УДК 519.62; 530.145; 539.18

Операционная модель квантовых измерений Курышкина–Вудкевича

А. В. Зорин

Научно-исследовательская лаборатория вычислительной физики и математического моделирования
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

К. Вудкевич описывает метод Холево–Хелстрома и приводит свою операциональную модель квантовых измерений в качестве примера применения этого метода. В ней участвует квантовая функция распределения вероятностей $P(q,p) = (W_\psi * W_\varphi)(q,p)$. Здесь W_φ — квантовая функция распределения Вигнера состояния φ квантовой системы до измерения, W_ψ — квантовая функция распределения Вигнера состояния ψ квантового фильтра до процедуры измерения. Известно, что свертка двух квантовых функций распределения Вигнера является положительно определенным распределением вероятностей на фазовом пространстве квантовой системы.

Квантовая функция распределения Вигнера однозначно связана с правилом квантования Вейля, которое классической величине $A(q,p)$ ставит в соответствие (псевдо) дифференциальный оператор $O_W(A)$, символом которого является функция $A(q,p)$. В статье утверждается, что с квантовой функцией распределения Курышкина–Вудкевича связано правило квантования Курышкина, которое классической величине $A(q,p)$ ставит в соответствие оператор наблюдаемой $O_\psi(A)$ с символом $A_G(q,p) = (A * \Phi)(q,p)$. Здесь $\Phi(q,p) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \exp(-ipq/\hbar)\, \psi(q)\, \tilde{\psi}(p)$, где $\tilde{\psi}(p)$ — Фурье-образ функции состояния квантового фильтра $\psi(q)$.

Ключевые слова: операциональная модель квантовых измерений, правило квантования, квантовая функция распределения, ожидаемые значения наблюдаемых, измеренные значения наблюдаемых.

1. Введение

Одной из важных проблем описания квантово-механических систем является описание результатов измерения характеристик, например спектральных, данных систем. Ведь именно измеренные характеристики квантовых объектов сообщают нам (косвенным образом) свойства этих объектов. Именно измеренные характеристики квантовых объектов собирают физики-экспериментаторы в специализированные базы данных (см., например в [1]), с элементами которых физики-теоретики сравнивают результаты своих теоретических исследований. При этом, довольно часто, теоретически исследуются модели изолированных квантовых объектов, не учитывающие измерительного прибора в процессе квантового измерения. Одним из главных в настоящей работе является тезис: процессу верификации с экспериментальными данными следует подвергать не результаты теоретического описания изолированного квантового объекта, а результаты теоретического описания квантового объекта, подвергающегося процессу измерения и, следовательно, открытого в описываемой ситуации [2, 3]. Работа в целом посвящена теоретическому описанию квантового объекта, над которым производится процедура измерения. При этом мы пользуемся стандартной моделью квантовых измерений Хелстрома–Холево в конструктивной конкретизации — в операциональной модели Курышкина–Вудкевича.

2. Концепция квантования Березина–Тарасова

Правило (процедура) квантования физических систем может быть определено различными способами. В данной работе используется подход Ф.А. Березина и В.Е. Тарасова, опирающийся на формализм лиево-йордановых алгебр.

Пусть система имеет n степеней свободы, а ее фазовое пространство является вещественным линейным пространством с размерностью $2n$. Наблюдаемыми являются функции $A(q,p)$, где $q,p \in R^n$. Обычно под квантованием понимают единую процедуру [4, 5], которая каждой классической наблюдаемой, т.е. вещественной функции $A(q,p)$, ставит в соответствие квантовую наблюдаемую, т.е. самосопряженный оператор $A(\hat{q},\hat{p})$. Сама функция $A(q,p)$ называется в этом случае символом оператора $A(\hat{q},\hat{p})$.

Примем, что эволюция классической системы на плоском фазовом пространстве R^{2n} описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(q,p) = L\left(q,p,\frac{\partial}{\partial q},\frac{\partial}{\partial p}\right)A(q,p), \tag{1}$$

где $A(q,p)$ — гладкая функция, определенная на пространстве R^{2n} и описывающая классическую наблюдаемую, а $L\left(q,p,\frac{\partial}{\partial q},\frac{\partial}{\partial p}\right)$ — линейный дифференциальный оператор на пространстве гладких функций. Для получения уравнений эволюции квантовых систем надо задать правила, позволяющие квантовать классические уравнения движения (1) соответствующих дифференциальных операторов. Часто при задании этих правил стремятся записать уравнения движения в гамильтоновой форме [6, 7], т.е. через скобку Пуассона с некоторой функцией Гамильтона. Однако в общем случае затруднительно определить, существует ли функция Гамильтона, является ли она единственной, если она существует, и найти ее явный вид, если она существует и единственна [8]. Поэтому квантование классических динамических систем общего вида, исходящее из уравнений движения, более удобно [9].

Пусть множество наблюдаемых образует линейное пространство M_0 над полем вещественных чисел R. Для наблюдаемых из M_0 определены [10] две билинейные операции умножения, обозначаемые символами $\bullet$ и $\circ$ и удовлетворяющие условиям:

1) $\langle M_0, \bullet\rangle$ — алгебра Ли:

$$A \bullet B = -B \bullet A, \ \ (A \bullet B) \bullet C + (B \bullet C) \bullet A + (C \bullet A) \bullet B = 0;$$

2) $\langle M_0, \circ\rangle$ — специальная алгебра Йордана:

$$A \circ B = B \circ A, \ \ ((A \circ A) \circ B) \circ A = (A \circ A) \circ (B \circ A);$$

3) выполняются тождество дифференцирования йордановой алгебры и тождество связи ассоциаторов [5]:

$$A \bullet (B \circ C) = (A \bullet B) \circ C + B \circ (A \bullet C),$$
$$(A \circ B) \circ C - A \circ (B \circ C) = \frac{\hbar^2}{4}\left((A \bullet B) \bullet C - A \bullet (B \bullet)\right).$$

В этом случае говорят, что определена лиево-йорданова алгебра [11, 12]. Будем также полагать, что в M_0 существует единица I такая, что $A \circ I = A$ и $A \bullet I = 0$.

Через M обозначена [10] свободная лиево-йорданова алгебра над полем вещественных чисел R с единицей I и образующими q_j и p_j, где $j = 1, ..., n$ и

$$q_j \bullet p_k = \delta_{jk} I, \ \ q_j \bullet q_k = 0, \ \ p_j \bullet p_k = 0. \tag{2}$$

Для классических наблюдаемых $A(q,p)$ и $B(q,p)$ эти операции совпадают со скобками Пуассона в R^{2n} и с поточечным умножением функций:

$$A(q,p) \bullet B(q,p) = \{A(q,p), B(q,p)\}, \quad A(q,p) \circ B(q,p) = A(q,p)\, B(q,p). \quad (3)$$

Для квантовых наблюдаемых $A(\hat{q},\hat{p})$ и $B(\hat{q},\hat{p})$ операциями лиева и йорданова умножений являются операции коммутатора и антикоммутатора:

$$\begin{aligned} A(\hat{q},\hat{p}) \bullet B(\hat{q},\hat{p}) &= \frac{1}{i\hbar}\left(A(\hat{q},\hat{p})\, B(\hat{q},\hat{p}) - B(\hat{q},\hat{p})\, A(\hat{q},\hat{p})\right), \\ A(\hat{q},\hat{p}) \circ B(\hat{q},\hat{p}) &= \frac{1}{2}\left(A(\hat{q},\hat{p})\, B(\hat{q},\hat{p}) + B(\hat{q},\hat{p})\, A(\hat{q},\hat{p})\right). \end{aligned} \quad (4)$$

3. Правило квантования Вейля

Для всякого элемента $A \in M$ определены [9] два оператора левого умножения, отображающие M в себя по правилам:

$$L_A^+ B = A \circ B, \;\; L_A^- B = A \bullet B$$

для любых $B \in M$. Эти отображения являются эндоморфизмами модуля алгебры M [9]. Подалгебра алгебры эндоморфизмов модуля M, порождаемая всевозможными операторами левых лиевых и йордановых умножений, называется алгеброй умножений лиево-йордановой алгебры M и обозначается $A(M)$ [9]. Там же доказана

Теорема 1. *Если лиево-йорданова алгебра M с единицей I порождается множеством $X = \{q_j, p_j, I : j = 1, ..., n\}$, элементы которого удовлетворяют соотношениям (2), то соответствующая алгебра умножений $A(M)$ порождается множеством операторов $\left\{L_{q_j}^{\pm},\ L_{p_j}^{\pm},\ L_I^{\pm}\ :\ q_j, p_j, I \in X\right\}$, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям:*

$$\left[L_{q_j}^{\pm},\ L_{p_k}^{\mp}\right] = \delta_{jk}\ L_I^{+},\ \ \left[L_{q_j}^{\pm},\ L_{p_k}^{\pm}\right] = \left[L_{q_j}^{\pm},\ L_{q_k}^{\pm}\right] = \left[L_{p_j}^{\pm},\ L_{p_k}^{\pm}\right] = 0, \quad (5)$$

$$\left[L_{q_j}^{\pm},\ L_{q_k}^{\mp}\right] = \left[L_{p_j}^{\pm},\ L_{p_k}^{\mp}\right] = 0,\ \ \left[L_{q_j}^{\pm},\ L_I^{\pm}\right] = \left[L_{p_j}^{\pm},\ L_I^{\pm}\right] = 0. \quad (6)$$

Отметим, что данные коммутационные соотношения для образующих $\left\{L_{q_j}^{\pm},\ L_{p_j}^{\pm},\ L_I^{\pm}\ :\ q_j, p_j, I \in X\right\}$ алгебры умножений $A(M)$ одинаковы для классических и квантовых наблюдаемых [9]. Соотношения (5), (6) определяют алгебру Ли, порожденную операторами $L_{q_j}^{\pm},\ L_{p_k}^{\pm},\ L_I^{\pm}$. Из теоремы 1 вытекает очевидное утверждение: любой элемент L алгебры умножений $A(M)$ лиево-йордановой алгебры M с единицей I может быть записан как полином $L\left(L_{q_j}^{\pm},\ L_{p_k}^{\pm},\ L_I^{\pm}\right)$ от операторов умножения $L_{q_j}^{\pm},\ L_{p_k}^{\pm},\ L_I^{\pm}$.

Соответствие между операторами $\hat{A} = A(\hat{q},\hat{p})$ и символами $A(q,p)$ полностью определяется формулами, выражающими символы операторов $\hat{q}_j\hat{A},\ \hat{A}\hat{q}_j,\ \hat{p}_j\hat{A},\ \hat{A}\hat{p}_j$ через символ оператора $\hat{A}$ [9]. Говорят, что задано вейлевское квантование π_W, если эти формулы имеют вид:

$$\pi_W\left(\left(q_j + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p_j}\right) A(q,p)\right) = \hat{q}_j\hat{A},\ \pi_W\left(\left(q_j - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p_j}\right) A(q,p)\right) = \hat{A}\hat{q}_j, \quad (7)$$

$$\pi_W\left(\left(p_j-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q_j}\right)A\left(q,p\right)\right)=\hat{p}_j\hat{A},\ \ \pi_W\left(\left(p_j+\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q_j}\right)A\left(q,p\right)\right)=\hat{A}\hat{p}_j \tag{8}$$

для любых $\hat{A}=\pi_W\left(A\left(q,p\right)\right)$. Доказательство справедливости этих формул содержится в [12].

Из определения (3) видно, что операторы L_A^+ и L_A^-, действующие на классические наблюдаемые, задаются формулами:

$$L_A^+B\left(q,p\right)=A\left(q,p\right)B\left(q,p\right),\ \ L_A^-B\left(q,p\right)=\left\{A\left(q,p\right)B\left(q,p\right)\right\}. \tag{9}$$

В силу определения (4) операторы $\hat{L}_A^+$ и $\hat{L}_A^-$ выражаются в виде

$$\hat{L}_A^+\hat{B}=\frac{1}{2}\left(\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}\right),\ \ \hat{L}_A^-\hat{B}=\frac{1}{i\hbar}\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right).$$

Используя операторы умножения $L_A^\pm$ и $\hat{L}_A^\pm$, перепишем формулы (7) и (8) в виде:

$$\pi_W\left(L_{q_j}^\pm A\right)=\hat{L}_{q_j}^\pm\hat{A},\ \pi_W\left(L_{p_j}^\pm A\right)=\hat{L}_{p_j}^\pm\hat{A}.$$

Поскольку эти соотношения выполняются для любых $\hat{A}=\pi_W\left(A\left(q,p\right)\right)$, то можно определить [9] вейлевское квантование самих операторов умножения следующим образом:

$$\pi_W\left(L_{q_j}^\pm\right)=\hat{L}_{q_j}^\pm,\ \pi_W\left(L_{p_j}^\pm\right)=\hat{L}_{p_j}^\pm. \tag{10}$$

Эти соотношения задают вейлевское квантование порождающих операторов алгебры умножений лиево-йордановой алгебры классических наблюдаемых.

Из определения (9) для классических наблюдаемых получаем

$$L_{qj}^+A\left(q,p\right)=q_jA\left(q,p\right),\ \ L_{pj}^+A\left(q,p\right)=p_jA\left(q,p\right), \tag{11}$$

$$L_{qj}^-A\left(q,p\right)=\frac{\partial A\left(q,p\right)}{\partial p_j},\ \ L_{pj}^-A\left(q,p\right)=-\frac{\partial A\left(q,p\right)}{\partial q_j}. \tag{12}$$

Выражения (11) и (12) позволяют рассматривать линейный полиномиальный дифференциальный оператор как элемент алгебры умножений лиево-йордановой алгебры классических наблюдаемых. В результате имеет место следующая теорема [9].

Теорема 2. *Линейный полиномиальный дифференциальный оператор*

$$L\left(q,p,\frac{\partial}{\partial q},\frac{\partial}{\partial p}\right),$$

действующий на классические наблюдаемые $A\left(q,p\right)\in M$, *является элементом алгебры умножений* $A\left(M\right)$ *лиево-йордановой алгебры* M *классических наблюдаемых:*

$$L\left(q,p,\frac{\partial}{\partial q},\frac{\partial}{\partial p}\right)=L\left(L_q^+,L_p^+,-L_p^-,L_q^-\right).$$

В силу (10) и коммутационных соотношений (5), (6) вейлевское квантование π_W дифференциальному оператору $L\left(q,p,\frac{\partial}{\partial q},\frac{\partial}{\partial p}\right)$ на функциональном пространстве сопоставляет оператор $L\left(\hat{L}_q^+,\hat{L}_p^+,-\hat{L}_p^-,\hat{L}_q^-\right)$, действующий в операторном пространстве. Таким образом, вейлевское квантование дифференциальных уравнений с полиномиальными операторами [10], описывающих эволюцию наблюдаемых динамической системы (1), определяется формулой:

$$\pi_W \left(L \left(q, p, \frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial p} \right) \right) = L \left(\hat{L}_q^+, \hat{L}_p^+, -\hat{L}_p^-, \hat{L}_q^- \right).$$

Поскольку коммутационные соотношения для операторов $L_{q_j}^{\pm}$, $L_{p_k}^{\pm}$ и совпадают, имеет место следующая теорема [9].

Теорема 3. *При вейлевском квантовании упорядочение образующих операторов в операторе* $L\left(\hat{L}_q^+, \hat{L}_p^+, -\hat{L}_p^-, \hat{L}_q^-\right)$ *однозначно определяется упорядочением в операторе* $L\left(L_q^+, L_p^+, -L_p^-, L_q^-\right)$.

Соответствие между полиномиальными дифференциальными операторами и элементами алгебры умножений лиево-йордановой алгебры классических наблюдаемых можно продолжить до соответствия между псевдодифференциальными операторами (первого рода) и элементами некоторой счётно-нормированной инволютивной алгебры умножений [10].

4. Правила квантования и квантовые функции распределения

Изолированный (классический) объект описывается конфигурационным пространством $Q = \mathbb{R}^n$, фазовым пространством $T^*Q = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$, классической функцией гамильтона $H(q,p)$, еще $(n-1)$ интегралами движения, находящимися в инволюции с $H(q,p)$, и классом (вещественных) функций $\{A(q,p)\}$ классических наблюдаемых.

Соответствующий квантовый объект описывается оснащенным гильбертовым пространством $S(Q) \subset L_2(Q) \subset S'(Q)$, алгеброй операторов состояний (матриц плотности) $\{\hat{\rho}\}$, алгеброй (Ли–Йордановой) квантовых наблюдаемых $\{O(A)\}$, полученных из классических наблюдаемых $A(q,p)$ с помощью процедуры квантования [13].

Самосопряженный оператор $O(A)$ наблюдаемой A допускает ортонормированное разложение единицы $\mathrm{d}\hat{A}(\lambda)$, согласованное со структурой оснащенного гильбертова пространства [14]. Средние значения наблюдаемой A в состояниях $\hat{\rho}$ задаются выражением: $\langle A \rangle_\rho = \mathrm{Tr}\{O(A)\hat{\rho}\}$ [5].

Теория Мехта–Коэна–Курышкина [2, 15, 16] утверждает взаимно-однозначное соответствие между правилом квантования $A(q,p) \mapsto O(A)$ и квантовой функцией распределения $\hat{\rho} \mapsto F_\rho(q,p)$, обеспечивающими равенство

$$\mathrm{Tr}\{O(A)\hat{\rho}\} = \int A(q,p) F_\rho(q,p)\, \mathrm{d}q \mathrm{d}p$$

для всех (вещественных) наблюдаемых A (например, $\{A(q,p)\} = S(T^*Q)$).

Существует много правил квантования, которые классическим наблюдаемым $A(q,p)$ ставят в соответствие квантовые наблюдаемые $O(A)$. Здесь $A(q,p)$ — функция на фазовом пространстве $T * Q$, $O(A)$ — оператор в оснащенном гильбертовом пространстве $S \subset L_2(Q) \subset S'$, Q — конфигурационное пространство физической системы.

Квантовая функция распределения Вигнера [17] $\hat{\rho} \mapsto W_\rho(q,p)$ лежит в основе операциональной модели квантовых измерений [18,19], она соответствует правилу квантования Вейля [20] $A(q,p) \mapsto O_W(A)$ (подробно изученному в работах [13, 21]), так что

$$\mathrm{Tr}\left\{O_W\left(A\right)\hat{\rho}\right\} = \int A\left(q,p\right)W_\rho\left(q,p\right)\mathrm{d}q\mathrm{d}p$$

для всех $A\left(q,p\right) \in S\left(T^*Q\right)$. Здесь

$$O_W\left(A\right) = \int \tilde{A}\left(\xi,\eta\right)\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\left(\hat{p}\xi + \hat{q}\eta\right)\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

где $\tilde{A}\left(\xi,\eta\right)$ — Фурье-преобразование функции $A\left(q,p\right)$, $\left(\hat{q}_j u\right)\left(q\right) = q_j u\left(q\right)$ и $\left(\hat{p}_j u\right)\left(q\right) = -i\hbar\left(\partial u/\partial q_j\right)\left(q\right)$ является псевдодифференциальным оператором, действующим по правилу

$$\left[O_W\left(A\right)u\right]\left(q\right) = \int K_W^A\left(q,\tilde{q}\right)u\left(\tilde{q}\right)\mathrm{d}\tilde{q},$$

где $K_W^A\left(q,\tilde{q}\right) = A\left(\frac{q+\tilde{q}}{2},p\right)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}p\left(q-\tilde{q}\right)\right\}$.

Строго говоря, квантование Вейля (см., например, [4, 21]) сопоставляет обобщенной функции $A \in S'\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$ ($S\left(\mathbb{R}^m\right)$ — пространство Шварца) линейный непрерывный оператор $O_w\left(A\right):\ S\left(\mathbb{R}^n\right) \to S'\left(\mathbb{R}^n\right)$, определяемый полуторалинейной формой на $\varphi,\psi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$: $\left(O_W\left(A\right)\varphi,\psi\right) = \langle A,\Psi\rangle$,

$$\Psi\left(u\right) = \frac{1}{\left(2\pi\hbar\right)^n}\int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(p,z\right)\right\}\varphi\left(q+\frac{z}{2}\right)\bar{\psi}\left(q+\frac{z}{2}\right)\mathrm{d}z,$$

где $u = \left(p,q\right) \in \mathbb{R}^{2n}$, $p,q \in \mathbb{R}^n$, а $\langle A,\Psi\rangle$ — значение $A \in S'\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$ на $\Psi \in S\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$.

5. Измеренные значения квантовых наблюдаемых

Многие исследователи без дополнительных обоснований полагают, что ожидаемые значения наблюдаемых соответствуют данным экспериментальных наблюдений за указанными наблюдаемыми с помощью измерительных приборов в измерительных процедурах. Вместе с тем всем исследователям известно, что в процессе измерения квантовый объект, наблюдаемые характеристики которого измеряются, является открытым. В случае классических измерений энергией взаимодействия между измеряемым объектом и измерительным прибором можно пренебречь по сравнению с энергией объекта до измерения. В связи с этим измеряемый классический объект можно считать изолированным. Теория квантовых измерений первого типа имеет дело с величинами энергии взаимодействия, которыми нельзя пренебрегать по сравнению с величиной энергии квантового объекта. В случае квантовых измерений второго типа, когда в процессе измерения не происходит взаимодействия с измерительным прибором, измерительный прибор (анализатор+детектор), тем не менее, обрабатывает сигнал от измеряемого объекта. Это означает, что теория квантовых измерений описывает квантовый объект как открытую подсистему в составной системе «объект + прибор (анализатор)».

Заметим кстати, что значения измеренных величин распределены в соответствии с положительно определенной функцией распределения вероятностей. Заметим также, что свертка любых двух квантовых функций распределения Вигнера является положительно определенной функцией распределения, но не обязательно является функцией распределения Вигнера [22]. Мы будем пользоваться тем вариантом теории квантовых измерений, которая базируется на квантовой теории оценивания, построенной в работах Холево и Хелстрома [23–25].

Таким образом, составная система «объект+фильтр (анализатор)» действует в пространстве $L_2\left(Q_1 \oplus Q_2\right) = L_2\left(Q_1\right) \oplus L_2\left(Q_2\right)$ с помощью операторов «измеренных» наблюдаемых $O_W\left(A\right) \otimes \hat{I}$, а ее состояния до процедуры измерения задаются операторами $\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$. Среднее значение измеренной наблюдаемой равно [23]

$$\langle A \rangle_{\rho 1 \otimes \rho 2} = \mathrm{Tr}\left\{ \left(O_W\left(A\right) \otimes \hat{I} \right) \left(\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2\right) \right\} = \mathrm{Tr}_1 \left\{ O_{\rho 2}\left(A\right) \hat{\rho}_1 \right\},$$

где Tr_1 — частичный след по пространству $L_2\left(Q_1\right)$ и

$$O_{\rho 2}\left(A\right) = \mathrm{Tr}_2 \left\{ \left(O_W\left(A\right) \otimes \hat{I} \right) \left(\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2\right) \right\}$$

— частичный след по пространству $L_2\left(Q_2\right)$.

С другой стороны, среднее значение измеренной наблюдаемой равно [18, 19, 26, 27]

$$\langle A \rangle_{\rho 1 \otimes \rho 2} = \int A\left(q,p\right) \left(W_{\rho 1} * W_{\rho 2}\right)\left(q,p\right) \mathrm{d}q\mathrm{d}p,$$

т.е $\langle A \rangle_P = \int A\left(q,p\right) \int W_{\rho 1}\left(q-\tilde{q}, p-\tilde{p}\right) W_{\rho 2}\left(\tilde{q},\tilde{p}\right)\left(q,p\right) \mathrm{d}\tilde{q}\mathrm{d}\tilde{p}\mathrm{d}q\mathrm{d}p.$

Следовательно, справедлива

Теорема 4. *Правило квантования Курышкина–Вудкевича сопоставляет обобщенной функции $A \in S'\left(T^*Q\right)$ линейный непрерывный оператор вида $O_{\rho 2}\left(A\right) = O_W\left(A * W_{\rho 2}\right):\ S\left(Q\right) \to S'\left(Q\right)$.*

6. Сравнение результатов операциональной модели квантовых измерений с моделью Славнова Д.А.

В серии работ [28–36], посвященных исследованию связи квантовых измерений и математического аппарата квантовой физики, Д.А. Славнов развил конструкцию, обосновывающую и обобщающую стандартную модель квантовой механики, созданной в работах Бора, Гейзенберга, Дирака и фон Неймана. Конструкция начинается с построения вещественной алгебры наблюдаемых A_+, не обязательно являющихся операторами в некотором гильбертовом пространстве. Затем вещественная алгебра расширяется до комплексной алгебры с инволюцией и единицей A. Далее автор говорит, что можно было бы на ней ввести структуру специальной алгебры Йордана с единицей, и, не оговаривая отдельно, использует вторую бинарную операцию коммутирования. Все это является феноменологическим обоснованием использования специальной йорданово-лиевой алгебры с единицей, лежащей в основе концепции Березина–Тарасова строгого описания вейлевского квантования.

Затем вводится понятие совместно наблюдаемых величин: если для наблюдаемых $\hat{A}$ и $\hat{B}$ существуют приборы, которые позволяют осуществить совместимые наблюдения, то такие наблюдаемые называются совместимыми или одновременно измеримыми. Совместимые наблюдаемые могут быть объединены в максимальную коммутативную подалгебру вещественной алгебры. На каждой максимальной коммутативной подалгебре задано множество характеров φ — одномерных гомоморфизмов в вещественную прямую (единичную окружность в комплексной плоскости).

Эрмитовы элементы алгебры A являются латентной формой наблюдаемой величины. Это очень удачное уточнение Славнова Д.А. по сравнению с понятием квантовых наблюдаемых в стандартной формулировке. Явной формой наблюдаемой является некоторое число, ассоциированное с результатом измерения. Это значит, что оно зависит от измерительной процедуры и от свойств составной части измерительного устройства — квантового фильтра (анализатора). Функционал $\varphi\left(\hat{A}\right)$ описывает результат индивидуального измерения. Результат измерения $\varphi\left(\hat{A}\right)$ зависит от «состояния» измеряемого объекта и от «состояния» квантового фильтра.

Такой функционал, являющийся гомоморфизмом некоторой максимальной коммутативной подалгебры, Славнов Д.А. называет физическим состоянием квантового объекта. В операциональной модели квантовых измерений такому функционалу соответствует отображение [37]:

$$\varphi\left(\hat{A}\right) = \mathrm{Tr}\left\{\left(\hat{A}\otimes I\right)\left(\rho_{obj}\otimes\rho_f\right)\right\}. \tag{13}$$

Многозначность этого функционала, порожденная множественностью состояний ρ_f квантовых фильтров, является очевидной и неудивительной.

Квантовыми состояниями Славнов Д.А. называет классы эквивалентности функционалов, совпадающих на фиксированных максимальных коммутативных подалгебрах совместимых наблюдаемых. Эти классы соответствуют отображениям (13) с фиксированным состоянием ρ_f квантового фильтра. Автор считает, что в разных экспериментах мы имеем дело с разными физическими состояниями. Этот факт очевиден в описываемой нами модели в силу (13), однако с поправкой. Славнов Д.А. относит к физическому состоянию φ измеряемого квантового объекта множество тензорных произведений фиксированного состояния объекта в ρ_{obj} смысле стандартной квантовой механики на множество состояний квантовых фильтров ρ_f всевозможных измерительных устройств.

В работе [33] автор приходит к выводу, что нельзя исключить зависимость измеренных значений $\varphi_\xi\left(\hat{A}\right)$ наблюдаемой $\hat{A}$ от микросостояния измерительного прибора, т.е. $\varphi_\xi\left(\hat{A}\right)\neq\varphi_{\xi'}\left(\hat{A}\right)$ при $\hat{A}\in Q_\xi\cap Q_{\xi'}$. В нашей модели очевидно, что значения $\varphi_\xi\left(\hat{A}\right)$ и $\varphi_{\xi'}\left(\hat{A}\right)$, полученные с помощью квантовых фильтров, находившихся в разных состояниях ρ_f и $\rho_{f'}$, различаются в силу $\rho_f\neq\rho_{f'}$. Зависимость результата измерения $\varphi_\xi\left(\hat{A}\right)$ от типа ξ прибора автор [33] рассматривает как реализацию и конкретизацию представлений Бора о зависимости результата от общего контекста эксперимента.

Далее в работе [33] показано выполнение пяти условий для функционала φ_ξ. Следует отметить, что именно эти условия были приняты в работах [2, 26, 27, 38] в качестве постулатов, из которых было выведено правило квантования в операциональной квантовой механике с неотрицательной квантовой функцией распределения, которое мы и исследовали в данной работе.

Квантовым состоянием измеряемого квантового объекта Славнов Д.А. называет класс эквивалентности функционалов φ_ξ, совпадающих на максимальных коммутативных подалгебрах Q_ξ. В операциональной модели квантовых измерений этому классу эквивалентности соответствуют функционалы (1) с фиксированным состоянием ρ_ξ квантового фильтра. Таким образом, квантовое состояние объекта по Славнову зависит от квантового состояния измерительного устройства.

В основу динамики физических и квантовых состояний в своей модели Славнов Д.А. кладет динамику канонического квантования в представлении Гейзенберга. В операциональной модели квантовых измерений мы получили (в рамках концепции Березина–Тарасова) операциональную динамику, основанную на динамике Вейля–Березина–Тарасова, совпадающей с динамикой канонического квантования на подмножестве наблюдаемых, на которой оно корректно (однозначно) определено, и обобщающей ее на более широком множестве $S' (T * Q)$ наблюдаемых.

И главное, результаты измеренных значений квантовых наблюдаемых в операциональной модели квантовых измерений подчиняются законам классической теории вероятностей, также как и значения наблюдаемых в модели Славнова Д.А. Однако свойства классической теории вероятностей для измеренных значений наблюдаемых в нашей модели следуют из конструкции квантовой теории оценивания Хелстрома [25] и теории квантовых измерений Холево [23,24], конкретизацией которых является операциональная модель. Поэтому в нашей модели нет необходимости вводить понятие квантового ансамбля, на базе которого Славнов Д.А. получает свойство линейности функционалов φ_ξ.

В модели Славнова Д.А. векторы гильбертова пространства и операторы возникают после манипуляций с первичными понятиями алгебры наблюдаемых и функционалов измерения. Факторизация алгебры наблюдаемых по отношению эквивалентности функционалов, задающему квантовые состояния, в операциональной модели соответствует проекционному отображению:

$$\hat{A} \mapsto \mathrm{Tr}_{\rho\xi} \left\{ \left(\hat{A} \otimes I \right) (\rho_{obj} \otimes \rho_\xi) \right\} = O_{\rho\xi} (A) .$$

В физическое состояние Славнова кроме состояния объекта входит множество всех классов эквивалентности всех состояний квантовых фильтров, согласованных со всеми максимальными коммутативными подалгебрами.

Процедура операционального квантования в силу конкретности позволяет более детально сравнить ее результаты с результатами стандартной квантовой механики. В работе [39] показано, что операциональная квантовая механика (слабо) стремится к вейлевскому квантованию при $\sum\limits_k |\varphi_k (q)|^2 \to \delta (q)$. При этом спектр водородоподобного атома $\lambda^{(j)}_{\{\varphi k\}}$ в операциональной квантовой механике при $\sum\limits_k |\varphi_k (q)|^2 \to \delta (q)$ стремится не к спектру $\lambda^{(j)}_{st}$, а к значениям $\lambda^{(j)}_{\{\varphi k\}} = \lambda^{(j)}_{st} + \delta\lambda^{(j)}_{st} + C_{\{\varphi k\}}$, первая часть возмущения которого стремится к нулю, а вторая часть возмущения стремится к бесконечности [39]. Однако она стремится к бесконечности одинаково для всех точек спектра. В спектральных же экспериментах измеряются не абсолютные спектральные значения, а их разности [1]. Эти разности в операциональной модели квантовых измерений стремятся к $\lambda^{(j)}_{\{\varphi k\}} - \lambda^{(j')}_{\{\varphi k\}} \to \delta\lambda^{(j)}_{st} - \delta\lambda^{(j')}_{st} \to 0$ по мере того, как возмущающее воздействие измерительной аппаратуры на измеряемый квантовый объект стремится к нулю. Именно в этом смысле и надо понимать отклонение моделей квантовых измерений от стандартной модели квантовой механики [2, 26, 27, 37–45].

7. Заключение

Для замкнутых квантово-механических систем известен принцип квантовых неразрушающих измерений [46, 47], разрешающий сверхчувствительный прием слабых сигналов. В [48] рассмотрено измерение над расширением исходной системы, содержащим вспомогательную независимую квантовую систему, обобщающее неразрушающие измерения. Предложенное обобщение позволяет совместить измерения некоммутирующих наблюдаемых. Измерительному процессу в смысле фон Неймана соответствует измерительный инструмент [48], задающий описание статистики повторных измерений. В [48] показано, что всякое квантовое неразрушающее измерение реализуемо в схеме повторных измерений, аппроксимирующих его сколь угодно точно.

В [18] предложена конструктивная реализация измерительного инструмента, параметризованная матрицей плотности $\rho_a = \sum c_k \left|\psi_k\right\rangle \left\langle\psi_k\right|$ состояний измерительного прибора. Мы утверждаем, что операциональная квантовая функция распределения измерений наблюдаемой A из [18, 19] в точности совпадает с квантовой функцией распределения из [2, 26, 27, 37–45]. При этом измерительному инструменту соответствует правило квантования Курышкина с помощью псевдодифференциальных операторов $O\left(A\right)$, символом которого является свертка символа данного оператора в квантовании Вейля с функцией

$$\Phi\left(q,p\right) = \sum c_k \psi_k\left(q\right) \tilde{\psi}_k\left(p\right).$$

Исследуемая операциональная модель квантовых измерений отличается простым конструктивным характером. Это позволяет эффективно использовать компьютерные вычисления (аналитические и численные) [39, 42–45] для моделирования измеренных спектральных характеристик квантовой системы в зависимости от характеристик квантового фильтра измерительного инструмента. Модель имеет особенно простой вид для измерений без взаимодействия измеряемой системы с инструментом, но может быть использована для описания измерений, содержащих взаимодействие.

Литература

1. Basic Atomic Spectroscopic Data. — `http://physics.nist.gov/PhysRefData`.
2. *Курышкин В. В.* Квантовые функции распределения: Дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.04.02. — М., 1969. [*Kurihshkin V. V.* Kvantovihe funkcii raspredeleniya: Diss. kand. fiz.-mat. nauk: 01.04.02. — M., 1969.]
3. *Davies E. B.* Quantum Theory of Open Systems. — Acad. Press Inc., 1976.
4. *Березин Ф. А., Шубин М. А.* Уравнение Шредингера. — М.: Изд-во МГУ, 1983. [*Berezin F. A., Shubin M. A.* Uravnenie Shredingera. — M.: Izd-vo MGU, 1983.]
5. *Тарасов В. Е.* Квантовая механика. — М.: Вузовская книга, 2000. [*Tarasov V. E.* Kvantovaya mekhanika. — M.: Vuzovskaya kniga, 2000.]
6. *Тарасов В. Е.* Квантовые диссипативные системы I. Каноническое квантование и квантовое уравнение Лиувилля // ТМФ. — 1994. — Т. 100. — С. 402. [*Tarasov V. E.* Kvantovihe dissipativnihe sistemih I. Kanonicheskoe kvantovanie i kvantovoe uravnenie Liuvillya // TMF. — 1994. — T. 100. — C. 402.]
7. *Тарасов В. Е.* Квантовые диссипативные системы. III. Определение и алгебраическая структура // ТМФ. — 1997. — Т. 110. — С. 73. [*Tarasov V. E.* Kvantovihe dissipativnihe sistemih. III. Opredelenie i algebraicheskaya struktura // TMF. — 1997. — T. 110. — C. 73.]
8. *Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г.* // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — 1992. — Т. 40. [*Filippov V. M., Savchin V. M., Shorokhov S. G.* // Sovremennihe problemih matematiki. Noveyjshie dostizheniya. — 1992. — T. 40.]
9. *Тарасов В. Е.* Вейлевское квантование динамических систем с плоским фазовым пространством // Вестник МГУ, сер. «Физика. Астрономия». — 2001. — № 6. — С. 6–9. [*Tarasov V. E.* Veyjlevskoe kvantovanie dinamicheskikh sistem s ploskim fazovihm prostranstvom // Vestnik MGU, ser. «Fizika. Astronomiya». — 2001. — No 6. — S. 6–9.]
10. *Тарасов В. Е.* Квантование негамильтоновых систем. [*Tarasov V. E.* Kvantovanie negamiljtonovihkh sistem.]
11. *Зайцев Г. А.* Алгебраические проблемы математической и теоретической физики. — М.: Наука, 1974. [*Zayjcev G. A.* Algebraicheskie problemih matematicheskoyj i teoreticheskoyj fiziki. — M.: Nauka, 1974.]

12. *Березин Ф. А.* Об одном представлении операторов с помощью функционалов // Труды Моск. математич. об-ва. — 1967. — Т. 17. — С. 117–196. [*Berezin F. A.* Ob odnom predstavlenii operatorov s pomothjyu funkcionalov // Trudih Mosk. matematich. ob-va. — 1967. — T. 17. — S. 117–196.]
13. *Березин Ф. А.* Квантование // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1974. — Т. 38, № 5. — С. 1116–1175. [*Berezin F. A.* Kvantovanie // Izv. AN SSSR. Ser. matem. — 1974. — T. 38, No 5. — S. 1116–1175.]
14. *Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащённые гильбертовы пространства. — М.: Наука, 1961. [*Geljfand I. M., Vilenkin N. Ya.* Nekotorihe primeneniya garmonicheskogo analiza. Osnathyonnihe giljbertovih prostranstva. — M.: Nauka, 1961.]
15. *Mehta C. L.* Phase-Space Formulation of the Dynamics of Canonical Variables // J. Math. Phys. — 1964. — Vol. 5. — Pp. 677–686.
16. *Cohen L.* Generalized Phase-Space Distribution Functions // J. Math. Phys. — 1966. — Vol. 7, issue 5. — Pp. 781–948.
17. *Wigner E.* On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium // Phys. Rev. — 1932. — Vol. 40. — Pp. 749–759.
18. *Wódkiewicz K.* Operational Approach to Phase-Space Measurements in Quantum Mechanics // Phys. Rev. Lett. — 1984. — Vol. 52. — P. 1064.
19. *Kochanski P., Wodkiewicz K.* Operational Measurements in Quantum Mechanics // Rep. Math. Phys. — 1997. — Vol. 40. — Pp. 245–253.
20. *Weyl H.* Quantenmechanik und Gruppentheorie // Z. f. Physik. — 1927. — Vol. 46. — Pp. 1–46.
21. *Березин Ф. А., Шубин М. А.* Лекции по квантовой механике. — М.: Изд-во МГУ, 1972. [*Berezin F. A., Shubin M. A.* Lekcii po kvantovoyj mekhanike. — M.: Izd-vo MGU, 1972.]
22. *Gracia-Bonda J. M., Varilly J. C.* Nonnegative Mixed States in Weyl-Wigner-Moyal Theory // Phys. Lett. A. — 1988. — Vol. 128. — Pp. 20–24.
23. *Holevo A. S.* Statistical Structure of Quantum Theory // Lect. Notes Phys. — 2001. — Vol. 67.
24. *Holevo A. S.* Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory. — North Holland, 1982.
25. *Хелстром К.* Квантовая теория оценивания. — М.: Мир, 1976. [*Khelstrom K.* Kvantovaya teoriya ocenivaniya. — M.: Mir, 1976.]
26. *Курышкин В. В.* К построению квантовых операторов // Известия ВУЗОВ. Физика. — 1971. — № 11. — С. 102–106. [*Kurihshkin V. V.* K postroeniyu kvantovihkh operatorov // Izvestiya VUZOV. Fizika. — 1971. — No 11. — S. 102–106.]
27. *Kuryshkin V. V.* La mechanique quantique avec une fonction nonnegative de distribution dans l'espace des phases // Annales Inst. Henry Pointcare. — 1972. — Vol. 17, No 1. — Pp. 81–95.
28. *Slavnov D. A.* Causality and Probabilistic Interpretation of Quantum Mechanics. — 2000. — `http://arxiv.org/abs/quant-ph/0001061`.
29. *Славнов Д. А.* Физическая реальность в алгебраическом подходе к квантовой механике // Теоретическая физика. — 2001. — Т. 2. — С. 123–136. [*Slavnov D. A.* Fizicheskaya realjnostj v algebraicheskom podkhode k kvantovoyj mekhanike // Teoreticheskaya fizika. — 2001. — T. 2. — S. 123–136.]
30. *Славнов Д. А.* Статистико-алгебраический подход к квантовой механике // ТМФ. — 2001. — Т. 129. — С. 87–102. [*Slavnov D. A.* Statistiko-algebraicheskiyj podkhod k kvantovoyj mekhanike // TMF. — 2001. — T. 129. — S. 87–102.]
31. *Славнов Д. А.* Квантовая механика как полная физическая система // ТМФ. — 2002. — Т. 132. — С. 434–448. [*Slavnov D. A.* Kvantovaya mekhanika kak polnaya fizicheskaya sistema // TMF. — 2002. — T. 132. — S. 434–448.]
32. *Славнов Д. А.* Квантовые измерения и Колмогоровская теория вероятности // ТМФ. — 2003. — Т. 136. — С. 436–443. [*Slavnov D. A.* Kvantovihe

izmereniya i Kolmogorovskaya teoriya veroyatnosti // TMF. — 2003. — T. 136. — S. 436–443.]
33. *Славнов Д. А.* Постулаты квантовой механики и феноменология. Препринт НИИЯФ МГУ № 2004-8/747. [*Slavnov D. A.* Postulatih kvantovoyj mekhaniki i fenomenologiya. Preprint NIIYaF MGU No 2004-8/747.]
34. *Славнов Д. А.* Необходимые и достаточные постулаты квантовой механики // ТМФ. — 2005. — Т. 142. — С. 510–529. [*Slavnov D. A.* Neobkhodimihe i dostatochnihe postulatih kvantovoyj mekhaniki // TMF. — 2005. — T. 142. — S. 510–529.]
35. *Славнов Д. А.* Измерения и математический аппарат квантовой физики // ЭЧАЯ. — 2007. — Т. 38. — С. 295–359. [*Slavnov D. A.* Izmereniya i matematicheskiyj apparat kvantovoyj fiziki // EhChAYa. — 2007. — T. 38. — S. 295–359.]
36. *Славнов Д. А.* Проблема локальности в квантовых измерениях // ЭЧАЯ. — 2010. — Т. 41. — С. 267–316. [*Slavnov D. A.* Problema lokaljnosti v kvantovihkh izmereniyakh // EhChAYa. — 2010. — T. 41. — S. 267–316.]
37. *Sevastianov L. A., Zorin A. V., Gorbachev A. V.* Pseudo-Differential Operators in the Operational Model of a Quantum Measurement of Observables // Lecture Notes in Computer Science. — 2012. — Vol. 7125. — Pp. 174–181.
38. *Kuryshkin V. V., Zaparovanny Y. I., Lyabis I. A.* Sur les problemes de la regle de correspondence en theory quantiques // Annales Fond. L. De Broglie. — 1978. — Vol. 3, No 1. — Pp. 45–61.
39. *Зорин А. В.* Метод исследования существенного и дискретного спектров оператора Гамильтона водородоподобного атома в квантовой механике Курышкина // Вестник РУДН, сер. «Прикладная и компьютерная математика». — 2004. — Т. 3, № 1. — С. 121–131. [*Zorin A. V.* Metod issledovaniya suthestvennogo i diskretnogo spektrov operatora Gamiljtona vodorodopodobnogo atoma v kvantovoyj mekhanike Kurihshkina // Vestnik RUDN, ser. «Prikladnaya i kompjyuternaya matematika». — 2004. — T. 3, No 1. — S. 121–131.]
40. *Kuryshkin V. V., Zaparovanny Y. I.* L'atome d'hydrogene dans mechanique quantique a fonction de distribution non-negative dans l'espace des phases // Comp. Rend. Acad. Sc. Paris. Serie B. — 1974. — Vol. 277. — Pp. 17–21.
41. *Зорин А. В., Севастьянов Л. А.* Математическое моделирование квантовой механики с неотрицательной КФР // Вестник РУДН, Сер. «Физика». — 2003. — Т. 11, № 2. — С. 81–87. [*Zorin A. V., Sevastjyanov L. A.* Matematicheskoe modelirovanie kvantovoyj mekhaniki s neotricateljnoyj KFR // Vestnik RUDN, Ser. «Fizika». — 2003. — T. 11, No 2. — S. 81–87.]
42. *Zorin A. V., Sevastianov L. A.* Hydrogen-Like Atom with Nonnegative Quantum Distribution Function // Ядерная физика. — 2007. — Т. 70, № 4. — С. 792–799. [*Zorin A. V., Sevastianov L. A.* Hydrogen-Like Atom with Nonnegative Quantum Distribution Function // Yadernaya fizika. — 2007. — T. 70, No 4. — S. 792–799.]
43. *Зорин А. В.* Переходные вероятности в квантовой механике Курышкина // Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика». — 2008. — № 4. — С. 68–74. [*Zorin A. V.* Perekhodnihe veroyatnosti v kvantovoyj mekhanike Kurihshkina // Vestnik RUDN, seriya «Matematika. Informatika. Fizika». — 2008. — No 4. — S. 68–74.]
44. *Зорин А. В.* Моменты наблюдаемых величин в модели квантовых измерений Курышкина–Вудкевича // Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика». — 2010. — № 4. — С. 112–117. [*Zorin A. V.* Momentih nablyudaemihkh velichin v modeli kvantovihkh izmereniyj Kurihshkina–Vudkevicha // Vestnik RUDN, seriya «Matematika. Informatika. Fizika». — 2010. — No 4. — S. 112–117.]
45. *Зорин А. В., Севастьянов Л. А.* Модель квантовых измерений Курышкина–Вудкевича // Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика». —

2010. — № 3. — С. 99–104. [*Zorin A. V., Sevastjyanov L. A.* Modelj kvantovihkh izmereniyj Kurihshkina–Vudkevicha // Vestnik RUDN, seriya «Matematika. Informatika. Fizika». — 2010. — No 3. — S. 99–104.]
46. *Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И., Халили Ф. Я.* Квантовые особенности понде-ромоторного измерителя электромагнитной энергии // ЖЭТФ. — 1977. — Т. 73. — С. 1340–1343. [*Braginskiyj V. B., Voroncov Yu. I., Khalili F. Ya.* Kvantovihe osobennosti ponde-romotornogo izmeritelya ehlektromagnitnoyj ehnergii // ZhEhTF. — 1977. — T. 73. — S. 1340–1343.]
47. *Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И., Халили Ф. Я.* Оптимальные квантовые измерения в детекторах гравитационного излучения // Письма в ЖЭТФ. — 1978. — Т. 27. — С. 296–298. [*Braginskiyj V. B., Voroncov Yu. I., Khalili F. Ya.* Optimaljnihe kvantovihe izmereniya v detektorakh gravitacionnogo izlucheniya // Pisjma v ZhEhTF. — 1978. — T. 27. — S. 296–298.]
48. *Холево А. С.* О принципе квантовых неразрушающих измерений // ТМФ. — 1985. — Т. 65. — С. 415–422. [*Kholevo A. S.* O principe kvantovihkh nerazrushayuthikh izmereniyj // TMF. — 1985. — T. 65. — S. 415–422.]

UDC 519.62; 530.145; 539.18

The Operational Model of Quantum Measurement of Kuryshkin–Wodkiewicz

A. V. Zorin

Computational Physics and Mathematical Modeling Research Laboratory
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

K. Wodkiewicz describes Holevo–Helstrom method, and proposes his own operational model of quantum measurements as an example of using this method. It involves the quantum probability distribution function $P(q,p) = (W_\psi * W_\varphi)(q,p)$. Here W_φ is the Wigner distribution function of the quantum state of a quantum system before measurement, W_ψ is the quantum Wigner distribution function of the quantum filter before the measurement procedure. It is known that the convolution of two quantum Wigner distribution functions is positive-definite probability distribution function in phase space of a quantum system.

Quantum Wigner distribution function is uniquely related to Weyl quantization rule, which says that a classical observable $A(q,p)$ corresponds to a (pseudo) differential operator $O_W(A)$, whose symbol is the function $A(q,p)$. The paper states that Kuryshkin quantization rule is associated with the quantum distribution Kuryshkin–Wodkiewicz function. This quantization rule corresponds to a classical observable $A(q,p)$ the operator of the observable $O_\psi(A)$ with the symbol $A_G(q,p) = (A * \Phi)(q,p)$. Here $\Phi(q,p) = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{ipq}{\hbar}} \psi(q) \tilde{\psi}(p)$, where $\tilde{\psi}(p)$ is the Fourier transform of the state function $\psi(q)$ of the quantum filter.

Key words and phrases: operational model of quantum measurement, quantization rule, quantum distribution function, average values of observables, measured values of observables.