УДК 513.831

О просто-открытых множествах

В. Л. Клюшин, Аль Баяти Джелал Хатем Хуссейн

Кафедра высшей математики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, 117198, Россия

В статье изучаются множества, являющиеся объединениями открытых и нигде не плотных множеств. Такие множества называются просто-открытыми. Установлены связи просто-открытых множеств с регулярно-открытыми, локально-замкнутыми, полуоткрытыми множествами, α-множествами. Доказано, что класс просто-открытых множеств совпадает с классом δ-множеств.

Ключевые слова: просто-открытое множество, полуоткрытое множество, регулярно-открытое множество, локально-замкнутое множество, δ-множество.

1. Введение и предварительные сведения

Пусть (X, T) топологическое пространство. Для подмножества $S \subset X$ замыкание, внутренность и дополнение множества S по отношению к (X, T) будем обозначать через $\operatorname{cl} S$, $\operatorname{int} S$ и S^c соответственно.

Ранее было введено понятие просто-открытого множества, вызвавшее определённый интерес. Согласно Neubrunnovia подмножество S пространства называется просто-открытым, если S= $O \cup N$, где O открыто а N нигде не плотно. Ganster, Reilly и Vamanmurthy показали, что подмножество S пространства (X, T) является просто-открытым тогда и только тогда, когда оно есть пересечение полуоткрытого и полузамкнутого множеств пространства (X, T).

В [1] и [2] просто-открытые множества названы полулокально-замкнутыми и NDB-множествами, соответственно.

Nour в [3] назвал подмножество S пространства (X, T) регулярно-открытым (соотв., регулярно-замкнутым), если $S = \operatorname{int}(\operatorname{cl} S)$ (соотв., $S = \operatorname{cl}(\operatorname{int} S)$). Подмножество S пространства (X, T) называется полурегулярным, если существует такое регулярное открытое множество U, что $U \subset S \subset \operatorname{cl} U$.

Подмножество S пространства $4(X, T)$ называется локально-замкнутым, если $S = O \cap F$, где O — это открытое, а F — замкнутое подмножество пространства (X, T).

Определение 1. Подмножество S пространства X называется:
- полуоткрытым [4], если $S \subset \operatorname{cl}(\operatorname{int} S)$,
- α-множеством [5], если $S \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(\operatorname{int} S))$,
- δ-множеством [6], если $\operatorname{int}(\operatorname{cl} S) \subset \operatorname{cl}(\operatorname{int} S)$,
- приоткрытым, если$S \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl} S)$,
- полуприоткрытым если $S \subset \operatorname{cl}(\operatorname{int}(\operatorname{cl} S)$,
- S-приоткрытым, если S приоткрыто и $S = O \cap B$, где O есть открытое множество и $\operatorname{int} B = \operatorname{int}(\operatorname{cl}(\operatorname{int} B))$.

Дополнение полуоткрытого (соотв., локально замкнутого) множества S называется полузамкнутым (соотв., ко-локально конечным) множеством. Иначе говоря, S полузамкнуто (соотв., ко-локально конечно), если $\operatorname{int}(\operatorname{cl} S) \subset S$ (соотв., $S = O \cup F$, где O открыто, а F замкнуто и nwd).

Семейства полуоткрытых, полузамкнутых, локально замкнутых множеств и α-множеств в (X, T) будут обозначаться соответственно через $SO(X, T)$, $SC(XT)$, $LC(XT)$, и T^α. Njasted [5] показал,что T^α есть топология на X со следующими свойствами: $T^\alpha \subset T$, $(T^\alpha)^\alpha = T^\alpha$ и $S \in T^\alpha$, и тогда и только тогда, когда всякое nwd-множество в (X, T) замкнуто.

Статья поступила в редакцию 5 мая 2011 г.

2. Некоторые свойства просто-открытых множеств

Теперь рассмотрим класс обобщённых открытых множеств.

Определение 2 (см. [7]). Подмножество S пространства (X, T) называется *просто-открытым*, если $S = O \cup N$, где O открыто, а N есть nwd-подмножество множества X. Класс всех просто-открытых множеств в X будем обозначать через $SMO(X, T)$.

Лемма 1. *Пусть (X, T) – пространство и $S \subset X$. Тогда S есть просто-открытое множество, если S есть пересечение полуоткрытого и полузамкнутого подмножеств в X.*

Предложение 1. Пусть S – просто-открытое, а O – открытое множество в пространстве (X, T). Тогда $S \cap O$ есть просто-открытое множество.

Доказательство. Согласно лемме 1, $S = G \cap F$, где G есть полуоткрытое, а F — подпространство пространства (X, T). Тогда $S \cap O = (G \cap O) \cap F$, но мы знаем, что пересечение открытого и полуоткрытого множеств полуоткрыто, из чего и следует справедливость данного утверждения.

Предложение 2. Пусть S – просто-открытое, а O_1 — открытое множество в (X, T). Тогда $S \cup O_1$ есть просто-открытое множество.

Доказательство. Согласно определению 1, $S = O_2 \cup N$, где O_2 — открытое множество, а N есть nwd-множество. Следовательно, $S \cup O_2 = (O_1 \cup O_2) \cup N$, что и доказывает наше утверждение.

Тем же путём, каким было доказано предложение 1, можно доказать следующее предложение.

Предложение 3. Пересечение просто-открытого и просто-замкнутого подмножеств пространства (X, T) является просто-открытым.

Предложение 4. Пусть S – просто-открытое подмножество пространства (X, T). Тогда существует такое нетривиальное открытое подмножество O, что $S \subset \operatorname{cl} O$.

Доказательство. Согласно лемме 1, $S = G \cap F$, где G – полуоткрыто, а F – полузамкнуто в (X, T). Тогда $S \subset G$, но в [7] доказано, что если G есть полуоткрытое множество, то существует такое открытое множество O, что $O \subset G \subset \operatorname{cl} O$. Следовательно, $S \subset \operatorname{cl} O$.

Ясно, что всякое открытое (соотв., nwd) подмножество пространства (X, T) является полуоткрытым (соотв., полузамкнутым), и это доказывает следующее предложение.

Предложение 5. Если S – просто-открытое подмножество пространства (X, T), то S есть объединение полуоткрытого и полузамкнутого подмножеств пространства (X, T).

Andrijevic [8] заметил, что $SO(X, T) = SO(X, T^\alpha)$ и что $N \subset X$ есть nwd в (X, T^α) тогда и только тогда, когда N есть nwd в (X, T). Таким образом, мы имеем следующее предложение.

Предложение 6. Если S есть просто-открытое подмножество пространства (X, T), то X является просто-открытым в пространстве (X, T^α).

Лемма 2. *Если N есть nwd в (X, T), то $\operatorname{int} N$ также есть nwd.*

Из леммы 2 получаем следующее предложение.

Предложение 7. Если S есть просто-открытое подмножество пространства (X, T), то существует просто-открытое собственное подмножество множества S.

3. Соотношения между просто-открытыми множествами и другими обобщениями открытых множеств

Теорема 1. *Всякое полуоткрытое подмножество пространства* (X,T) *есть просто-открытое множество.*

Доказательство. Пусть A – полуоткрытое подмножество пространства (X,T). Как показано в [4], существует такое открытое множество O, что $O \subset A \subset \operatorname{cl} O$. Но $A = O \cup A \setminus O$. Пусть $B = A \setminus O$. Тогда $B \subset \operatorname{cl} O \setminus O$. Теперь нам остаётся только доказать, что B есть nwd в X. Имеем $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(\operatorname{cl} O \setminus O)) =(\operatorname{int}(\operatorname{cl}(\operatorname{cl} O \cap O^c))) \subset (\operatorname{int}(\operatorname{cl} O \cap \operatorname{cl} O^c)) = (\operatorname{int}(\operatorname{cl} O \cap (\operatorname{int} O)^c)) \subset (\operatorname{cl} O \cap \operatorname{int}(\operatorname{int} O)) = (\operatorname{cl} O \cap (\operatorname{cl} O^c)) = \emptyset$. Итак, $\operatorname{cl} O \setminus O$ есть nwd но $B \subset ((\operatorname{cl} O) \setminus O)$, следовательно, B есть nwd. Теорема доказана.

Замечание 1. Как показывают приведённые ниже примеры, утверждение, обратное теореме 1, вообще говоря, неверно.

Пример 1. ПустьX – пространство натуральных чисел и $S = (a,b) \cup \{1\}$. Тогда S есть просто-открытое множество, так как (a,b) открыто, а $\{2\}$ есть, очевидно, nwd-множество. Однако S не является полуоткрытым множеством.

Пример 2. ПустьX – плоскость и $S = \{(x,y) : 0 < x < 1$ и $0 < y < 1\}$ $\cup\{(x,0) : 1 \leq x \leq 2\}$. Ясно, что S есть просто-открытое, но не полуоткрытое множество.

Теорема 2. *Для пространства* (X,T) *и точки* $x \in X$ *следующие условия эквивалентны:*
(a) $\{x\} \in SO(X,T)$,
(b) $\{x\}$ *или открыто, или nwd,*
(c) $\{x\}$ *или полуоткрыто, или полузамкнуто.*

Доказательство.
$(a) \to (b)$. По определению 1 $\{x\}= O \cup N$, где O открыто, а N есть nwd-подмножество пространства (X,T). Тогда или $\{x\} = O$, или $\{x\} = N$.

$(b) \to (c)$. Доказательство следует из того, что каждое открытое множество является полуоткрытым, и каждое nwd-множество замкнуто.

$(c) \to (a)$. По теореме 1 каждое полуоткрытое множество является просто-открытым. Пусть $\{x\}$ — полузамкнутое множество. Тогда $\{x\} = \{x\} \cap X$ Следовательно, $\{x\}$ есть просто-открытое множество. □

Лемма 3. *Каждое полурегулярное подмножество пространства* (X,T) *есть просто-открытое множество.*

Доказательство. Очевидно.

Теорема 3. *Замыкание полуприоткрытого подмножества пространства* (X,T) *есть просто-открытое множество.*

Доказательство. Пусть S – полуприоткрытое подмножество пространства (X,T), тогда $\operatorname{cl} S \subset \operatorname{cl}(\operatorname{int}(\operatorname{cl} S))$, но $\operatorname{int}(\operatorname{cl} S)$ есть регулярное открытое множество и $\operatorname{int}(\operatorname{cl} S) \subset \operatorname{cl} S \subset \operatorname{cl}(\operatorname{int}(\operatorname{cl} S))$, тогда $\operatorname{cl} S$ есть полурегулярное множество, следовательно, по лемме 3 $\operatorname{cl} S$ есть просто-открытое множество.

Теорема 4. *Если* S *есть полуприоткрытое подмножество пространства* (X,T) *и* $\operatorname{int}(\operatorname{cl} S) \subset B \subset \operatorname{cl} S$, *то* B *есть просто-открытое множество.*

Доказательство. По теореме 7 $\operatorname{int}(\operatorname{cl} S) \subset B \subset \operatorname{cl} S \subset \operatorname{cl}(\operatorname{int}(\operatorname{cl} S))$. Тогда по лемме 3, B есть просто-открытое множество.

Теорема 5. *Каждое регулярно замкнутое подмножество пространства (X, T) есть просто-открытое множество.*

Доказательство. Пусть S – регулярно замкнутое подмножество пространства (X, T), $S = \mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\, S)$. Тогда S полуоткрыто, $\mathrm{cl}\, S \subset \mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\, S)$, тогда S полурегулярно. Следовательно, по лемме 3, S есть просто-открытое множество.

Предложение 8. Замыкание полуоткрытого подмножества пространства (X, T) есть просто-открытое множество.

Доказательство. Следует из того, что замыкание полуоткрытого множества есть регулярно замкнутое множество и из теоремы 5.

Предложение 9. Для всякого пространства (X, T) справедливы утверждения:
(i) каждое локально замкнутое множество является просто-открытым;
(ii) каждое ко-локально замкнутое множество является просто-открытым.

Предложение 10. Если $S \in LC(X, T^\alpha)$, то S есть просто-открытое множество.

Доказательство. Следует из того, что всякое полуоткрытое (соотв., полузамкнутое) подмножество пространства (X, T^α) есть полуоткрытое (соотв., полузамкнутое) подмножество пространства (X, T).

Теорема 6. *Пусть S – подмножество пространства (X, T). Тогда следующие условия эквивалентны:*
(a) S есть просто-открытое множество;
(b) S есть δ-множество.

Доказательство.
$(a) \to (b)$. По лемме 2 $S = G \cap F$, где G — полуоткрытое, а F — полузамкнутое множества. Тогда $\mathrm{int}\,(\mathrm{cl}\, S) \subset \mathrm{int}\,(\mathrm{cl}\, F) \subset F$, следовательно, $\mathrm{int}\,(\mathrm{cl}\, S) \subset \mathrm{int}\, F$. Так как $S \subset G \subset \mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\, G)$, то $\mathrm{cl}\, S \subset \mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\, G)$, следовательно, $\mathrm{int}\,(\mathrm{cl}\, S) \subset \mathrm{cl}\, S \subset \mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\, G)$. Поэтому из $\mathrm{int}\,(\mathrm{cl}\, S) \subset \mathrm{int}\, F$ и $\mathrm{int}\,(\mathrm{cl}\, S) \subset \mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\, G)$ мы имеем $\mathrm{int}\,(\mathrm{cl}\, S) \subset (\mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\, G) \cap \mathrm{int}\, F) \subset (\mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\, G \cap \mathrm{int}\, F)) = \mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\, G \cap F) = \mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\, S)$. Следовательно, S есть δ-множество.
$(b) \to (a)$. Имеем $\mathrm{int}\,(\mathrm{cl}\, S) \subset \mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\, S)$. Положим $O = \mathrm{int}\, S$,$N = S \backslash \mathrm{int}\, S$. Очевидно, $S = O \cup N$. Следовательно, согласно лемме 2, нам остаётся только доказать, что N есть nwd-множество. Так как $N \subset S$, то $\mathrm{int}\,(\mathrm{cl}\, N) \subset \mathrm{int}\,(\mathrm{cl}\, S) \subset \mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\, S)$, но $(\mathrm{int}\, S \cap \mathrm{cl}\, N) \subset \mathrm{cl}\,(N \cap \mathrm{int}\, S) = \mathrm{cl}\, \phi = \phi$. Тогда $\mathrm{int}\, S \cap \mathrm{cl}\, N = \phi$. Следовательно,$\mathrm{int}\, S \cap \mathrm{int}\,(\mathrm{cl}\, N) = \phi$ и $\mathrm{int}\,(\mathrm{cl}\, N) \cap \mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\, S) = \phi$, но $\mathrm{int}\,(\mathrm{cl}\, N) \subset \mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\, S)$, поэтому $\mathrm{int}\,(\mathrm{cl}\, N) = \phi$. Теорема доказана.

Лемма 4 (см. [6]). *Подмножество S пространства (X, T) открыто тогда и только тогда, когда S есть S-приоткрытое δ-множество.*

Из сформулированной выше леммы 4 легко следует

Предложение 11. Если S есть S-приоткрытое и просто-открытое подмножество пространства (X, T), то S полуоткрыто.

Теорема 7. *Пусть S – подмножество пространства (X, T), для которого существует такое регулярно открытое множество U, что $U \subset S \subset \mathrm{cl}\, U$. Тогда S есть просто-открытое множество.*

Доказательство. Мы знаем, что всякое регулярно открытое множество открыто. Поэтому S есть полуоткрытое множество [7]. Следовательно, по теореме 1 S есть просто-открытое множество.

Литература

1. *Sundaram P., Balachandran K.* Semi Generalized Locally Closed Sets in Topological Spaces. Preprint.
2. *Dub K. K., Chae G. L., Pan war O. S.* Some Properties of "S-Connectedness Between Sets" and "Set S-Connected Mappings" // Indian J. Pure Appl. Math. — 1984. — Vol. 15(4). — Pp. 343–354.
3. *Nour T. M.* Totally Semi Continuous Functions // Indian J. Pure Appl. Math. — 1995. — Vol. 26(7). — Pp. 675–678.
4. *Levine N.* Semi-Open Sets and Semi – Continuity in Topological Space // Amer. math. Monthly. — 1963. — Vol. 70. — Pp. 36–41.
5. *Njastsd O.* On Some Classes of Nearly Open Sets // Pacific J.Math. — 1965. — Vol. 15. — Pp. 961–970.
6. *Chattopadyay C., Bandyopadhyay C.* On Structure of Sets, Preprint.
7. *Neubrunnovia*. On Transfinite Sequences of Certain Types of Functions. — 1975.
8. *Andrijevic D.* Semi-Preopen Sets // Ibid. — 1986. — Pp. 24–32.

UDC 513.831

On Simply-Open Sets

V. L. Kljushin, Al bayati Jalal Hatem Hussein

Higher Mathematics Department
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia

The aim of this paper is to continue study of simply-open sets, and we give some properties of simply-open sets. And we investigate the relations between simply-open sets and other forms of generalized open sets in a topological space like semi-open sets α-sets δ-sets preopen sets semi-preopen sets, and we give some properties of the class of all simply–open sets.

Key words and phrases: simply-open set, semi-open set, locally closed set, locally open set, δ-set.