УДК 517.929.2/517.925.56

Дополнение Шура и число фокальных точек симплектической системы разностных уравнений

Ю. В. Елисеева

Кафедра «Прикладная математика»
Московский государственный технологический университет «Станкин»
Вадковский переулок, д. 3а, 101472, Москва, Россия

В работе представлены новые результаты, связывающие число фокальных точек сопряжённого базиса симплектической разностной системы размерности $2n$ и отрицательный индекс инерции дополнения Шура в некоторой симметрической матрице той же размерности. Доказанный результат позволяет свести задачу вычисления фокальных точек дискретных симплектических систем к задаче вычисления спектра некоторой «седловой» задачи для блочной симметрической матрицы с собственными значениями различных знаков.

Ключевые слова: симплектические разностные системы, фокальные точки, дополнение Шура.

1. Введение

В работе рассматриваются симплектические системы разностных уравнений [1]:

$$Y_{i+1} = W_i Y_i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad W_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где вещественная $2n \times 2n$ матрица W_i системы (1) является симплектической для любого i:

$$W_i^T J W_i = J, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

здесь 0, I — нулевая и единичная матрицы. Отметим, что частным случаем системы (1) являются гамильтоновы системы разностных уравнений, разностные уравнения Штурма–Лиувилля порядка $2n$, дискретные матричные уравнения Якоби, в частности, матричные уравнения Штурма–Лиувилля. Перечисленные классы дискретных уравнений являются разностными аналогами соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений и систем. Работа посвящена дискретной осцилляционной теории для решений (1), основы которой заложены в [1–3]. Одним из важнейших понятий данной теории является понятие фокальной точки и её кратности. Для непрерывного аналога системы (1), канонической системы дифференциальных уравнений

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(t) & \mathcal{B}(t) \\ \mathcal{C}(t) & -\mathcal{A}^T(t) \end{bmatrix} Y(t), \quad \mathcal{B}(t) = \mathcal{B}^T(t), \quad \mathcal{C}(t) = \mathcal{C}^T(t), \quad Y(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ U(t) \end{bmatrix}. \tag{3}$$

соответствующим понятием является понятие сопряжённой точки и её кратности [4]. Напомним, что если $Y := Y(t)$ является матричным $2n \times n$ решением (3), удовлетворяющим

$$Y = \begin{bmatrix} X \\ U \end{bmatrix}, \quad X^T U = U^T X, \quad \operatorname{rang} Y_i = n, \tag{4}$$

то сопряжённая точка $Y := Y(t)$ определяется условием $\det(X(t)) = 0$, а её кратность равна $\operatorname{def}(X(t)) = n - \operatorname{rang}(X(t))$.

Статья поступила в редакцию 7 февраля 2011 г.

Соответствующая концепция, введённая в [2] для $2n \times n$ матричных решений (1), удовлетворяющих (4), является значительно более сложной. Так, согласно [5, Определение 3.2] сопряжённый базис Y_i системы (1) имеет $m^*(i)$ фокальных точек (с учётом их кратностей) на $[i, i+1)$, если

$$m_i^*(Y) := \operatorname{rang}(\tilde{M}_i) + \operatorname{ind}(\tilde{P}_i), \tag{5}$$

$$\begin{cases} \tilde{M}_i = (I - X_i X_i^\dagger) B_i^T, \\ \tilde{T}_i = I - \tilde{M}_i^\dagger \tilde{M}_i, \\ \tilde{P}_i = \tilde{T}_i X_{i+1} X_i^\dagger B_i^T \tilde{T}_i, \end{cases} \tag{6}$$

при этом B_i — блок матрицы W_i, $X^\dagger$ — псевдообратная матрица для X [6, с. 31], а $\operatorname{ind} A$ — число отрицательных собственных значений симметрической матрицы A.

С точки зрения приложений дискретной осцилляционной теории представляется важным устойчивое вычисление числа фокальных точек. Так, в недавних работах [3,7], посвящённых дискретной спектральной теории для систем (1), зависящих от λ, доказаны аналоги теорем Штурма [8], связывающие число фокальных точек матричного решения симплектической системы при заданном λ_1 с числом собственных значений некоторой краевой задачи, находящихся левее λ_1. Практические приложения данных результатов связаны с созданием новых алгоритмов, реализующих, например, быструю оценку локализации спектра симметрических разреженных матриц, связанных с (1). Для симметрических ленточных матриц такие алгоритмы предложены в [7, 9].

Основным результатом работы является доказательство существования равенства между числом фокальных точек сопряжённого базиса (1) и отрицательным индексом инерции дополнения Шура в некоторой блочной симметрической матрице, ассоциированной с Y_i, W_i. Отметим, что традиционно проблемы вычисления собственных значений блочных симметрических матриц связывают с седловыми задачами для систем линейных уравнений (см. [10]). Доказанный результат позволяет использовать обширный теоретический и практический аппарат, развитый для решения данных задач (см. [10, 11] и библиографию данных работ) в алгоритмах расчёта числа фокальных точек для матричных решений системы (1).

2. Основные результаты

Для пары $2n \times n$ матриц Y, $\hat{Y}$, удовлетворяющих (4), определим сравнительный индекс (см. [5]) $\mu(Y, \hat{Y})$ согласно

$$\mu(Y, \hat{Y}) := \operatorname{rank} \mathcal{M} + \operatorname{ind} \mathcal{D}, \tag{7}$$

$$\begin{cases} \mathcal{M} = (I - XX^\dagger)\hat{X}, \quad X = [I\,0]Y, \quad \hat{X} = [I\,0]\hat{Y}, \\ \mathcal{T} = I - M^\dagger M, \\ \mathcal{D} = \mathcal{T} w(Y, \hat{Y})^T X^\dagger \hat{X} \mathcal{T}, \\ w(Y, \hat{Y}) = Y^T J \hat{Y}. \end{cases} \tag{8}$$

Определим двойственный к $\mu(Y, \hat{Y})$ индекс формулой $\mu(Y, \hat{Y}) := \operatorname{rank} \mathcal{M} + \operatorname{ind}(\,-D)$. Основные свойства $\mu(Y, \hat{Y})$, $\mu^*(Y, \hat{Y})$ доказаны в [5]. Для доказательства основных результатов важна связь между сравнительным индексом и числом фокальных точек. Так, если $m_i^*(Y)$ — число фокальных точек сопряжённого базиса (1) на $[i, i+1)$, то

$$m_i^*(Y) = \mu^*(Y_i, W_i^{-1}[0\, I]^T), \quad W_i^{-1} = \begin{bmatrix} D_i^T & -B_i^T \\ -C_i^T & A_i^T \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Для двух $2n \times n$ матриц Y, $\hat{Y}$ определим следующую $2n \times 2n$ матрицу

$$\Lambda[V] = V^T \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V - \begin{bmatrix} 0 & w(Y,\hat{Y}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad w(Y,\hat{Y}) = Y^T J \hat{Y}, \tag{10}$$

где

$$V = [Y\, \hat{Y}]. \tag{11}$$

Если Y, $\hat{Y}$ разделены на $n \times n$ блоки $Y = [X^T\, U^T]^T$, $\hat{Y} = [\hat{X}^T\, \hat{U}^T]^T$, то $\Lambda[V]$ записывается в виде

$$\Lambda[V] = \begin{bmatrix} U^T X & U^T \hat{X} \\ \hat{X}^T U & \hat{X}^T \hat{U} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Если дополнительно предположить, что $U^T X = X^T U$, $\hat{X}^T \hat{U} = \hat{U}^T \hat{X}$, то матрица $\Lambda[V]$ симметрическая. Заметим, что если V — симплектическая, то (10) заведомо симметрическая, при этом Y, $\hat{Y}$ удовлетворяют (4) и дополнительному условию нормировки $w(Y,\hat{Y}) = I$. В следующей лемме мы формулируем некоторые свойства $\Lambda[V]$.

Лемма 1.

1. *Если V определена* (11), *а W симплектическая, то*

$$\Lambda[WV] = V^T \Lambda[W] V + \Lambda[V], \tag{13}$$

2. *Для произвольной матрицы V, заданной* (11), *выполнено*

$$\Lambda[JVJ^T] = -J\Lambda[V]J^T, \tag{14}$$

3. *Для произвольной V в форме* (11) *и любых $n \times n$ матриц C_1, C_2 справедливо*

$$\Lambda[V \mathrm{diag}(C_1, C_2)] = \mathrm{diag}(C_1^T, C_2^T) \Lambda[V] \mathrm{diag}(C_1, C_2) \tag{15}$$

4. *Если Y, $\hat{Y}$ удовлетворяют* (4), *то*

$$\mathrm{ind}\Lambda[V] = \mathrm{ind}(X^T U) + \mu(Y,\hat{Y}) = \mathrm{ind}(\hat{X}^T \hat{U}) + \mu^*(J\hat{Y}, JY), \tag{16}$$

где $\mu(Y,\hat{Y})$ — сравнительный индекс, а $\mu^*(J\hat{Y}, JY)$ — двойственный к $\mu(Y,\hat{Y})$.

Доказательство.

1. Согласно (10) имеем

$$\Lambda[WV] = V^T W^T \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} WV - \begin{bmatrix} 0 & w(WY, W\hat{Y}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$= V^T \left\{ W^T \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W - \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} V + V^T \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V - \begin{bmatrix} 0 & w(Y,\hat{Y}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$= V^T \Lambda[W] V + \Lambda[V],$$

где мы используем, что для симплектической матрицы $W = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ справедливы тождества

$$w(W[I\,0]^T, W[0\,I]^T) = A^T D - C^T B = I, \tag{17}$$

$$w(WY, W\hat{Y}) = Y^T W^T J W \hat{Y} = Y^T J \hat{Y} = w(Y, \hat{Y}). \tag{18}$$

Свойство (13) доказано.

2. Согласно (12) имеем

$$-J\Lambda[V]J^T = -J \begin{bmatrix} U^T X & U^T \hat{X} \\ \hat{X}^T U & \hat{X}^T \hat{U} \end{bmatrix} J^T = \begin{bmatrix} -\hat{X}^T \hat{U} & \hat{X}^T U \\ U^T \hat{X} & -U^T X \end{bmatrix},$$

$$\Lambda[J\hat{Y}, -JY] = \begin{bmatrix} -\hat{X}^T \hat{U} & \hat{X}^T U \\ U^T \hat{X} & -U^T X \end{bmatrix}$$

Следовательно, (14) доказано.

3. Доказательство (15) следует из (10) и

$$\begin{bmatrix} 0 & w(YC_1, \hat{Y}C_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & {C_1}^T w(Y, \hat{Y}) C_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(C_1^T, C_2^T) \begin{bmatrix} 0 & w(Y, \hat{Y}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \operatorname{diag}(C_1, C_2)$$

4. Доказательство (16) приведено в [5, стр.443]. □

Напомним определение дополнения Шура. Пусть задана $k \times k$ матрица A, α — произвольное подмножество $\{1, 2, \ldots, k\}$, а $A(\alpha)$ — главная невырожденная подматрица A, расположенная на пересечении строк и столбцов с одинаковыми номерами, определяемыми α. Тогда дополнение Шура равно $A/A(\alpha) = A(\alpha^c) - A(\alpha^c, \alpha)(A(\alpha))^{-1} A(\alpha, \alpha^c)$, где α^c — дополнение множества α относительно $\{1, 2, \ldots, k\}$, а $A(\alpha, \beta)$ — подматрица A с номерами строк и столбцов из α, β соответственно. В частности, если $A(\alpha)$ расположена в верхнем левом углу матрицы A, то справедливо блочно-треугольное разложение

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A(\alpha^c, \alpha)(A(\alpha))^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ 0 & A/A(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & (A(\alpha))^{-T} A(\alpha, \alpha^c) \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Если $A = A^T$, то из последней формулы следует известное соотношение

$$\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} A(\alpha) + \operatorname{ind} (A/A(\alpha)), \tag{19}$$

верное для произвольного расположения $A(\alpha)$ в A. Используя (19) и лемму 1, докажем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть Y_i — сопряжённый базис системы* (1)*. Определим $2n \times 2n$ симметрическую матрицу*

$$\Lambda[V_i] = \begin{bmatrix} -X_i^T U_i & U_i^T B_i^T \\ B_i U_i & B_i A_i^T \end{bmatrix}, \quad i = 0, \ldots, N. \tag{20}$$

Тогда для любой невырожденной $k_i \times k_i$ подматрицы H_i симметрической матрицы $-X_i^T U_i$ и числа фокальных точек $m_i^*(Y)$ на $[i, i+1)$ справедливо

$$m^*(Y_i) = \operatorname{ind}(\Lambda[V_i]/H_i) - \operatorname{ind}\left(\left(-X_i^T U_i\right)/H_i\right). \tag{21}$$

В частности, если

$$\text{rank }(X_iU_i) = k_i, \quad i = 0, \ldots, N, \tag{22}$$

то

$$m^*(Y_i) = \begin{cases} \text{ind}\,(\Lambda[V_i]/H_i)\,, & k_i > 0, \\ \text{ind}\,(\Lambda[V_i])\,, & k_i = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Доказательство. Отметим, что согласно (9)

$$m_i^*(Y) = \mu^*\left(Y_i, W^{-1}[0\,I]\right) = \mu^*\left(\begin{bmatrix} X_i \\ U_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -B_i^T \\ A_i^T \end{bmatrix}\right) = \mu\left(\begin{bmatrix} -X_i \\ U_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_i^T \\ A_i^T \end{bmatrix}\right),$$

где мы используем, что $\mu^*(Y, \hat{Y}) = \mu(\text{diag}(-I,\, I)Y,\, \text{diag}(-I,\, I)\hat{Y})$ согласно определению двойственного индекса, данному выше. Следовательно, построив (10) для V, заданной (11) при $Y := \begin{bmatrix} -X_i \\ U_i \end{bmatrix}$, $\hat{Y} := \begin{bmatrix} B_i^T \\ A_i^T \end{bmatrix}$, получим (20). Применяя лемму 1 для указанного частного случая, имеем

$$\text{ind}\,(\Lambda[V_i]) = m_i^*(Y) + \text{ind}\left(-X_i^TU_i\right). \tag{24}$$

С другой стороны, используя (19) для $A := -X_i^TU_i$, $A(\alpha) := H_i$, получим $\text{ind}\left(-X_i^TU_i\right) = \text{ind}(H_i) + \text{ind}\left(-X_i^TU_i/H_i\right)$. Далее, применяя (19) для $A := \Lambda[V_i]$, $A(\alpha) := H_i$, имеем $\text{ind}\,(\Lambda[V_i]) = \text{ind}(H_i) + \text{ind}\,(\Lambda[V_i/H_i])$. Подставляя полученные представления в (24) и сокращая $\text{ind}(H_i)$, получим (21). Напомним, что условие $-X_i^TU_i/H_i = 0$ необходимо и достаточно для (22), так как k_i — размерность H_i по условию теоремы. Следовательно, теорема полностью доказана. □

Заметим, что если выполнено условие (22), то матрица $\Lambda[V_i]/H_i$ в (23) имеет вид $\begin{bmatrix} 0 & R_i \\ R_i^T & P_i \end{bmatrix}$, где нулевой блок имеет размерность $n - \text{rang}\left(X_i^TU_i\right)$, а симметрическая матрица P, в общем случае индефинитная, имеет ранг, не превосходящий $\text{rang}\,(B_i)$. Например, для дискретных уравнений Штурма–Лиувилля порядка $2n$ выполнено $\text{rang}\,(B_i) = 1$ и матрица $\Lambda[V_i]/H_i$ может быть построена с помощью окаймления нулевого блока ровно одной строкой и столбцом.

3. Заключение

В работе доказана теорема, связывающая число фокальных точек сопряжённых базисов симплектических разностных систем размерности $2n$ и отрицательный индекс инерции дополнения Шура в некоторой симметрической матрице той же размерности. Доказанный результат позволяет использовать обширный теоретический и практический аппарат, развитый для исследования спектра «седловых» задач в алгоритмах расчёта числа фокальных точек для матричных решений симплектических разностных систем.

Литература

1. *Bohner M., Došlý O.* Disconjugacy and Transformations for Symplectic Systems // Rocky Mountain Journal of Mathematics. — 1997. — No 3. — Pp. 707–743.
2. *Kratz W.* Discrete Oscillation // J. Difference Equations and Appl. — 2003. — No 9. — Pp. 127–135.
3. *Došlý O., Kratz W.* Oscillation Theorems for Symplectic Difference Systems // Journal of Difference Equations and Applications. — 2007. — No 13. — Pp. 585–605.

4. *Зеликин М. И.* Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении. — М.: Факториал, 1998. — 352 с. [*Zelikin M. I.* Odnorodnihe prostranstva i uravnenie Rikkati v variacionnom ischislenii. — M.: Faktorial, 1998. — 352 s.]
5. *Елисеева Ю. В.* Сравнительный индекс для решений симплектических систем разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2009. — № 45. — С. 432–444. [*Eliseeva Yu. V.* Sravniteljnihyj indeks dlya resheniyj simplekticheskikh sistem raznostnihkh uravneniyj // Differencialjnihe uravneniya. — 2009. — No 45. — S. 432–444.]
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Физматлит, 1998. — 352 с. [*Gantmakher F. R.* Teoriya matric. — M.: Fizmatlit, 1998. — 352 s.]
7. *Elyseeva J.* On Relative Oscillation Theory for Symplectic Eigenvalue Problems // Applied Mathematics Letters. — 2010. — No 23. — Pp. 1231–1237.
8. *Amrein W. O., Hinz A. M., Pearson D. B.* Sturm-Liouville Theory Past and Present. — Basel: Springer, 2005. — 348 p.
9. *Kratz W., Tentler M.* Recursion Formulae for the Characteristic Polynomial of Symmetric Banded Matrices // Linear Algebra and its Application. — 2008. — No 428. — Pp. 2482–2500.
10. *Benzi M., Golub G., Liesen J.* Numerical Solution of Saddle Point Problems // Acta Numerica. — 2005. — No 14. — Pp. 1–137.
11. *Быченков Ю. В., Чижонков Е. В.* Итерационные методы решения седловых задач. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010. — 349 с. [*Bihchenkov Yu. V., Chizhonkov E. V.* Iteracionnihe metodih resheniya sedlovihkh zadach. — M.: Binom. Laboratoriya znaniyj, 2010. — 349 s.]

UDC 517.929.2/517.925.56

The Schur Complement and the Number of Focal Points of a Symplectic Difference System

J. V. Elyseeva

Department of Applied Mathematics
Moscow State University of Technology "Stankin"
101472 Vadkovskii per.3a, Moscow, Russia

We present new results connecting the number of focal points of a conjoined basis of a $2n \times 2n$ symplectic difference system and the negative inertia index of the Schur complement in a symmetric matrix of the same size. The proved result makes it possible to reduce the problem of calculating of focal points for discrete symplectic systems to a "saddle point" spectral problem for a symmetric indefinite block matrix.

Key words and phrases: symplectic difference systems, focal points, schur complement.