Теория вероятностей и случайные процессы

УДК 519.214; 519.217

Анализ асимптотического поведения характеристик надежности дублированных систем при «быстром восстановлении»

Д. В. Козырев

Кафедра теории вероятностей и математической статистики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо–Маклая, 6 , Москва, 117198, Россия

В работе исследуется скорость сходимости распределения времени безотказной работы дублированной системы облегченного резервирования к показательному закону при "быстром" восстановлении ее элементов. В качестве частных случаев приводятся результаты для системы с нагруженным и ненагруженным резервированием.

Ключевые слова: надежность систем, предельные теоремы, быстрое восстановление.

1. Введение и мотивация

Многие реальные технические и биологические системы характеризуются иерархической структурой [1] и высокой степенью надежности, которая достигается за счет резервирования и «быстрого» восстановления отказывающих элементов.

Системам с быстрым восстановлением посвящен ряд работ [2–7]. Б.В. Гнеденко [2, 3] для дублированной системы с облегченным резервированием и простейшим потоком отказов показал, что если вероятность отказа элемента за время его восстановления стремится к нулю, то распределение времени безотказной работы (в.б.р.) системы асимптотически экспоненциально. Аналогичный результат для случая ненагруженного резервирования в несколько более общих условиях был получен А.Д. Соловьевым [5]. Он рассмотрел дублированную систему с ненагруженным резервированием в предположении, что как в.б.р., так и время ремонта элементов распределены по произвольным законам.

Близкий подход к анализу сложных систем с «быстрым восстановлением» предложен в работах В.С. Королюка и А.Ф. Турбина [8] и [9] и опирается на метод фазового укрупнения состояний таких систем. А именно, в случае, когда в.б.р. всех элементов системы имеет одинаковый порядок, а длительности их восстановления бесконечно малы по сравнению с ними, то все рабочие и отказовые состояния могут быть объединены в одно рабочее и одно отказовое состояния, соответственно, и процесс, описывающий поведение системы с только одним рабочим состоянием и одним состоянием отказа будет приближаться к марковскому.

Однако вопросам анализа скорости сходимости распределения в.б.р. системы к экспоненциальному распределению до настоящего времени достаточного внимания уделено не было. Дело в том, что реально вычислить распределение в.б.р. системы удается только при весьма сильных предположениях относительно распределений длительности безотказной работы и восстановления элементов.

Поэтому в настоящей работе исследуется скорость сходимости распределения в.б.р. дублированной системы с облегченным резервированием к экспоненциальному закону при быстром восстановлении элементов в предположении о показательности распределений в.б.р. и восстановления ее элементов. В качестве частных случаев приводятся результаты для системы с нагруженным [10], а также

Статья поступила в редакцию 15 февраля 2011 г.

ненагруженным резервированием. Кроме того, так как с точки зрения надежности больший интерес представляет не распределение в.б.р., а функция надежности системы, то результаты работы представлены в терминах функции надежности.

2. Предварительные сведения

В работах Б.В. Гнеденко [3] (для системы облегченного резервирования и экспоненциального распределения в.б.р. элементов) и А.Д. Соловьева [5] (для системы ненагруженного резервирования и произвольных законов распределения в.б.р. и восстановления элементов) было показано, что распределение в.б.р. дублированной системы при быстром восстановлении асимптотически экспоненциально. Приведем формулировку предельной теоремы Гнеденко [3].

Рассмотрим систему облегченного дублирования с восстановлением с показательными распределениями в.б.р. основного элемента (с параметром α) и резервного элемента (с параметром α_1) и произвольной функцией распределения (ф.р.) времени восстановления $G_\nu(x)$.

Предположим, что дано множество функций распределения $G_\nu(x)$, зависящее от одного параметра ν и обладающее следующим свойством: при любом постоянном $\alpha > 0$ и $\nu \to \infty$

$$g_\nu(\alpha) = \int\limits_0^\infty \exp\{-\alpha x\} dG_\nu(x) \to 1.^{1} \tag{1}$$

Теорема (Гнеденко). *Если условие (1) выполнено, то поток отказов дублированной системы, когда за единицу отсчета времени принята величина a_ν^{-1} (в случае облегченного резервирования $a_\nu = (1 + \alpha_1/\alpha)(1 - g_\nu(\alpha))$), стремится к простейшему с параметром α, равным параметру потока отказов элемента, находящегося в работе.*

Для случая ненагруженного резервирования результат, подобный теореме Гнеденко, был получен А.Д. Соловьевым [5] в несколько более общих условиях: он предполагал, что как в.б.р. элементов, так и длительности их восстановления распределены по произвольным законам $F(x)$ и $G(x)$ соответственно. Условие Соловьева состоит в том, что при $\nu \to \infty$

$$\gamma_\nu = \int\limits_0^\infty \big[1 - G_\nu(x)\big] dF(x) \to 0,$$

при этом величина γ_ν служит нормирующим множителем.

В вышеуказанных работах была использована разная параметризация, которая содержательно означает одно и то же: за время восстановления отказавшего элемента вероятность отказа резервного элемента мала. Действительно, содержательно, параметр g_ν Гнеденко означает вероятность того, что за время ремонта отказа не произойдет, в то время как параметр Соловьева γ_ν представляет собой вероятность того, что время ремонта больше в.б.р. элемента. Интегрированием по частям можно убедиться, что $\gamma_\nu = 1 - g_\nu$, так что принципиальной разницы между этими параметризациями не существует.

Однако каждая из этих параметризаций приводит к предельному распределению с различными нормирующими константами. Поэтому в дальнейшем, используя по существу ту же самую параметризацию, для сравнения различных режимов резервирования в статье рассматривается распределение в.б.р. системы в масштабе его среднего значения.

[1]Очевидно, что это условие эквивалентно такому: при любом $\epsilon > 0$ и $\nu \to \infty$ $P\{\xi_\nu > \epsilon\} = 1 - G_\nu(\epsilon) \to 1$, где через ξ_ν обозначена случайная величина, для которой $G_\nu(x)$ является ф.р.

3. Марковский случай

Приведенные результаты не содержат оценки скорости сходимости к предельному распределению. Для оценки скорости сходимости найдем явные выражения для ф.р. в.б.р. и функции надежности системы. Для этого рассмотрим марковский случай. Рассмотрим систему облегченного дублирования с показательно распределенными длительностями безотказной работы и восстановления с интенсивностями отказов основного и резервного элементов α и $\alpha_1, \alpha_1 < \alpha$, соответственно, и интенсивностями восстановления β.

Поведение такой системы с точки зрения надежности при сделанных предположениях описывается марковским процессом с множеством состояний $\{0, 1, 2\}$, где номер состояния означает число отказавших элементов в момент времени t. Если состояние 2 (отказ всей системы) сделать поглощающим, то распределение в.б.р. системы совпадает с вероятностью того, что процесс в момент t находится в состоянии 2.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний данной системы с поглощением в состоянии 2 имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{p}_0(t) = -(\alpha + \alpha_1)\, p_0(t) + \beta\, p_1(t), \\ \dot{p}_1(t) = (\alpha + \alpha_1)\, p_0(t) - (\alpha + \beta)\, p_1(t), \\ \dot{p}_2(t) = \alpha\, p_1(t), \end{cases} \tag{2}$$

Решая систему (2) в терминах преобразований Лапласа (ПЛ), получим следующее выражение для ПЛ плотности распределения длительности безотказной работы $\tilde{w}(s) = \int_0^\infty e^{-st} W(dt)$ однородной дублированной системы:

$$\tilde{w}(s) = s\tilde{p}_2(s) = \frac{\alpha(\alpha + \alpha_1)}{s^2 + (2\alpha + \alpha_1 + \beta)s + \alpha(\alpha + \alpha_1)}. \tag{3}$$

Раскладывая это выражение на простейшие дроби и применяя обратное преобразование Лапласа, легко получить плотность распределения в.б.р. системы, а после интегрированием получить выражение для ф.р. $W(t)$ в.б.р. W системы, соответствующую функцию надежности $R(t) = 1 - W(t)$ и среднюю продолжительность безотказной работы $\mathbb{E}W$ дублированной системы:

$$\mathbb{E}W = \int\limits_0^\infty [1 - W(t)]dt = \frac{2\alpha + \alpha_1 + \beta}{\alpha(\alpha + \alpha_1)}. \tag{4}$$

Очевидно, средняя продолжительность безотказной работы системы увеличивается при быстром восстановлении, т.е. с ростом отношения $\frac{\beta}{\alpha}$, которое мы обозначим за ρ и которое имеет смысл относительной скорости восстановления.

Поскольку при различных режимах восстановления основной параметр (вероятность отказа системы за время ремонта) имеет различные выражения, для унификации представления результатов будем исследовать функцию надежности системы в масштабе среднего времени ее безотказной работы. В качестве нормирующего множителя (единицы отсчета времени) выберем параметр $a_\rho = [\mathbb{E}W]^{-1}$, который является бесконечно малым при быстром восстановлении ($a_\rho \to 0$ при $\rho = \frac{\beta}{\alpha} \to \infty$).

Теорема 1. *При $a_\rho \to 0$ имеет место сходимость функции надежности системы в масштабе его среднего в.б.р.: $\hat{R}(t) \to e^{-t}$, причем скорость сходимости* *имеет порядок ε:*

$$\left|\hat{R}(t) - e^{-t}\right| \leqslant \varepsilon,$$

где $\varepsilon = \dfrac{\alpha(\alpha+\alpha_1)}{(2\alpha+\alpha_1+\beta)^2}$.

Доказательство. Запишем ПЛ (3) плотности распределения в.б.р. системы в новом масштабе времени:

$$\tilde{w}(a_\rho s) = \frac{\alpha(\alpha+\alpha_1)}{s^2\left(\frac{\alpha(\alpha+\alpha_1)}{2\alpha+\alpha_1+\beta}\right)^2 + \alpha(\alpha+\alpha_1)s + \alpha(\alpha+\alpha_1)} =$$
$$= \frac{1}{s^2\frac{\alpha(\alpha+\alpha_1)}{(2\alpha+\alpha_1+\beta)^2} + s + 1} = \frac{1}{\varepsilon s^2 + s + 1}, \quad (5)$$

где использовано обозначение $\varepsilon = \dfrac{\alpha(\alpha+\alpha_1)}{(2\alpha+\alpha_1+\beta)^2} \leqslant 2(\dfrac{1}{3+\rho})^2 \to 0$ при $\rho \to \infty$. Раскладывая получившееся выражение на простейшие дроби, найдем:

$$\tilde{w}(a_\rho s) = \frac{s's''}{s''-s'}\left(\frac{1}{s+s'} - \frac{1}{s+s''}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-4\varepsilon}}\left(\frac{1}{s+s'} - \frac{1}{s+s''}\right), \quad (6)$$

где s' и s'' являются корнями характеристического уравнения и имеют вид: $s^{','} = \dfrac{1}{2\varepsilon}\left(1 \mp \sqrt{1-4\varepsilon}\right)$. Наконец, раскладывая $\sqrt{1-4\varepsilon}$ в ряд Тейлора, окончательно получим:

$$s' = 1 + \varepsilon + o(\varepsilon^2) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 1,$$
$$s'' = \frac{1}{\varepsilon}(1 - \varepsilon - \varepsilon^2)) + o(\varepsilon^2) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \infty,$$

откуда

$$\hat{w}(t) = \frac{s's''}{s''-s'}\left(e^{-s't} - e^{-s''t}\right) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} e^{-t}. \quad (7)$$

Интегрируя (7), получим соответствующую ф.р. в.б.р. и функцию надежности. Функция надежности системы в новом масштабе времени имеет вид:

$$\hat{R}(t) = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1-4\varepsilon}(1-\sqrt{1-4\varepsilon})} e^{-\frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}t}\left(1 - \frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{1+\sqrt{1-4\varepsilon}} e^{-\frac{\sqrt{1-4\varepsilon}}{\varepsilon}t}\right) =$$
$$= \frac{1}{1-\varepsilon}e^{-(1+\varepsilon)t} - \frac{\varepsilon}{1-3\varepsilon}e^{-\frac{1-\varepsilon-\varepsilon^2}{\varepsilon}t} + o(\varepsilon^2) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} e^{-t}. \quad (8)$$

Последнее выражение позволяет не только получить предельное выражение для функции надежности в масштабе его среднего значения, которое, естественно, равно e^{-t}, но и оценить скорость сходимости к этому предельному выражению.

Для получения равномерной абсолютной оценки скорости сходимости рассмотрим:

$$\left|\hat{R}(t) - e^{-t}\right| = \left|\frac{2\varepsilon}{\sqrt{1-4\varepsilon}(1-\sqrt{1-4\varepsilon})} e^{-\left(\frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right)t} - \right.$$
$$\left. - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1-4\varepsilon}(1+\sqrt{1-4\varepsilon})} e^{-\left(\frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}\right)t} - e^{-t}\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{1-\varepsilon}e^{-(1+\varepsilon)t} - \frac{\varepsilon}{1-3\varepsilon}e^{-(\frac{1}{\varepsilon}-1-\varepsilon)t} - e^{-t} + o(\varepsilon^2)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|e^{-t}\left(\frac{1}{1-\varepsilon}e^{-\varepsilon t} - 1\right)\right| \leqslant \left|e^{-t}\left(\frac{1-\varepsilon t}{1-\varepsilon} - 1\right)\right| = \left|e^{-t}\frac{\varepsilon(1-t)}{1-\varepsilon}\right| \quad (9)$$

Поскольку $|e^{-t}(1-t)| \leqslant \left|\dfrac{1-t}{1+t}\right| < 1$, то окончательно имеем:

$$\left|\hat{R}(t) - e^{-t}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < \varepsilon$$

Равномерную сходимость $\hat{R}(t)$ к e^{-t} удобно наблюдать по графику функции разности $\hat{R}(t) - e^{-t}$, представленному на рис. 1.

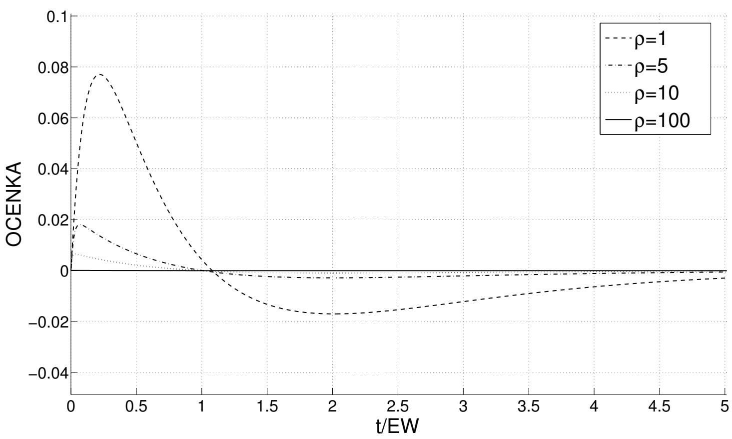

Рис. 1. **Равномерная сходимость функции надежности $\hat{R}(t)$ в масштабе ее среднего времени к предельной функции e^{-t} с ростом ρ**

Результаты для систем нагруженного и ненагруженного резервирования легко получаются из приведенных выше при $\alpha_1 = \alpha$ и $\alpha_1 = 0$.

4. Численный анализ

Исследование скорости сходимости характеристик надежности дублированной системы нагруженного резервирования с быстрым восстановлением было проведено в [10].

В случае ненагруженного резервирования

$$\mathbb{E}W = \int\limits_0^\infty [1 - W(t)]dt = \frac{2\alpha + \beta}{\alpha^2}. \tag{10}$$

Следует отметить, что функция надежности системы в масштабе его среднего времени имеет одинаковый вид (8) для любого типа резервирования. Различие состоит лишь в значении параметра ε. Для системы ненагруженного резервирования $\varepsilon = \dfrac{\alpha^2}{(2\alpha+\beta)^2} = (\dfrac{1}{2+\rho})^2 \to 0$ при $\rho \to \infty$.

На рис. 2 представлены графики функций надежности для систем нагруженного и ненагруженного резервирования в масштабе среднего в.б.р. систем при $\rho = 1$. Графики представлены в увеличенном масштабе (в интервале среднего в.б.р. системы от 0 до 1). Опять же, как видно из рисунка, функции надежности для систем с разными типами резервирования практически идентичны даже при малой относительной скорости восстановления (тип резерва практически не влияет на вид функций надежности). С ростом ρ они будут совпадать.

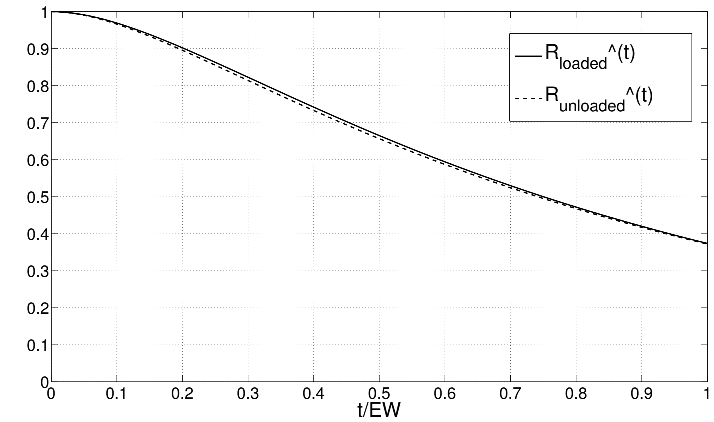

Рис. 2. **Графики функций надежности для систем нагруженного и ненагруженного резервирования при $\rho = 1$**

На рис. 3 изображены графики предельной и допредельных функций надежности в масштабе среднего в.б.р. системы $\dfrac{t}{\mathbb{E}W}$ для разных значений ρ (($\rho = 1; 10; 100$), ($\varepsilon = 0,1111;\ 0,0069;\ 0,0961 \times 10^{-3}$)) на интервале относительных значений времени $[\mathbb{E}W]^{-1} \cdot t$ от 0 до 6. Из рисунка видно, что с ростом относительной скорости восстановления ($\rho = \dfrac{\beta}{\alpha} \to \infty$) кривые достаточно быстро сходятся к предельному значению. Надежность системы во всех случаях (при любых ρ) в течение своего среднего времени жизни (т.е. к моменту $t = \mathbb{E}W$) снижается до приблизительно 37%. Однако следует отметить, что абсолютное время достижения такого низкого уровня надежности различно для разных значений относительной скорости восстановления (для $\rho = 1; 10; 100$ абсолютное время составляет 2; 6.5 и 51.5 условных временных единиц, соответственно, в случае нагруженного резервирования и 3; 12 и 102 в случае ненагруженного резервирования).

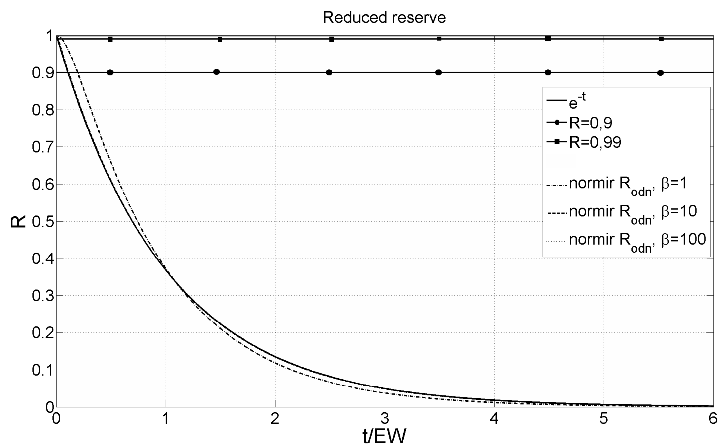

Рис. 3. **Нормированная функция надежности дублированной системы для $\rho = 1$, $\rho = 10$ и $\rho = 100$, соответственно**

Поскольку на практике представляют интерес системы с достаточно высокой надежностью, то на следующем рисунке (рис. 4) представлены те же графики, но в увеличенном масштабе (в интервале надежности от 0,9 до 1,0).

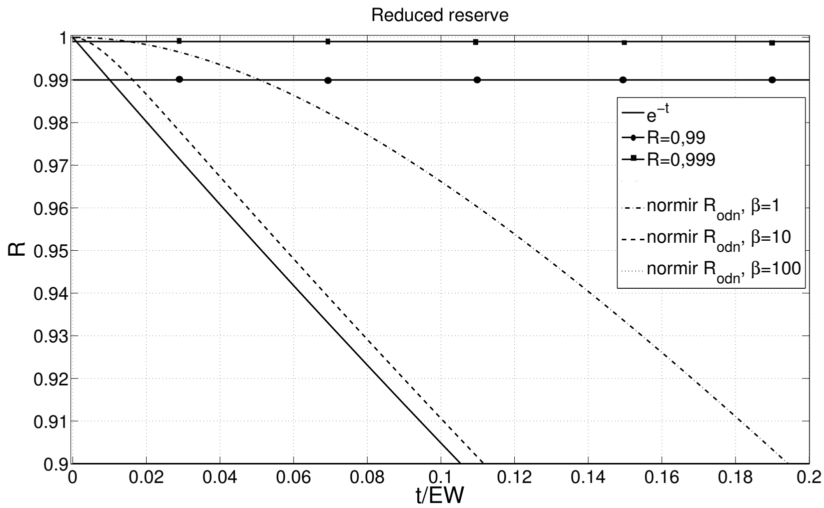

Рис. 4. **Поведение нормированной функции надежности дублированной системы для $\rho = 1$, $\rho = 10$ и $\rho = 100$, соответственно, до уровня $R = 0,9$**

Более наглядно скорость сходимости можно продемонстрировать, рассматривая квантили для разных уровней надежности, найденные с помощью вычислительных методов пакета MATLAB, которые представлены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Квантили уровней надежности 0,9; 0,99; 0,999 для разных значений относительной скорости восстановления. Нагруженный резерв

Уровни надёжности	$(\rho; \mathbf{E}W)$			
	(1; 2)	(10; 6,5)	(100; 51,5)	(1000; 501,5)
$R = 0,9$	0,4054	0,7550	5,4347	52,8392
$R = 0,99$	0,1071	0,1274	0,5272	5,0412
$R = 0,999$	0,0320	0,0336	0,0612	0,5028

Таблица 2

Квантили уровней надежности 0,9; 0,99; 0,999 для разных значений относительной скорости восстановления. Ненагруженный резерв

Уровни надёжности	$(\rho; \mathbf{E}W)$			
	(1; 3)	(10; 12)	(100; 102)	(1000; 1002)
$R = 0,9$	0,5828	1,3397	10,7555	105,5721
$R = 0,99$	0,1523	0,1957	1,0348	10,0714
$R = 0,999$	0,0455	0,0490	0,1118	1,0035

Из табл. 1 и 2 следует, что даже при значительной относительной скорости восстановления ($\rho = 1000$) достаточно высокий уровень надежности ($R = 0,999$)

сохраняется только до момента времени $t \approx 0,5$ относительно среднего в.б.р. основного элемента для систем нагруженного резервирования и $t \approx 1$ для систем ненагруженного резервирования. Таким образом, для систем как нагруженного, так и ненагруженного резервирования уже через $0,1\%$ среднего в.б.р. системы надежность снижается на $0,1\%$. Однако при этом среднее в.б.р. систем приблизительно в 500 и в 1000 раз больше, соответственно, среднего в.б.р. их основных элементов. Таким образом, можно сделать вывод, что величина среднего в.б.р. системы не является достаточно информативным показателем при анализе надежности дублированных систем.

Литература

1. *Рыков В. В., Козырев Д. В.* Анализ надежности иерархических систем: регенеративный подход // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 7. — С. 47–60. [Rykov V. V., Kozyrev D. V. Analiz nadezhnosti ierarkhicheskikh sistem: regenerativnihyj podkhod // Avtomatika i telemekhanika. — 2010. — No 7. — S. 47–60.]
2. *Гнеденко Б. В.* О ненагруженном дублировании // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. — 1964. — № 4. — С. 3–12. [*Gnedenko B. V.* O nenagruzhennom dublirovanii // Izv. AN SSSR. Tekh. kibernetika. — 1964. — No 4. — S. 3–12.]
3. *Гнеденко Б. В.* О дублировании с восстановлением // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. — 1964. — № 5. — С. 111–118. [*Gnedenko B. V.* O dublirovanii s vosstanovleniem // Izv. AN SSSR. Tekh. kibernetika. — 1964. — No 5. — S. 111–118.]
4. *Коваленко И. Н.* Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. — М.: Советское радио, 1980. — 208 с. [*Kovalenko I. N.* Analiz redkikh sobihtiyj pri ocenke ehffektivnosti i nadezhnosti sistem. — M.: Sovetskoe radio, 1980. — 208 s.]
5. *Соловьев А. Д.* Асимптотическое распределение времени жизни дублированного элемента // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. — 1964. — № 5. — С. 119–121. [*Solovjev A. D.* Asimptoticheskoe raspredelenie vremeni zhizni dublirovannogo ehlementa // Izv. AN SSSR. Tekh. kibernetika. — 1964. — No 5. — S. 119–121.]
6. *Соловьев А. Д.* Резервирование с быстрым восстановлением // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. — 1970. — № 1. — С. 56–71. [*Solovjev A. D.* Rezervirovanie s bihstrihm vosstanovleniem // Izv. AN SSSR. Tekh. kibernetika. — 1970. — No 1. — S. 56–71.]
7. *Соловьев А. Д.* Асимптотическое поведение момента первого поступления редкого события в регенерирующем процессе // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. — 1971. — № 6. — С. 79–89. [*Solovjev A. D.* Asimptoticheskoe povedenie momenta pervogo postupleniya redkogo sobihtiya v regeneriruyuthem processe // Izv. AN SSSR. Tekh. kibernetika. — 1971. — No 6. — S. 79–89.]
8. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем. — Киев: Наукова думка, 1978. — 220 с. [*Korolyuk V. S., Turbin A. F.* Matematicheskie osnovih fazovogo ukrupneniya slozhnihkh sistem. — Kiev: Naukova dumka, 1978. — 220 s.]
9. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Фазовое укрупнение сложных систем. — Киев: Вища школа, 1978. — 112 с. [*Korolyuk V. S., Turbin A. F.* Fazovoe ukrupnenie slozhnihkh sistem. — Kiev: Vitha shkola, 1978. — 112 s.]
10. *Козырев Д. В.* К анализу скорости сходимости характеристик надежности систем с быстрым восстановлением // International Workshop "Distributed Computer and Communication Networks (DCCN)" proceedings. — Москва: 2010. — С. 232–238. [Kozyrev D. V. K analizu skorosti skhodimosti kharakteristik nadezhnosti sistem s bihstrihm vosstanovleniem // International Workshop

"Distributed Computer and Communication Networks (DCCN)" proceedings. — Moskva: 2010. — S. 232–238.]

UDC 519.214; 519.217

Analysis of Asymptotic Behavior of Reliability Properties of Redundant Systems under the “Fast Recovery”

D. V. Kozyrev

Department of Probability Theory and Mathematical Statistics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

In this paper we consider a redundant system with reduced reserve and investigate the rate of convergence of the distribution of its failure-free time to the exponential law under the “fast recovery” of its elements. The results for systems with loaded and unloaded reserve are presented as particular cases.

Key words and phrases: system reliability, limit theorems, fast recovery.