (5) *выполнено тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{A} := \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} v(k)\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{k \geqslant a(n)} w^{\frac{-1}{p}}(k) < \infty.$$

Более того, справедливо соотношение $C \approx \mathcal{A}$.

Если $1 < q < p < +\infty$, то неравенство (5) *выполнено тогда и только тогда, когда*

$$B := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{1 \leqslant n \leqslant a^{-1}(k)} v(n)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=k}^{\infty} w(i)^{1-p'}\right)^{\frac{1}{q'}}\right]^r w^{1-p'}(k)\right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

где $a^{-1}(k) := \inf\{l : a(l) \geqslant k\}$. *Более того, справедливо соотношение* $C \approx B$.

Если $0 < q < p, 1 < p < +\infty$, *то неравенство* (5) *выполнено тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{B} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} v(k) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=a(n)}^{\infty} w(k)^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right]^{r} v(n) \right)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

Более того, справедливо соотношение $C \approx \mathcal{B}$.

Если $0 < q < p \leqslant 1$, *то неравенство* (5) *выполнено тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{B} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left(\sum_{k=1}^{n} v(k) \right)^{\frac{r}{p}} \sup_{k \geqslant a(n)} w^{\frac{-r}{p}}(k) \right)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

Более того, справедливо соотношение $C \approx \mathbf{B}$.

Из теоремы 1 и [1, теорема 1] получаем следствия.

Следствие 1. Пусть $1 < p \leqslant q < +\infty$, натуральные числа $l, m, L \in \mathbb{N}$ таковы, что $l < m, L \leqslant b(l)$, где $b : (l, m] \to (L, b(m)] \subset \mathbb{N}$ строго возрастающая целочисленная функция. Тогда неравенство

$$\left(\sum_{n>l}^{m} v(n) \left(\sum_{i>L}^{b(n)} f(i) \right)^{q} \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\sum_{i>L}^{b(m)} f^{p}(i) w(i) \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{для всех } f(i) \geqslant 0, \tag{6}$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$A_{[l,m]} := \sup_{n \in (l,m]} \left(\sum_{k=n}^{m} v(k) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i>L}^{b(n)} w(i)^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Более того, справедливо соотношение $C \approx A_{[l,m]}$.

Следствие 2. Пусть $1 < p \leqslant q < +\infty$, натуральные числа $l, m, M \in \mathbb{N}$ таковы, что $l < m, a(m) \leqslant M$, где $a : [l, m] \to [a(l), a(m)] \subset \mathbb{N}$ строго возрастающая целочисленная функция. Тогда неравенство

$$\left(\sum_{n=l}^{m} v(n) \left(\sum_{i=a(n)}^{M} f(i) \right)^{q} \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\sum_{i=a(l)}^{M} f^{p}(i) w(i) \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{для всех } f(i) \geqslant slant0, \tag{7}$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$A^{*}_{[l,m]} := \sup_{n \in [l,m]} \left(\sum_{k=l}^{n} v(k) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=a(n)}^{M} w(i)^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Более того, справедливо соотношение $C \approx A^{*}_{[l,m]}$.

Следствие 3. Пусть $0 < p \leqslant q < +\infty$, $0 < p \leqslant 1$ натуральные числа $l, m, L \in \mathbb{N}$ таковы, что $l < m$, $L \leqslant b(l)$, где $b : (l, m] \to (L, b(m)] \subset \mathbb{N}$ строго возрастающая целочисленная функция. Тогда неравенство (6) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{A}_{[l,m]} := \sup_{n\in(l,m]} \left(\sum_{k=n}^{m} v(k)\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{L<i\leqslant b(n)} w^{-1/p}(i) < \infty.$$

Более того, справедливо соотношение $C \approx \mathcal{A}_{[l,m]}$.

Следствие 4. Пусть $0 < p \leqslant q < +\infty, 0 < p \leqslant 1$ натуральные числа $l, m, M \in \mathbb{N}$ таковы, что $l < m$, $a(m) \leqslant M$, где $a : [l, m] \to [a(l), a(m)] \subset \mathbb{N}$ строго возрастающая целочисленная функция. Тогда неравенство (7) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{A}^*_{[l,m]} := \sup_{n\in[l,m]} \left(\sum_{k=l}^{n} v(k)\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{a(n)\leqslant i\leqslant M} w^{-1/p}(i) < \infty.$$

Более того, справедливо соотношение $C \approx \mathcal{A}^*_{[l,m]}$.

3. Блочно–диагональный метод

Определение. Пусть $U = \bigsqcup_k U_k$, $V = \bigsqcup_k V_k$ и $P = \sum_k P_k$, где $P_k : L^p(U_k) \to L^q(V_k)$. Тогда $Pf(i) = \sum_k \chi_{V_k}(i) P_k(\chi_{U_k} f)(i)$ называется *блочно-диагональным оператором.*

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $U = \bigsqcup_k U_k$ и $V = \bigsqcup_k V_k$ и $P = \sum_k P_k$ блочно-диагональный оператор, где $P_k : L^p(U_k) \to L^q(V_k)$. Тогда если $0 < p \leqslant q < \infty$, то*

$$\|P\|_{L^p(U)\to L^q(V)} = \sup_k \|P_k\|_{L^p(U_k)\to L^q(V_k)}, \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{supp} f \subseteq U_k$, тогда следует, что $P_k f(i) := \chi_{V_k}(i) P f(i)$. Имеем

$$\|Pf\|_q = \left(\sum_k \|P_k f\|_q^q\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant \|P_k f\|_q$$

Далее,

$$\|P\| = \sup_{f\neq 0} \frac{\|Pf\|_q}{\|f\|_p} \geqslant \sup_{f\neq 0, \operatorname{supp} f\subseteq U_k} \frac{\|P_k f\|_{L^q(V_k)}}{\|f\|_{L^p(U_k)}} = \|P_k\|,$$

Отсюда следует, что

$$\|P\| \geqslant \sup_k \|P_k\|.$$

Обратно,

$$\|Pf\|_q^q = \sum_{i\in V} (Pf(i))^q = \sum_k \sum_{i\in V_k} (Pf(i))^q = \sum_k \sum_{i\in V_k} (P(\chi_{U_k} f)(i))^q \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \|P_k\|^q \|f\chi_{U_k}\|_p^q \leqslant \sup_k \|P_k\|^q \sum_k \|f\chi_{U_k}\|_p^q.$$

Применяя неравенство Йенсена, получаем

$$\leqslant \sup_k \|P_k\|^q \left(\sum_k \sum_{i\in U_k} f^p(i)\right)^{\frac{q}{p}} = \sup_k \|P_k\|^q \left(\sum_{i\in U} f^p(i)\right)^{\frac{q}{p}} = \sup_k \|P_k\|^q \|f\|_p^q.$$

Следовательно,

$$\|T\| \leqslant \sup_k \|P_k\|.$$

Для заданных последовательностей $a(n)$ и $b(n)$, удовлетворяющих (4), выберем последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{n'_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ такие, что $n_1 = 2$ и при $n_k \leqslant n \leqslant n'_k$

$$n'_k : a(n'_k) \leqslant b(n) \leqslant b(n_k) < a(n'_k + 1); \quad n_{k+1} := n'_k + 1. \tag{9}$$

Разбивая $\mathbb{N}$ точками последовательности $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{n'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, получаем представление оператора H вида

$$Hf(n) := \sum_{a(n)\leqslant i\leqslant b(n)} f(i) \tag{10}$$

в виде суммы $H = T + S$ блочно-диагональных операторов T и S таких, что

$$T = \sum_{k\in\mathbb{N}} T_k, \quad S = \sum_{k\in\mathbb{N}} S_k, \tag{11}$$

где

$$T_k f(n) := \sum_{i=a(n)}^{b(n_k)} f(i), \quad n \in [n_k, n'_k], \tag{12}$$

$$S_k f(n) := \sum_{i>b(n_k)}^{b(n)} f(i), \quad n \in (n_k, n'_k]. \tag{13}$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 2. *При* $1 < p \leqslant q < \infty$

$$\|T_k\|_{\ell^p_{[n_k,n'_k]} \to \ell^q_{[a(n_k),b(n_k)]}} \approx \sup_{n_k\leqslant n\leqslant n'_k} \left(\sum_{k=n_k}^{n} v(k)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=a(n)}^{a(n'_k)} w(i)^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{14}$$

Лемма 3. *При* $1 < p \leqslant q < \infty$

$$\|S_k\|_{\ell^p_{(n_k,n'_k]} \to \ell^q_{(b(n_k),b(n'_k))}} \approx \sup_{n_k< n\leqslant n'_k} \left(\sum_{k=n}^{n'_k} v(k)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i>b(n_k)}^{b(n)} w(i)^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{15}$$

Лемма 4. *При* $0 < p \leqslant q < \infty, 0 < p \leqslant 1$

$$\|T_k\|_{\ell^p_{[n_k,n'_k]} \to \ell^q_{[a(n_k),b(n_k)]}} \approx \sup_{n_k\leqslant n\leqslant n'_k} \left(\sum_{k=n_k}^{n} v(k)\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{a(n)\leqslant i\leqslant a(n'_k)} w(i)^{1-p'}. \tag{16}$$

Лемма 5. *При* $1 < p \leqslant q < \infty, 0 < p \leqslant 1$

$$\|S_k\|_{\ell^p_{(n_k,n'_k]} \to \ell^q_{(b(n_k),b(n'_k)]}} \approx \sup_{n_k < n \leqslant n'_k} \left(\sum_{k=n}^{n'_k} v(k) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{b(n_k) < i \leqslant b(n)} w(i)^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (17)$$

Доказательство. Леммы 2–5 вытекают из соответствующих следствий 1–4.□

4. Основные результаты

Теорема 2. *Пусть* $1 < p \leqslant q < +\infty$. *Тогда неравенство*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left(\sum_{a(n) \leqslant k \leqslant b(n)} f(k) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\sum_{n=1}^{\infty} f^p(n) w(n) \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{для всех } f(n) \geqslant 0 \quad (18)$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$A := \sup_m \sup_{m \leqslant n \leqslant a^{-1}(b(m))} A(m,n) < \infty,$$

где

$$A(m,n) := \left(\sum_{k=m}^{n} v(k) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{a(n)}^{b(m)} w(k)^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Более того, справедливо соотношение $C \approx A$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть выполнено неравенство (18) и $n, m \in \mathbb{N}$ такие произвольные натуральные числа, что $m \leqslant n \leqslant a^{-1}(b(m))$. Определим тестовую последовательность

$$f(k) = w(k)^{1-p'} \chi_{[a(n),b(m)]}(k) \quad (19)$$

Подставляя эту последовательность в (18), находим

$$C \left(\sum_{k=a(n)}^{b(m)} w^{1-p'}(k) \right)^{\frac{1}{p}} = C \left(\sum_{k=1}^{\infty} f^p(k) w(k) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum_{l=1}^{\infty} v(l) \left(\sum_{a(l) \leqslant k \leqslant b(l)} f(k) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \geqslant \left(\sum_{l=m}^{n} v(l) \left(\sum_{k=a(l)}^{b(l)} f(k) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{l=m}^{n} v(l) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=a(n)}^{b(m)} w^{1-p'}(k) \right).$$

Следовательно,

$$C \geqslant \left(\sum_{k=m}^{n} v(k) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=a(n)}^{b(m)} w^{1-p'}(k) \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Отсюда следует $C \geqslant A$.

Достаточность. Пусть $A < +\infty$ и ℓ^p обозначает пространство последовательностей, суммируемых с $p-$й степенью модуля. Тогда нам необходимо доказать, что

$$\|H\|_{\ell^p\to\ell^q} \ll A, \tag{20}$$

где H оператор вида (10). Запишем оператор H в виде $H = T + S$, где T и S блочно-диагональные операторы, определённые в (11), (12) и (13). Тогда

$$\|H\|_{\ell^p\to\ell^q} \leqslant \|T\|_{\ell^p\to\ell^q} + \|S\|_{\ell^p\to\ell^q}.$$

По лемме 1

$$\|T\|_{\ell^p\to\ell^q} = \sup_k \|T_k\|_{\ell^p_{[n_k,n_k']}\to\ell^q_{[a(n_k),b(n_k)]}} \quad \text{и} \quad \|S\|_{\ell^p\to\ell^q} = \sup_k \|S_k\|_{\ell^p_{[n_k,n_k']}\to\ell^q_{(b(n_k),b(n_k')]}}.$$

Применяя лемму 2 и соотношение (9), мы находим, что

$$\|T_k\|_{\ell^p_{[n_k,n_k']}\to\ell^q_{[a(n_k),b(n_k)]}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{n_k\leqslant n\leqslant a^{-1}(b(n_k))} \left(\sum_{k=n_k}^{n} v(k)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=a(n)}^{b(n_k)} w(i)^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \sup_{n_k\leqslant n\leqslant a^{-1}(b(n_k))} A(n_k,n) \leqslant A.$$

Аналогично, применяя Лемму 3 и соотношение (9), находим

$$\|S\|_{\ell^p\to\ell^q} = \sup_k \|S_k\|_{\ell^p_{[n_k,n_k']}\to\ell^q_{(b(n_k),b(n_k')]}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{n\leqslant n_k'<a^{-1}(b(n))} \left(\sum_{k=n}^{n_k'} v(k)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i>a(n_k')}^{b(n)} w(i)^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \sup_{n\leqslant n_k'<a^{-1}(b(n))} A(n,n_k') \leqslant A.$$

Отсюда и из леммы 1 следует (20). □

Теорема 3. *Пусть* $0 < p \leqslant q < \infty$ *и* $0 < p \leqslant 1$. *Тогда неравенство*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left(\sum_{a(n)\leqslant k\leqslant b(n)} f(k)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\sum_{n=1}^{\infty} f^p(n)w(n)\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{для всех } f(n) \geqslant 0 \tag{21}$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{A} := \sup_m \sup_{m\leqslant n\leqslant a^{-1}(b(m))} \mathcal{A}(m,n) < +\infty,$$

где

$$\mathcal{A}(m,n) := \left(\sum_{k=m}^{n} v(k)\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{k\in[a(n),b(m)]} w^{\frac{-1}{p}}(k).$$

Более того, справедливо соотношение $C \approx \mathcal{A}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть выполнено неравенство (21) и $n, m \in \mathbb{N}$ такие произвольные натуральные числа, что $m \leqslant n \leqslant a^{-1}(b(m))$, и $k_{m,n} \in$

$[a(n), b(m)]$ такое число, что $0 \neq w(k_{m,n}) = \inf_{k\in[a(n),b(m)]} w(k)$. Положим $f(k) = 0$ при $k \neq k_{m,n}$ и $f(k) = 1$, когда $k = k_{m,n}$, тогда из (1)

$$w^{\frac{1}{p}}(k_{m,n}) \geqslant \left(\sum_{l=1}^{\infty} v(l)\left(\sum_{k=a(l)}^{b(l)} f(k)\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum_{l=m}^{n} v(l)\left(\sum_{k=a(l)}^{b(l)} f(k)\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{l=m}^{n} v(l)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Отсюда

$$C \geqslant \left(\sum_{l=m}^{n} v(l)\right)^{\frac{1}{q}} w^{\frac{-1}{p}}(k_{m,n}) = \left(\sum_{l=m}^{n} v(l)\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{k\in[a(n),b(m)]} w^{\frac{-1}{p}}(k).$$

Далее следует, что $C \geqslant \mathcal{A}$.

Достаточность. Пусть $\mathcal{A} < +\infty$. Тогда нам необходимо доказать, что

$$\|H\|_{\ell^p\to\ell^q} \ll \mathcal{A}. \tag{22}$$

Тогда $\|H\|_{\ell^p\to\ell^q} \leqslant \|T\|_{\ell^p\to\ell^q} + \|S\|_{\ell^p\to\ell^q}$. По лемме 1

$$\|T\|_{\ell^p\to\ell^q} = \sup_k \|T_k\|_{\ell^p_{[n_k,n'_k]}\to\ell^q_{[a(n_k),b(n_k)]}} \quad \text{и} \quad \|S\|_{\ell^p\to\ell^q} = \sup_k \|S_k\|_{\ell^p_{[n_k,n'_k]}\to\ell^q_{(b(n_k),b(n'_k)]}}.$$

Применяя лемму 4 и соотношение (9), мы находим, что

$$\|T_k\|_{\ell^p_{[n_k,n'_k]}\to\ell^q_{[a(n_k),b(n_k)]}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{n_k\leqslant n\leqslant a^{-1}(b(n_k))} \left(\sum_{k=n_k}^{n} v(k)\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{i\in[a(n),b(n_k)]} w^{\frac{-1}{p}}(i) =$$

$$= \sup_{n_k\leqslant n\leqslant a^{-1}(b(n_k))} \mathcal{A}(n_k, n) \leqslant \mathcal{A}.$$

Аналогично, применяя лемму 5 и соотношение (9), находим

$$\|S\|_{\ell^p\to\ell^q} = \sup_k \|S_k\|_{\ell^p_{[n_k,n'_k]}\to\ell^q_{(b(n_k),b(n'_k)]}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{n\leqslant n'_k< a^{-1}(b(n))} \left(\sum_{k=n}^{n'_k} v(k)\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{i\in(a(n'_k),b(n)]} w^{\frac{-1}{p}}(i) =$$

$$= \sup_{n\leqslant n'_k< a^{-1}(b(n))} \mathcal{A}(n, n'_k) \leqslant \mathcal{A}.$$

Отсюда и из леммы 1 следует (22). □

Литература

1. *Альхалил А.* Дискретные неравенства типа Харди с переменными пределами суммирования I // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2010. — № 4. — С. 56–69. [*Aljkhalil A.* Diskretnihe neravenstva

tipa Khardi s peremennihmi predelami summirovaniya I // Vestnik RUDN. Seriya «Matematika. Informatika. Fizika». — 2010. — No 4. — S. 56–69.]

2. *Степанов В. Д., Ушакова Е. П.* Об интегральных операторах с переменными пределами интегрирования // Труды Матем. ин-та РАН. — 2001. — Вып. 232. — С. 298–317. [*Stepanov V. D., Ushakova E. P.* Ob integraljnihkh operatorakh s peremennihmi predelami integrirovaniya // Trudih Matem. in-ta RAN. — 2001. — Vihp. 232. — S. 298–317.]
3. *Степанов В. Д., Ушакова Е. П.* Об операторе геометрического среднего с переменными пределами интегрирования // Труды Матем. ин-та РАН. — 2008. — Вып. 260. — С. 264–288. [*Stepanov V. D., Ushakova E. P.* Ob operatore geometricheskogo srednego s peremennihmi predelami integrirovaniya // Trudih Matem. in-ta RAN. — 2008. — Vihp. 260. — S. 264–288.]
4. *Stepanov V. D., Ushakova E. P.* Kernel Operators with Variable Limits Intervals of Integration in Lebesgue Speces and Applications // Math. Inequal. Appl. — 2010. — Vol. 13. — Pp. 449–510.
5. *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. — М.: ИЛ, 1948. [*Khardi G. G., Littlvud D. E., Polia G.* Neravenstva. — M.: IL, 1948.]
6. *Grosse-Erdmann K. G.* The Blocking Technique, Weighted Mean Operators and Hardy's Inequality // Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag. — Vol. 1679. — 1998.
7. *Bennett G.* Some Elementary Inequalities // Quart. J. Math. Oxford Ser.(2). — 1987. — Vol. 38. — Pp. 401–425.
8. *Bennett G.* Some Elementary Inequalities. II // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). — 1988. — Vol. 39. — Pp. 385–400.
9. *Bennett G.* Some Elementary Inequalities. III // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). — 1991. — Vol. 42. — Pp. 149–174.
10. *Braverman M. S., Stepanov V. D.* On the Discrete Hardy's Inequality // Bull. London Math. Soc. — 1994. — Vol. 26. — Pp. 283–287.
11. *Goldman M. L.* Hardy Type Inequalities on the Cone of Quasi-Monotone Functions // Research report 98/31, Russian Acad. Sci. Far-East Branch, Computer Centre, Khabarovsk. — 1998.
12. *Okpoti C. A.* Weight Characterizations for Hardy and Carleman Type Inequalities // Lulea University of Technology, Department of Mathematics. — Vol. 36. — 2006. — Pp. 1–81.

UDC 517.51

Discrete Inequalities of Hardy Type with Variable Limits of Summation. II

Alkhliel Aiman

Mathematical Analysis and Functiona Theory Department
Peoples friendship university of Russia
6, Miklukho Maklai str., 117198, Moscow, Russia

The problem of necessary and sufficient conditions of validity for discrete inequalities of Hardy type with variable limits of summation in the sequence spaces is studied.

Key words and phrases: discrete Hardy inequality.