Математические модели в экономике

УДК 519.216, 519.866

Исследование решений системы уравнений в модели добывающего сектора экономики Монголии

В. А. Горбачёв

Кафедра нелинейного анализа и оптимизации
Российский Университет Дружбы Народов
ул. Орджоникидзе, д. 3, Москва, Россия

В работе проведено исследование модельной системы уравнений в имитационной модели экономического сектора, идентификация вида системы и анализ поведения траекторий решения в малой окрестности точек, соответствующих состоянию равновесия исследуемой экономической системы.

Ключевые слова: CGE-модели, вычислимое моделирование, автономные системы дифференциальных уравнений.

В основу построения имитационной модели положим односекторный вариант модели общего равновесия с запасами продуктов, факторов производства и денег при налогообложении и наличии теневого сектора [1–4].

В качестве экономических агентов выделены добывающий сектор X, домашние хозяйства L, банковскую систему B, внешний рынок O и Правительство (консолидированный бюджет) G. Производитель поставляет продукцию на внутренний и внешний рынок. Домашние хозяйства предлагают труд и потребляют конечную продукцию. Банковская система выпускает денежные средства, выдаёт кредиты производителям с целью извлечения банковской прибыли. Правительство региона собирает налоги с производителей и домашних хозяйств. Считаем, что своя цена формируется на каждом рынке и изменение цены обратно пропорционально изменению запасов соответствующих продуктов.

В каждый момент времени t весь наличный объем блага i разделен без остатка между агентами, так что в распоряжении каждого агента находится запас блага $Q_i^\nu(t)$. Запас блага $Q_i^\nu(t)$ изменяется вследствие его производства (или получения из внешней природной среды) и потребления агентом ν, а также вследствие передачи блага от одного агента другому. Последнее предположение точно записывается в виде уравнения материального баланса:

$$\dot{Q}_i^\nu(t) = X_i^\nu - C_i^\nu - V_i^\nu - J_i^\nu - \sum \left(h_i^{\mu\nu} - h_i^{\nu\mu}\right).$$

Структурно рассматриваемая модель представляет собой нелинейную автономную систему. В общем виде запишем модельную систему уравнений в следующем виде:

$$\dot{\vec{Z}} = F(\vec{Z}, \omega), \tag{1}$$

где $\vec{Z} = \{\vec{Q}, \vec{W}, \vec{p}, \vec{s}\}$ — набор переменных модели: $\vec{Q}$ — вектор запасов материальных благ, $\vec{W}$ — вектор денежных запасов, $\vec{p}$ — вектор цен, $\vec{s}$ — вектор заработных плат, а ω — набор параметров модели.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (1) является автономной, так как в неё явно не входит независимая переменная t. Если систему уравнений (1) дополнить начальными условиями $\vec{Z}(t_0) = \vec{Z}$, то мы получим задачу Коши. Её решение — $\{\vec{Z}(t, \omega), t > 0\}$, рассматриваемое как множество точек фазового пространства, образует фазовую траекторию. В фазовом пространстве

Статья поступила в редакцию 30 марта 2011 г.
Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-92204-Монг_а).

правые части системы уравнений (1) задают векторное поле скоростей. Фазовые траектории и векторное поле скоростей дают наглядное представление о характере поведения системы с течением времени. Множества фазовых траекторий, соответствующих различным начальным условиям, образуют фазовый портрет динамической системы.

Правая часть автономной системы (1) удовлетворяет условию Липшица по $\vec{Z}$ в некоторой ограниченной области. Тогда при любом начальном условии $\vec{Z}(t_0) = \vec{Z}$ существует единственное решение задачи Коши. Это решение можно рассматривать как закон движения точки в пространстве, при котором она описывает некоторую траекторию, зависящую от выбора начальной точки.

Для автономной системы (1) справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Решение* $\vec{Z}(t_0) = \vec{Z}$ *автономной системы* (1) *может быть только одного из следующих трёх типов:*

1) *непериодическое, для которого* $\vec{Z}\,(t_i, \omega) \neq \vec{Z}\,(t_j, \omega)$ *при* $t_i \neq t_j$*;*
2) *периодическое, для которого найдётся такое постоянное* $T > 0$ *(период), что* $\vec{Z}(t + T, \omega) = \vec{Z}(t, \omega)$*, а* $\vec{Z}\,(t_i, \omega) \neq \vec{Z}\,(t_j, \omega)$ *при* $0 < t_i < t_j < T$*;*
3) *постоянное, для которого* $\vec{Z}(t, \omega) = \vec{Z}_0(\omega)$*.*

Траектории, отвечающие решениям указанных типов, называются соответственно незамкнутой, замкнутой и точкой покоя. Отметим, что траектория, отличная от точки покоя, представляет собой ориентированную линию, т.е. линию, вдоль которой указано направление, принятое за положительное.

Нетрудно получить необходимое и достаточное условие того, чтобы точка $\vec{Z}_0$ была точкой покоя системы (1): так как $\vec{Z}_0(\omega)$ решение системы, то, подставляя его в (1), получим $\vec{F}\left(\vec{Z}_0, \omega\right) = 0$.

Точки покоя системы (1) соответствуют состоянию равновесия исследуемой экономической системы. Особый интерес представляется собой изучение поведения экономической системы в состоянии близком к равновесию.

Проведём исследование поведения решений системы (1) в малой окрестности точки покоя. Рассмотрим два общих случая, когда правая часть системы не линейна, и попытаемся для некоторых случаев описать поведение траекторий. Также рассмотрим случай, когда правая часть системы линейна — тогда в зависимости от структуры корней характеристического уравнения можно различать типы интегральных кривых в соответствии с их поведением в окрестности точки покоя. Но для подобного исследования нам необходимо сделать некоторые предположения, которые в рамках нашей модели довольно уместны и не будут ограничивать общности.

Итак, общая схема исследования такова: мы пытаемся найти близкую систему к системе (1), правая часть которой линейна, так как для линейного случая можно провести наиболее полное исследование поведения траекторий в окрестности точек равновесия.

Предположим, что точка покоя системы (1) находится в начале координат. Проведём анализ поведения решений этой системы в некоторой окрестности начала координат. В нашем случае правая часть системы дифференциальных уравнений состоит их непрерывных аналитических функций. В таком случае мы можем рассмотреть такую задачу — зная множество коэффициентов тейлоровских разложений функций, входящих в правую часть уравнения, построить приближенную систему уравнений:

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = \theta_0\left(y_1, \ldots, y_n, \omega\right), \quad i = 1, \ldots, n,$$

свойства решений которой легко определить, и такую, что некоторые свойства её решений совпадают со свойствами решений системы (1).

Безусловно, решение подобной задачи сопряжено со следующими сложностями. Во-первых, не всякое топологическое свойство решения системы (1) может быть найдено путём построения естественным образом приближенной системы ДУ. Во-вторых, предельные свойства решений недостаточно исследованы, так что даже в нашем частном случае мы не можем полностью решить данную задачу.

При исследовании поведения решений системы (1) в некоторой окрестности точки равновесия следует рассматривать тот случай, когда приближенная система уравнений линейна. Требуется, зная аналитические и топологические свойства приближённой системы, сделать заключение о наличии этих же свойств в решении системы (1).

Для уточнения постановки задачи проведём классификацию типов интегральных кривых. Пусть задана сферическая окрестность начала координат с радиусом ρ_0. Возьмём фиксированную точку из этой окрестности, отличную от начала координат, и рассмотрим интегральную кривую $Z(t)$, начинающуюся в этой точке. Составим выражение:

$$r_i(\omega) = \sqrt{Z_1^2(t,\omega) + \ldots + Z_n^2(t,\omega)}.$$

Возможны следующие случаи:

1) $\rho_0 > \sup r_i = k > 0$ для всех t. В этом случае интегральную кривую будем называть устойчивой по Лагранжу. Среди устойчивых кривых особую роль играют периодические или замкнутые кривые;
2) $\rho_0 > \sup r_i = k > 0$ для $0 \leqslant t < +\infty$ и $\rho_0 = \sup r_i$ для $T \leqslant t \leqslant 0, T > -\infty$. Тогда интегральную кривую назовём асимптотической, или положительно устойчивой;
3) $\lim r_i = 0$ при $t \to \infty$. В этом случае интегральная кривая называется О-кривой. Среди О-кривых будем различать два типа: правильные (приближающиеся к началу координат с определённым направлением касательной) и особые (не имеющие определённого направления касательной в начале координат);
4) $\rho_0 = \sup r_i$ для всех t. Такие интегральные кривые назовём седловыми. Седловые кривые имеют некоторое минимальное расстояние от начала координат и через конечный промежуток времени покидают рассматриваемую окрестность как при продолжении в отрицательном направлении, так и при продолжением в положительном направлении.

Различие между приведёнными четырьмя типами относительное, так как в зависимости от размера окрестности тип кривой может различаться.

Предположим, что правая часть модельной системы дифференциальных уравнений линейна. Этого можно достигнуть, считая цены и заработные платы постоянными (кусочно-постоянными), а также используя в качестве производственной функцию суммарного объёма капитала и труда.

В случае, если система уравнений линейна, можно показать, что возможны шесть случаев поведения интегральных кривых в окрестности точки покоя.

1. Все корни характеристического уравнения имеют отличные от нуля действительные части, причём действительные части корней одного знака. В этом случае все функции $Z_k(t,\omega)$ стремятся к нулю при $t \to \infty$. В таком случае всякое решение будет обладать данным свойством, как линейная комбинация функций $Z_k(t,\omega)$. В этом случае мы будем говорить, что решения образуют в начале координат обобщённый узел. Все интегральные кривые будут О-кривыми.
2. Все корни характеристического уравнения имеют отличные от нуля действительные части, но имеется хотя бы одна пара корней, у которых действительные части различаются по знакам. В этом случае почти все интегральные кривые будут седловыми — такая особая точка называется обобщённым седлом.

3. Существуют корни, отличные от нуля, действительные части которых равны нулю. Все остальные корни имеют действительные части одного знака. Существенно различны будут два подслучая: когда все корни, имеющие нулевые действительные части, имеют простые элементарные делители первой степени, и когда среди элементарных делителей есть делитель порядка выше второго. В первом подслучае почти все интегральные кривые будут асимптотическими (подобное расположение кривых около точки покоя назовём обобщённым фокусом). Во втором — все интегральные кривые будут седловыми (поэтому подобное расположение кривых назовём обобщённым седлом (второго рода)).
4. Существуют корни, отличные от нуля, действительные части которых равны нулю. Действительные части остальных корней не равны нулю, и среди них есть хотя бы одна пара корней, имеющих действительные части различных знаков. В данном случае имеем три ортогональные гиперплоскости: первая заполняется О-кривыми, приближающимися к началу координат при $t \to -\infty$; вторая заполняется кривыми, приближающимися к началу координат при $t \to +\infty$; третья заполняется почти периодическими решениями. Кроме того, имеются два семейства асимптотических кривых, асимптотически приближающиеся к почти периодическим. Все остальные кривые седлообразны. Таким образом, в этом случае почти все интегральные кривые будут седловыми. Начало координат назовём сложным седлом.
5. Все корни не равны нулю и имеют действительные части равные нулю. Этот случай возможен лишь, если количество корней чётное. Если все элементарные делители первой степени, то все решения периодические, и начало координат представляет собой обобщённый центр. Если все элементарные делители простые, то почти все кривые будут седловыми, и подобного вида седло назовём обобщённым седлом (третьего рода).
6. Имеются нулевые корни. Обобщённый узел, обобщённый фокус, обобщённые седла первого, второго и третьего рода, сложное седло и обобщённый центр исчерпывают возможную структуру окрестности особой точки, если все корни характеристического уравнения не нулевые. В случае наличия нулевых корней интегральные кривые могут быть из всех вышеперечисленных типов. Заметим, что в этом случае начало координат есть неизолированная особая точки системы.

При рассмотрении всех случаев поведения интегральных кривых в окрестности особой точки мы отметили наличие О-кривых, асимптотических и седловых кривых. Теперь постараемся различить правильные О-кривые от особых О-кривых. Если характеристическое уравнение имеет пару комплексных корней, то у системы существуют особые О-кривые. Также можно доказать, что если все корни характеристического уравнения действительны и одного знака, то все интегральные кривые в окрестности начала координат будут правильными О-кривыми.

Рассмотрим теперь случай нелинейной системы (1). Представим систему в следующем виде:

$$\frac{\mathrm{d}Z_i}{\mathrm{d}t} = \sum_j \left(a_{ij} Z_i + \varphi_i \left(Z_1, \ldots, Z_n\right)\right), \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Предположим, что функции $\varphi_i \left(Z_1, \ldots, Z_n\right)$ и их частные производные первого порядка непрерывны вблизи начала координат, а в начале координат обращаются в ноль; это условие также может быть заменено следующим — каково бы не было положительное число, можно найти такую малую окрестность начала координат: $|Z_i| \leqslant \delta_i$, что в этой окрестности имеют место неравенства:

$$\varphi_i \left(Z_1', \ldots, Z_n'\right) - \varphi_i \left(Z_1'', \ldots, Z_n''\right) | \leqslant \varepsilon \left(|Z_1' - Z_1''| + \ldots + |Z_n' - Z_n''|\right).$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Если функции $\varphi_i\left(Z_1,\ldots,Z_n\right)$ удовлетворяют одному из описанных выше условий, и при этом характеристическое уравнение имеет $n-k$ корней с положительными действительными частями, то существует семейство O-кривых, зависящих от $n-k$ параметров и от t_0, приближающихся к началу координат при $t\to-\infty$, и семейство кривых, зависящее от k параметров и от t_0, приближающихся к началу координат при $t\to+\infty$.*

Если $n-k=0$ или $k=0$, то начало координат есть обобщённый узел. Если же $n-k\neq 0$ или $k\neq 0$, то начало координат — обобщённое седло.

Также при выполнении вышеописанных ограничений на функции $\varphi_i\left(Z_1,\ldots,Z_n\right)$ справедлива теорема Петровского:

Теорема 3. *Если действительные части всех корней характеристического уравнения нелинейной системы (65) положительны (или отрицательны), то почти все интегральные кривые при $t\to-\infty$ ($t\to+\infty$) касаются гиперплоскости, определяемой ведущими координатами.*

Попробуем найти аналитические решения системы уравнений вида (1). В нашем случае функции $\varphi_i\left(Z_1,\ldots,Z_n\right)$ могут быть представлены в виде степенных рядов, начинающихся с членов второго порядка. Задача, которую мы сейчас рассматриваем, несколько отлична от рассмотренных ранее. Постараемся найти общие интегралы системы около начала координат, выраженные равенствами:

$$Z_i=g_i\left(z_1,\ldots,z_n\right),\quad i=1,\ldots,n,$$

где g_i — аналитические функции своих переменных $z_1, ldots, z_n$, которые, в свою очередь, являются интегралами системы линейных дифференциальных уравнений. Оказывается, что заданную систему ДУ с помощью алгебраического преобразования переменных можно привести к форме последовательно интегрируемой системы уравнений. Таким образом, изучив интегралы этой последней системы, мы найдём и свойства интегралов первоначальной системы ДУ, сохраняющиеся при аналитических преобразованиях. В частности, могут быть выявлены топологические особенности многообразия интегральных кривых — тот или иной порядок касания некоторых осей в начале координат.

Итак, из автономности системы следует, что все положения равновесия и только они удовлетворяют условию $\vec{F}\left(\vec{Z}_0,\omega_0\right)=0$. Каждое асимптотически устойчивое решение будет, очевидно, сходиться к одному из положений равновесия.

При рассмотрении рынков, которые могут считаться равновесными и замкнутыми, можно, таким образом, решать задачу на нахождение $(\vec{Z}',\omega')$, удовлетворяющего условию $\vec{F}\left(\vec{Z}',\omega'\right)=\vec{\delta}$, где δ — вектор величин, «малых» в смысле определения асимптотической устойчивости.

Представим $\vec{Z}$ как объединение наборов $\vec{Z}^{QW}$ — набора материальных и денежных запасов — и $\vec{Z}^{ps}$ — набора цен и заработных плат. Тогда

$$\begin{cases}\dot{\vec{Z}}^{QW}=\vec{F}^{QW}\left(\vec{Z}^{QW},\vec{Z}^{ps},\omega\right);\\ \dot{\vec{Z}}^{ps}=\vec{F}^{ps}\left(\vec{Z}^{QW},\vec{Z}^{ps},\omega\right).\end{cases}$$

Система уравнений исследуемой модели однородна относительно $\vec{Z}^{QW}$:

$$\begin{cases}\vec{F}^{QW}\left(k\vec{Z}^{QW},\vec{Z}^{ps},\omega\right)=k\vec{F}^{QW}\left(\vec{Z}^{QW},\vec{Z}^{ps},\omega\right);\\ \vec{F}^{ps}\left(k\vec{Z}^{QW},\vec{Z}^{ps},\omega\right)=k\vec{F}^{ps}\left(\vec{Z}^{QW},\vec{Z}^{ps},\omega\right).\end{cases}$$

Таким образом, при начальных условиях $\vec{Z}_0^{QW},\vec{Z}_0^{ps}$ и векторе параметров ω_0 таких, что

$$\begin{cases} \vec{F}^{QW}\left(\vec{Z}_0^{QW}, \vec{Z}_0^{ps}, \omega_0\right) = \alpha \vec{Z}_0^{QW}; \\ \vec{F}^{ps}\left(\vec{Z}_0^{QW}, \vec{Z}_0^{ps}, \omega_0\right) = 0, \end{cases}$$

при некотором α, решение системы также может быть выписано в явном виде:

$$\begin{cases} \vec{Z}^{QW}(t) = \vec{Z}_0^{QW} e^{\alpha(t-t_0)}; \\ \vec{Z}^{ps} = \vec{Z}_0^{ps}. \end{cases}$$

Полученный результат можно использовать при изучении последствий изменения политики на рынке, находящемся в режиме сбалансированного роста, предварительно рассчитав начальные условия на исходном и «возмущённом» рынках.

Литература

1. *Кощеев А. В., Оленев Н. Н.* Моделирование взаимодействующих региональных экономических систем с использованием параллельных вычислений // Труды МФТИ. — 2010. — № 1(5). — С. 92–97. [*Kotheev A. V., Olenev N. N.* Modelirovanie vzaimodeyjstvuyuthikh regionaljnihkh ehkonomicheskikh sistem s ispoljzovaniem paralleljnihkh vihchisleniyj // Trudih MFTI. — 2010. — No 1(5). — S. 92–97.]
2. *Оленев Н. Н., Фетинина А. И.* Моделирование экономики Кировской области с применением технологий параллельного программирования // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. — 2010. — № 1(65). — С. 108–113. [*Olenev N. N., Fetinina A. I.* Modelirovanie ehkonomiki Kirovskoyj oblasti s primeneniem tekhnologiyj paralleljnogo programmirovaniya // Nauchno-tekhnicheskiyj vestnik SPbGU ITMO. — 2010. — No 1(65). — S. 108–113.]
3. *Оленев Н. Н., Фетинина А. И.* Параллельные вычисления в идентификации динамической модели Вятского региона // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2009. — № 6(1). — С. 184–191. [*Olenev N. N., Fetinina A. I.* Paralleljnihe vihchisleniya v identifikacii dinamicheskoyj modeli Vyatskogo regiona // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. — 2009. — No 6(1). — S. 184–191.]
4. *Оленев Н. Н., Стародубцева В. С.* Исследование влияния теневого оборота на социально-экономическое положение в Республике Алтай // Региональная экономика: теория и практика. — 2009. — № 11. — С. 32–37. [*Olenev N. N., Starodubceva V. S.* Issledovanie vliyaniya tenevogo oborota na socialjno-ehkonomicheskoe polozhenie v Respublike Altayj // Regionaljnaya ehkonomika: teoriya i praktika. — 2009. — No 11. — S. 32–37.]

UDC 519.216, 519.866

Study of the System of Equations in the Model of Mining Economic Sector of Mongolia

V. A. Gorbachev

Nonlinear Analysis and Optimization Department
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, Russia, 117198

In this paper we propose the CGE-model of economic sector. This model represents the system of differential equations. The analysis of trajectories in the points corresponding to equilibrium of investigated economic system is introduced and studied. We also try to get the dicision of the system in a some special case.

Key words and phrases: CGE-models, computable modeling, independent systems of the differential equations.