УДК 517.9

Уравнение свёртки на вещественной прямой в пространстве функций, суммируемых с экспоненциальными весами. Часть 2

В. Б. Дыбин

Кафедра алгебры и дискретной математики
Южный федеральный университет
Б. Садовая, д. 105, Ростов-на-Дону, 344006, Россия

В этой работе (части 1 и 2) рассмотрена теория односторонней обратимости оператора свёртки на R в пространстве функций, суммируемых с экспоненциальными весами. В части 2 содержится конструкция И.А. Фельдмана, позволяющая получить критерий фредгольмовости изучаемого оператора. После этого приводятся результаты об обратимости (двусторонней, слева и справа) оператора свёртки в изучаемом пространстве, даётся описание его дефектных подпространств и конструкций соответствующих обратных операторов.

Ключевые слова: оператор свёртки, символ, весовое пространство, фредгольмовость, обратимость.

1. Введение

Эта работа является продолжением статьи [1]. Последняя содержит определения и описания изучаемых объектов. В дальнейшем её результаты мы будем использовать без специальных ссылок. Ниже даются: критерии фредгольмовости и обратимости (двусторонней и односторонней) оператора

$$C(\widetilde{K})f(x) = \lambda f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

в пространстве $\{a,b\}_E$, описание его дефектных подпространств и конструкций соответствующих обратных операторов.

Для удобства читателя данная часть работы содержит самостоятельный список цитируемой литературы.

2. Конструкция И.А. Фельдмана

И.А. Фельдман ввёл в обиход конструкцию, которая эффективно работает при построении Ф-теории скалярных и матричных уравнений типа свёртки (см. [2, Дополнение]). Здесь даётся некоторое её усовершенствование, которое уже опробовано в случае скалярных дискретных уравнений типа свёртки [3–5].

Ниже мы рассматриваем специальный матричный оператор T, действующий в пространстве $P_+\{a,b\}_E \times P_-\{a,b\}_E$ и обобщающий операторы свёртки и Винера–Хопфа, введённые выше. Основное внимание уделяется критерию фредгольмовости оператора T.

Через X обозначим комплексное линейное пространство двумерных векторов

$$\widehat{f} = \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad f_\pm \in P_\pm\big(\{a,b\}_E\big),$$

с поэлементными операциями сложения и умножения на скаляр. Предполагая всюду в этом разделе, что $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\{a,b\}_E}$, вводим в пространстве X норму $\|\widehat{f}\|_X =$

Статья поступила в редакцию 19 ноября 2010 г.

$\|f_+\| + \|f_-\|$, превращая тем самым X в банахово пространство. Пространство X изоморфно пространству $\{a, b\}_E$.

Пусть $k_{lj}(x) \in \{\widetilde{a}, \widetilde{b}\}_1$, $K_{lj}(z) = F_z k_{lj}$, $l, j \in \overline{1,2}$, $\widetilde{a} = \min(a, b)$, $\widetilde{b} = \max(a, b)$, $\widetilde{K}_{11}(z) = \lambda_1 + K_{11}(z)$, $\widetilde{K}_{22}(z) = \lambda_2 + K_{22}(z)$. Оператор $T : X \to X$ определим равенством

$$T\widehat{f} = \begin{pmatrix} W_+(\widetilde{K}_{11}) & U_1(K_{12}) \\ U_2(K_{21}) & W_-(\widetilde{K}_{22}) \end{pmatrix} \widehat{f}, \tag{2}$$

где

$$W_+(\widetilde{K}_{11}) = P_+ C(\widetilde{K}_{11}) P_+, \; W_-(\widetilde{K}_{22}) = P_- C(\widetilde{K}_{22}) P_-, \; U_1(K_{12}) = P_+ C(K_{12}) P_-,$$

$$U_2(K_{21}) = P_- C(K_{21}) P_+, \; C(K_{lj}) \in \operatorname{End}\{a, b\}_E.$$

Частными случаями оператора T являются операторы:

$$C(\widetilde{K}) \; (k_{lj}(x) = k(x), \; l, j \in \overline{1,2}, \; \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda),$$

$$W_+(\widetilde{K}) \; (k_{11}(x) = k(x), \; k_{12}(x) = k_{21}(x) = k_{22}(x) = 0, \; \lambda_1 = \lambda, \; \lambda_2 = 0),$$

$$W_-(\widetilde{K}) \; (k_{22}(x) = k(x), \; k_{12}(x) = k_{21}(x) = k_{11}(x) = 0, \; \lambda_2 = \lambda, \; \lambda_1 = 0).$$

Следующий критерий фредгольмовости оператора T принадлежит И.А. Фельдману [2, Дополнение].

Теорема 1. *Пусть оператор T имеет вид* (2). *Для того чтобы $T \in \Phi(X)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\inf_{z \in R_{\widetilde{a}}} |\widetilde{K}_{11}(z)| > 0, \qquad \inf_{z \in R_{\widetilde{b}}} |\widetilde{K}_{22}(z)| > 0. \tag{3}$$

Если условия (3) *выполнены, то*

$$\operatorname{ind} T = \operatorname*{ind}_{z \in R_{\widetilde{b}}} \widetilde{K}_{22}(z) - \operatorname*{ind}_{z \in R_{\widetilde{a}}} \widetilde{K}_{11}(z). \tag{4}$$

Доказательство. Доказательство теоремы содержится в [2, стр. 310–312] и основано на следующем представлении оператора (2): $T = D + K$, где

$$D = \begin{pmatrix} W_+(\widetilde{K}_{11}) & 0 \\ 0 & W_-(\widetilde{K}_{22}) \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & U_1(K_{12}) \\ U_2(K_{21}) & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом представлении оператор K является компактным ввиду компактности операторов $U_1(K_{12})$, $U_2(K_{21})$. $\square$

В качестве следствия теоремы 1 получаем следующий критерий фредгольмовости оператора свёртки $C(\widetilde{K})$.

Теорема 2. *Пусть $k(x) \in \{\widetilde{a}, \widetilde{b}\}_1$. Для того, чтобы оператор $C(\widetilde{K})$ вида* (1), *где $\widetilde{K}(z) \in \mathbb{W}(\overline{\Pi}_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}})$ и имеет вид (17) из [1], был Φ-оператором в пространстве*

$\{a,b\}_E$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\inf_{z\in\partial\overline{\Pi}_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}}} |\widetilde{K}(z)| > 0 \tag{5}$$

Если последнее условие выполнено, то

$$\operatorname{ind}\ C(\widetilde{K}) = \operatorname*{ind}_{z\in R_{\widetilde{b}}} \widetilde{K}(z) - \operatorname*{ind}_{z\in R_{\widetilde{a}}} \widetilde{K}(z) = \operatorname*{ind}_{z\in\partial\overline{\Pi}_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}}} \widetilde{K}(z). \tag{6}$$

Замечание 1. Здесь предполагается, что граница $\partial\overline{\Pi}_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}}$ полосы $\overline{\Pi}_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}}$ ориентирована таким образом, что область $\Pi_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}}$ находится от неё слева.

3. Алгебра $C\{a,b\}_E$. Обратимость и односторонняя обратимость

Через $C\{a,b\}_E$ будем обозначать алгебру операторов свёртки $C(\widetilde{K})$ вида (1), действующих в пространстве $\{a,b\}_E$, где $\lambda \in C,\ k(x) \in \{\widetilde{a},\widetilde{b}\}_1,\ \widetilde{a} = \min(a,b),\ \widetilde{b} = \max(a,b)$. Функцию $\widetilde{K}(z)$ вида (17) из [1] будем называть символом оператора $C(\widetilde{K})$. Вначале рассмотрим проблему двусторонней обратимости оператора $C(\widetilde{K})$.

Теорема 3. *Для того чтобы оператор* $C(\widetilde{K})$ *вида* (1) *был обратимым в пространстве* $\{a,b\}_E$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\inf_{z\in\overline{\Pi}_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}}} \widetilde{K}(z) > 0. \tag{7}$$

Если условие (7) *выполняется, то оператор* $\left[C(\widetilde{K})\right]^{-1}$ *имеет вид*

$$\left[C(\widetilde{K})\right]^{-1} = C(\widetilde{K}^{-1}) = \lambda^{-1}I + C(L), \tag{8}$$

где

$$L(z) = F_z l,\ l = F_z^{-1}\left[(1/\widetilde{K}(z)) - \lambda^{-1}\right] \in \{\widetilde{a},\widetilde{b}\}_1. \tag{9}$$

Доказательство. *Необходимость.* Так как обратимый оператор является Ф-оператором, необходимость условия (5) является следствием теоремы 2. Необходимость условия $\widetilde{K}(z) \neq 0,\ z \in \Pi_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}}$ является следствием теорем 4 и 5, из которых вытекает, что при нарушении этого условия у оператора $C(\widetilde{K})$ появляется нетривиальное ядро или коядро.

Достаточность. Пусть $a < b,\ p = 2$. Оператор $C(\widetilde{K})$ в пространстве $\{a,b\}_2$ подобен оператору $M(\widetilde{K}) = \widetilde{K}(z)I$ в пространстве $H_2(\overline{\Pi}_a^b),\ M(\widetilde{K}) = F_z C(\widetilde{K}) F_z^{-1}$. Поскольку $\widetilde{K}(z) \in \mathcal{W}(\overline{\Pi}_a^b)$ и выполнено условие (7), то по теореме 3 из [1] $\widetilde{L}(z) = 1/\widetilde{K}(z) \in \mathcal{W}(\overline{\Pi}_a^b)$ и, следовательно, оператор $M(\widetilde{K})$ обратим. В силу следствия 3 из [1] его обратный оператор имеет вид

$$\left[M(\widetilde{K})\right]^{-1} = M(\widetilde{K}^{-1}) = M(\widetilde{L}) = M(\lambda^{-1} + L(z)),$$

где

$$L(z) = (\widetilde{K}(z))^{-1} - \lambda^{-1}.$$

Но тогда оператор $C(\widetilde{K})$ обратим в пространстве $\{a, b\}_2$, а его обратный оператор имеет вид (8), (9).

Если же $1 \leqslant p < \infty$, то в силу следствий 1 и 2 из [1] $\left[C(\widetilde{K})\right]^{-1} \in \operatorname{End}\{a, b\}_p$. Кроме того, на пространстве $\{a.b\}_2$ справедливы равенства

$$C(\widetilde{L}) \cdot C(\widetilde{K}) = C(\widetilde{K}) \cdot C(\widetilde{L}) = I. \tag{10}$$

Поскольку в $\{a, b\}_2$ можно выделить счётное множество $\mathfrak{M}$, общее для всех пространств $\{a, b\}_p,\ 1 \leqslant p < \infty$, и такое, что $\operatorname{clos}\ \mathfrak{M} = \{a, b\}_p$ [6, стр. 146], то по непрерывности равенства (10) распространяются на пространство $\{a, b\}_p,\ 1 \leqslant p < \infty$.

Пусть $b < a$. Оператор $C(\widetilde{K}) \in C\{a, b\}_p,\ 1 \leqslant p < \infty$, обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор [6, стр. 460]:

$$\left[C(\widetilde{K})\right]^* \in C\{-a, -b\}_q,\ q = \frac{p}{p-1},\ 1 \leqslant q < \infty.$$

При этом оператор

$$\left(\left[C(\widetilde{K})\right]^*\right)^{-1} = \left(\left[C(\widetilde{K})\right]^{-1}\right)^*.$$

Нетрудно проверить, что

$$\left[C(\widetilde{K})\right]^* = C(\widetilde{K}^*),$$

где

$$\widetilde{K}^*(z) = \overline{\lambda} + K^*(z) = \overline{\lambda} + F_z\overline{k(-x)} = \overline{\widetilde{K}(\overline{z})} \in \mathcal{W}(\overline{\Pi}_{-\widetilde{b}}^{-\widetilde{a}}).$$

Так как условие $\inf\limits_{z \in \overline{\Pi}_b^a} |\widetilde{K}(z)| > 0$ равносильно условию $\inf\limits_{z \in \overline{\Pi}_{-a}^{-b}} |\overline{\widetilde{K}(\overline{z})}| > 0$, то оператор $C(\widetilde{K}^*)$ по доказанному выше обратим в пространстве $\{-a, -b\}_q,\ 1 \leqslant q < \infty$, а его обратный оператор имеет вид

$$\left[C(\widetilde{K}^*)\right]^{-1} = C\left[(\widetilde{K}^*)^{-1}\right] = C(\widetilde{L}^*).$$

Следовательно, оператор $C(\widetilde{K})$ обратим в алгебре $C\{a, b\}_p,\ 1 < p \leqslant \infty$, а его обратный оператор имеет вид

$$\left[C(\widetilde{K})\right]^{-1} = C(\widetilde{L}).$$

Так как равенство (10) выполняется на пространстве $\{a,b\}_p,\ 1 < p \leqslant \infty$, а $\mathfrak{M} \subset \{a,b\}_1$, то оно выполняется и на пространстве $\{a,b\}_1$. Кроме того, поскольку равенство (10) выполняется на пространстве $\{a,b\}_\infty$, оно верно и на его подпространствах $\{a,b\}_{c_0}$ и $\{a,b\}_c$. Таким образом, в случае $b < a$ теорема доказана.

Вернёмся к случаю $a < b,\ p = \infty$. Поскольку условие (7) выполнено и $-a > -b$, оператор $C(\widetilde{K}^*)$ обратим в пространстве $\{-a,-b\}_1$. Но пространство $\{-a,-b\}_1$ является предсопряжённым к пространству $\{a,b\}_\infty$. Поэтому [6, стр.460] оператор $C(\widetilde{K}) = \left[C(\widetilde{K}^*)\right]^*$ обратим в пространстве $\{a,b\}_\infty$, а оператор $\left[C(\widetilde{K})\right]^{-1}$ имеет вид (8), (9). □

В дальнейшем линейный оператор будем называть *обратимым строго слева (справа)*, если он обратим слева (справа), но необратим.

Теорема 4. *Для того чтобы оператор $C(\widetilde{K})$ вида (1) был обратимым строго слева Φ-оператором в пространстве $\{a,b\}_E$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $a < b$ и*

$$\inf_{z \in \partial \overline{\Pi}_a^b} |\widetilde{K}(z)| > 0.$$

Если эти условия выполнены и

$$\widetilde{K}(z) \neq 0,\ z \in \Pi_a^b, \tag{11}$$

оператор $C(\widetilde{K})$ обратим. В противном случае

$$\widetilde{K}(z) = \widetilde{\Omega}(z)\widetilde{K}_1(z), \tag{12}$$

где $\widetilde{K}_1(z) \in G\mathcal{W}(\overline{\Pi}_a^b)$, $\widetilde{\Omega}(z)$ имеет вид (12) из [1]. При этом оператор $C(\widetilde{K})$ обратим строго слева, а его левый обратный оператор имеет вид

$$\left[C(\widetilde{K})\right]^{-1} = C(\widetilde{K}^{-1})\widetilde{N}, \tag{13}$$

где

$$\widetilde{N} = \prod_{k=1}^{m} \widetilde{N}_k^{n_k} = \prod_{k=1}^{m} (I + (z_k - z_0)\ N_k)^{n_k}, \tag{14}$$

$$N_k f = P_+(ie_-^{-itz_k} * P_+ f) - P_-(ie_+^{-itz_k} * P_- f). \tag{15}$$

Кроме того,

$$\dim \operatorname{Coker} C(\widetilde{K}) = n = \sum_{k=1}^{m} n_k, \tag{16}$$

а для того чтобы $f \in \operatorname{Im} C(\widetilde{K})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^j e^{itz_k} f(t)\,\mathrm{d}t,\ j \in \overline{0, n_k - 1},\ k \in \overline{1, m}, \tag{17}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть оператор $C(\widetilde{K})$ является обратимым строго слева Φ-оператором. Тогда по теореме 2 выполняется условие (5).

Следовательно, $a < b$, так как если $a = b$, то $\inf\limits_{z\in R_a} \widetilde{K}(z) > 0$ и поэтому оператор $C(\widetilde{K})$ обратим в пространстве $\{a,a\}_E$. Если же $a > b$, то при выполнении условия $\widetilde{K}(z) \neq 0,\ z \in \Pi_a^b$ оператор $C(\widetilde{K})$ по теореме 3 обратим в пространстве $\{a,b\}_E$, а при нарушении последнего условия — обратим строго справа в этом пространстве (теорема 5).

Достаточность. Пусть $a < b$ и выполнено условие (11). Тогда по теореме 3 оператор $C(\widetilde{K})$ обратим в пространстве $\{a,b\}_E$. Если условие (11) нарушено, тогда по теореме 4 из [1] символ $\widetilde{K}(z)$ допускает представление (12), а оператор $C(\widetilde{K})$ распадается в композицию

$$C(\widetilde{K}) = C(\widetilde{\Omega})C(\widetilde{K}_1),$$

где оператор $C(\widetilde{K}_1)$ обратим, а $\widetilde{\Omega}(z)$ имеет вид (12) из [1].

Повторяя рассуждения, проведённые при доказательстве утверждения 1 из [1], покажем, что оператор N_k вида (14) ограничен в пространстве $\{a,b\}_E$. Для этого подберём такое $\epsilon > 0$, что $\operatorname{Im} z_k \pm \epsilon \in (a,b)$. Тогда

$$ie_+^{-iz_kt} = P_+ie^{-iz_kt} = e^{(y_k+\epsilon)t}\cdot ie^{-ix_kt}\cdot e_+^{-\epsilon t} \in \{y_k+\epsilon,\infty\}_1.$$

Но $P_-f \in \{-\infty,b\}_E$. Поэтому по теореме 1 из [1]

$$ie_+^{-iz_kt} * P_-f \in \{y_k+\epsilon, b\}_E \Rightarrow P_-(ie_+^{-iz_kt} * P_-f) \in \{-\infty,b\}_E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|N_kP_-f\|_{\{b\}_E} \leqslant \|ie_+^{-iz_kt}\|_{\{y_k+\epsilon\}_1}\cdot\|P_-f\|_{\{b\}_E}.$$

Аналогично, используя теорему 1 из [1], получаем, что

$$ie_-^{-iz_kt} = P_-ie^{-iz_kt} = e^{(y_k-\epsilon)t}\cdot ie^{-ix_kt}\cdot e_-^{\epsilon t} \in \{-\infty, y_k-\epsilon\}_1,\ P_+f \in \{a,\infty\}_E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ie_-^{-iz_kt} * P_+f \in \{a, y_k-\epsilon\}_E \Rightarrow P_+(ie_-^{-iz_kt} * P_+f) \in \{a,\infty\}_E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|N_kP_+f\|_{\{a\}_E} \leqslant \|ie_-^{-iz_kt}\|_{\{y_k-\epsilon\}_1}\cdot\|P_+f\|_{\{a\}_E}.$$

Поэтому

$$\|N_kf\|_{\{a,b\}_E} \leqslant \|ie^{-iz_kt}\|_{\{y_k+\epsilon, y_k-\epsilon\}_1}\cdot\|f\|_{\{a,b\}_E}.$$

Откуда следует, что оператор $\widetilde{N}$ вида (14) также ограничен в пространстве $\{a,b\}_E$.

Пусть $g = C(\widetilde{\Omega}_k)f,\ \widetilde{\Omega}_k(z) = \dfrac{z-z_k}{z-z_0},\ f \in \{a,b\}_1$. Из равенства (15) из [1] следует, что

$$F_z(\widetilde{N}_k\ g) = F_zg + (z_k - z_0)\cdot F_z(N_k\ g) = \frac{(z-z_0)F_zg - (z_k-z_0)F_{z_k}g}{z-z_k}.$$

Так как $F_zg = \widetilde{\Omega}_k(z)\cdot F_zf,\ F_{z_k}g = 0$, то $F_z(\widetilde{N}_k\ C(\widetilde{\Omega}_k)\ f) = F_zf \Leftrightarrow \widetilde{N}_kC(\widetilde{\Omega}_k) = I$ на $\{a,b\}_1$. Но тогда на пространстве $\{a,b\}_1$ справедливо равенство $\widetilde{N}\cdot C(\widetilde{\Omega}) = I$. В частности, это равенство справедливо на множестве $\mathfrak{M}$. Поэтому по непрерывности оно продолжается на пространство $\{a,b\}_p,\ 1 \leqslant p < \infty$. Отсюда следует, что оператор вида (13) является левым обратным для оператора $C(\widetilde{K})$ в пространстве $\{a,b\}_p,\ 1 \leqslant p < \infty$.

Отложив на время случай $p = \infty$, заметим, что в пространстве $\{a,b\}_1$ условие $f \in \operatorname{Im}\ C(\widetilde{K})$ в силу теоремы 4 из [1] равносильно выполнению условий (17), а число dim Coker $C(\widetilde{K}) = \dim \operatorname{Ker} C^*(\widetilde{K}) = -\operatorname{ind} C(\widetilde{K})$ определяется формулой (16). Так как по теореме 2 ind $C(\widetilde{K})$ во всех пространствах $\{a,b\}_E$ одинаков, а функционалы

$$t^j e^{-it\overline{z_k}} = t^j e^{-itx_k}\Big(e^{-at}\cdot e_+^{(a-y_k)t} + e^{-bt}\cdot e_-^{(b-y_k)t}\Big) \in \{a,b\}_p^*,$$

$$1 \leqslant p < \infty,\ j \in \overline{0, n_k-1},\ k \in \overline{1,m},$$

то условия (17) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы $f \in \operatorname{Im} C(\widetilde{K})$ в пространстве $\{a,b\}_p,\ 1 \leqslant p < \infty$. □

Теорема 5. *Для того чтобы оператор $C(\widetilde{K})$ вида* (1) *был обратимым строго справа Φ-оператором в пространстве $\{a,b\}_E$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $a > b$ и* (5).

Если эти условия выполнены и $\widetilde{K}(z) \neq 0,\ z \in \Pi_b^a$, то оператор $C(\widetilde{K})$ обратим. В противном случае справедливо представление (12)*, где $\widetilde{K}_1(z) \in G\mathcal{W}(\overline{\Pi}_b^a)$, а $\widetilde{\Omega}(z)$ имеет вид (12) из [1], где $z_k \in \Pi_b^a$. При этом оператор $C(\widetilde{K})$ обратим строго справа, а его правый обратный оператор имеет вид* (13)*, где*

$$\widetilde{N} = \prod_{k=1}^{m} \widetilde{N}_k^{\,n_k} = \prod_{k=1}^{m}\Big(I - (z_k - z_0)N_k\Big)^{n_k}, \tag{18}$$

$$N_k f = (ie_+^{-itz_k} * P_+ f) - (ie_-^{-itz_k} * P_- f). \tag{19}$$

Кроме того,

$$\dim \operatorname{Ker} C(\widetilde{K}) = n = \sum_{k=1}^{m} n_k, \tag{20}$$

а базис в Ker $C(\widetilde{K})$ *образует система функций*

$$f_{jk}(t) = t^j e^{-itz_k},\ j \in \overline{0, n_k-1},\ k \in \overline{1,m}. \tag{21}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть оператор $C(\widetilde{K})$ является обратимым строго справа Φ-оператором. Тогда по теореме 2 выполняется условие (5). Следовательно, $a > b$, так как если $a = b$, то $\inf\limits_{z \in R_a} \widetilde{K}(z) > 0$ и поэтому оператор $C(\widetilde{K})$ обратим в пространстве $\{a,a\}_E$. Если же $a < b$, то верна теорема 4.

Достаточность. Пусть $a > b$ и выполнено условие

$$\inf_{z \in \partial\overline{\Pi}_b^a} |\widetilde{K}(z)| > 0. \tag{22}$$

В пространстве $\{-a,-b\}_q,\ 1 \leqslant q < \infty$, рассмотрим оператор $C(\widetilde{K}^{\,*})$, где

$$\widetilde{K}^{\,*}(z) = \overline{\widetilde{K}(\overline{z})} \in \mathcal{W}(\overline{\Pi}_{-a}^{-b}).$$

Заметим, что $-a < -b$, условие (22) равносильно условию

$$\inf_{z\in\partial\overline{\Pi}_{-a}^{-b}} |\widetilde{K}^*(z)| > 0, \tag{23}$$

а условие $\widetilde{K}(z) \neq 0,\ z \in \Pi_b^a$ равносильно условию

$$\widetilde{K}^*(z) \neq 0,\ z \in \Pi_{-a}^{-b}. \tag{24}$$

Поэтому по теореме 4 оператор $C(\widetilde{K}^*)$ обратим в пространстве $\{-a,-b\}_q,\ 1 \leqslant q < \infty$, а оператор $\Big[C(\widetilde{K}^*)\Big]^{-1} = C\Big([\widetilde{K}^*]^{-1}\Big)$. Но тогда оператор $C(\widetilde{K}) = \Big[C(\widetilde{K}^*)\Big]^*$ обратим в пространстве $\{a,b\}_p = \{-a,-b\}_q^*,\ 1 < p \leqslant \infty$, а $\Big[C(\widetilde{K})\Big]^{-1} = C(\widetilde{K}^{-1})$. Поскольку равенства

$$C(\widetilde{K}) \cdot C(\widetilde{K}^{-1}) = C(\widetilde{K}^{-1})C(\widetilde{K}) = I$$

верны на пространстве $\{a,b\}_p,\ 1 < p < \infty$, то они выполняются на множестве $\mathfrak{M}$, всюду плотном в пространстве $\{a,b\}_1$, и по непрерывности продолжаются на все пространство $\{a,b\}_1$. Таким образом, оператор $C(\widetilde{K})$ обратим в пространстве $\{a,b\}_p,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Пусть теперь условие (22) нарушено в точках множества $\{z_k\}_{k=1}^m \subset \Pi_b^a$. Тогда по теореме 4 из [1] символ $\widetilde{K}(z)$ допускает представление (12), (13) из [1]. Поэтому условие (23) нарушается в точках $\{\overline{z_k}\}_{k=1}^m \subset \Pi_{-a}^{-b}$, а символ $\widetilde{K}^*(z)$ допускает представление $\widetilde{K}^*(z) = \widetilde{\Omega}^*(z) \cdot \widetilde{K}_1^*(z)$, где $\widetilde{K}_1^*(z) \in G\mathcal{W}(\overline{\Pi}_{-a}^{-b})$, а

$$\widetilde{\Omega}^*(z) = \prod_{k=1}^m \Big[\widetilde{\Omega}_k^*(z)\Big]^{n_k} = \prod_{k=1}^m \Big(\frac{z-\overline{z}_k}{z-\overline{z}_0}\Big)^{n_k},\ \operatorname{Im}\ \overline{z_0} < -a.$$

В пространстве $\{-a,-b\}_q,\ 1 \leqslant q < \infty$ рассмотрим оператор $C(\widetilde{\Omega}_k^*)$ где $\widetilde{\Omega}_k^*(z) = \dfrac{z-\overline{z_k}}{z-\overline{z_0}}$. По теореме 4 оператор $C(\widetilde{\Omega}_k^*)$ обратим слева, а его левый обратный оператор имеет вид

$$\Big[C(\widetilde{\Omega}_k^*)\Big]^{-1} = \widetilde{N}_k^* = I + (\overline{z_k} - \overline{z_0})N_k^*,\ N_k^* f = P_+(ie_-^{-it\overline{z_k}} * P_+ f) - P_-(ie_+^{-it\overline{z_k}} * P_- f).$$

Но тогда оператор $C(\widetilde{\Omega}_k)$, где $\widetilde{\Omega}_k(z) = \dfrac{z-z_k}{z-z_0}$, обратим справа в пространстве $\{a,b\}_p,\ 1 < p \leqslant \infty$, а его правый обратный оператор $\widetilde{N}_k$ имеет вид $\widetilde{N}_k = I - (z_k - z_0)N_k$, где оператор N_k определён равенством (19). Отсюда следует обратимость справа оператора $C(\widetilde{\Omega})$ и равенство $C(\widetilde{\Omega}) \cdot \widetilde{N} = I$ на пространстве $\{a,b\}_p,\ 1 < p \leqslant \infty$. Поскольку это равенство выполняется на множестве $\mathfrak{M}$, оно верно на пространстве $\{a,b\}_1$. Следовательно, оператор $C(\widetilde{K})$ обратим справа в пространстве $\{a,b\}_p,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$, а его правый обратный оператор имеет вид (13).

По теореме 4 в пространстве $\{-a,-b\}_2$ условие $f \in \mathrm{Im}\ C(\widetilde{K}^*)$ равносильно выполнению условий

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^j e^{it\overline{z_k}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0,\ j \in \overline{0, n_k - 1},\ k \in \overline{1, m},$$

а число $\dim\ \mathrm{Coker}\, C(\widetilde{K}^*) = \dim\ \mathrm{Ker}\ C(\widetilde{K}) = \mathrm{ind}\ C(\widetilde{K})$ определяется формулой (20). Так как по теореме 2 $\mathrm{ind}\ C(\widetilde{K})$ во всех пространствах $\{a,b\}_E$ одинаковый, а функции

$$t^j e^{-itz_k} = t^j e^{-itx_k}(e^{at}\cdot e_{+}^{(y_k-a)t} + e^{bt}\cdot e_{-}^{(y_k-b)t}) \in \{a,b\}_E,\ j \in \overline{0, n_k - 1},\ k \in \overline{1, m},$$

то система функций (21) образует базис в подпространстве $\mathrm{Ker}\ C(\widetilde{K})$. □

Замечание 2. Из теоремы 5 следует, что все утверждения теоремы 4 справедливы при $p = \infty$. В этом случае предсопряжённый к оператору $C(\widetilde{K})$ оператор $C(\widetilde{K}^*) \in \mathrm{End}\,\{-a,-b\}_1$ удовлетворяет условиям теоремы 5, обратим справа и т.д.

4. Заключение

В этой работе (части 1 и 2) представлены результаты, которые предваряют изучение составных операторов

$$\Pi^\tau = C(\widetilde{K}_1)P_+ + C(\widetilde{K}_2)P_-,\ \Pi = P_+C(\widetilde{K}_1) + P_-C(\widetilde{K}_2)$$

в пространствах $\{a,b\}_E$. В отличие от случая пространств E (см. [2, гл. 5]) последняя задача становится нетривиальной. Пояснения приведём для оператора Π^τ при $a < b$.

Символ $\left(\widetilde{K}_1(z), \widetilde{K}_2(z)\right)$ оператора Π^τ в этом случае состоит из функций, аналитических в полосе Π_a^b и непрерывных в её замыкании $\overline{\Pi}_a^b$. Оператор Π^τ является частным случаем оператора $T(\widetilde{K}_{11} = \widetilde{K}_{12} = \widetilde{K}_1,\ \widetilde{K}_{21} = \widetilde{K}_{22} = \widetilde{K}_2)$ и по теореме 1 является Ф-оператором тогда и только тогда, когда компонента $\widetilde{K}_1$ его символа не вырождается на нижней границе R_a, а компонента $\widetilde{K}_2$ — на верхней границе R_b полосы Π_a^b. Но тогда компоненты $\widetilde{K}_1(z),\ \widetilde{K}_2(z)$ символа Ф-оператора Π^τ могут не только вырождаться на «свободных» для них границах, но и иметь весьма богатые множества нулей внутри полосы, сгущающиеся к точкам «свободных» границ. Отсюда следует, что стандартная процедура обращения оператора Π^τ [2, гл. 5] здесь неприменима. Кроме того, в классе Ф-операторов появляются операторы Π^τ, которые имеют одновременно нетривиальные дефектные подпространства и поэтому обратимы лишь обобщённо. В связи с этим к задаче изучения операторов Π^τ и Π в пространствах $\{a,b\}_E$ мы вынуждены вернуться в другом месте. Дискретный вариант этой задачи рассмотрен в работах [4, 5].

Литература

1. *Дыбин В. Б.* Уравнение свертки на вещественной прямой в пространстве функций, суммируемых с экспоненциальными весами. Часть 1 // Вестник РУДН.

Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2011. — № 2. — С. 16–27. [Dybin V. B. Uravnenie svertki na vethestvennoyj pryamoyj v prostranstve funkciyj, summiruemihkh s ehksponencialjnihmi vesami. Chastj 1 // Vestnik RUDN. Seriya «Matematika. Informatika. Fizika». — 2011. — No 2. — S. 16–27.]

2. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. — М.: Наука, 1971. — 352 с. [*Gokhberg I. C., Feljdman I. A.* Uravneniya v svertkakh i proekcionnihe metodih ikh resheniya. — M.: Nauka, 1971. — 352 s.]
3. *Дыбин В. Б., Джиргалова С. Б.* Оператор дискретной свертки в пространстве $\{\alpha, \beta\}_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$ // Известия вузов, Северо – Кавказский регион, Ест. науки, Приложение. — 2003. — № 9. — С. 3–16. [Dybin V. B., Dzhirgalova S. B. Operator diskretnoyj svertki v prostranstve $\{\alpha, \beta\}_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$ // Izvestiya vuzov, Severo – Kavkazskiyj region, Est. nauki, Prilozhenie. — 2003. — No 9. — S. 3–16.]
4. *Дыбин В. Б., Джиргалова С. Б.* Скалярные составные дискретные свертки в пространстве $\{\alpha, \beta\}_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$. Односторонняя обратимость // Известия вузов, Северо – Кавказский регион, Ест. науки, Спецвыпуск, Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики. — 2005. — С. 56–63. [Dybin V. B., Dzhirgalova S. B. Skalyarnihe sostavnihe diskretnihe svertki v prostranstve $\{\alpha, \beta\}_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$. Odnostoronnyaya obratimostj // Izvestiya vuzov, Severo – Kavkazskiyj region, Est. nauki, Specvihpusk, Psevdodifferencialjnihe uravneniya i nekotorihe problemih matematicheskoyj fiziki. — 2005. — S. 56–63.]
5. *Дыбин В. Б., Джиргалова С. Б.* Составные дискретные свертки в пространстве $\{\alpha, \beta\}_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$, Часть 2 // РГУ- Ростов-на-Дону, Деп. в ВИНИТИ 12.11.03. — 2003. — № 1946. [Dybin V. B., Dzhirgalova S. B. Sostavnihe diskretnihe svertki v prostranstve $\{\alpha, \beta\}_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$, Chastj 2 // RGU- Rostov-na-Donu, Dep. v VINITI 12.11.03. — 2003. — No 1946.]
6. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — 2 издание. — М.: Наука, 1977. — 741 с. [*Kantorovich L. V., Akilov G. P.* Funkcionaljnihyj analiz. — 2 издание. — M.: Nauka, 1977. — 741 s.]

UDC 517.9

The Convolution Type Equation on R in Space of Functions those are Summed with Exponential Weights. Part 2

V. B. Dybin

Chair Algebra and Disscrete Mathematics
Southern Federal University
105/42, Bolshaya Sadovaya Str., Rostov-on-Don, 344006, Russia

In this paper (parts 1 and 2) the theory of one-sided invertibility of the convolution operator on R in space of functions those are summed with exponential weights is considered. In part 2 a I.A. Feldman construction providing the solution of a Fredholm problem for the considered convolution operator is contained. After the results of the invertibility (two-, left- and right-sided) of this operator are represented. The description of its defect subspaces and the constructions of its inverse operators is given.

Key words and phrases: convolution operator, symbol, weight space, invertibility, defect subspaces.