Теория вероятностей и математическая статистика

УДК 519.24

Об оценке скорости сходимости математического ожидания статистики L_N к линейному функционалу от спектральной плотности $L(f)$ стационарной гауссовской последовательности

А. Ю. Шомахов

Кафедра Высшей математики
Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова
Стремянной пер. д. 36, 117997, Москва, Россия

Пусть $\mathrm{X}(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — вещественнозначная стационарная гауссовская центрированная последовательность, обладающая спектральной плотностью $f(\lambda)$. Рассматривается проблема оценивания скорости сходимости математического ожидания статистики $L_N = \int \varphi(\lambda) I_N(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda$, $\lambda \in [-\pi; \pi]$, где $I_N(\lambda)$ — периодограмма последовательности $\mathrm{X}(t), t = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ к линейному функционалу от спектральной плотности $L(f) = \int \varphi(\lambda) f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda$ стационарной гауссовской последовательности на основе выборки $\{\mathrm{X}(1), \mathrm{X}(2), \ldots, \mathrm{X}(N)\}$ объема N.

Ключевые слова: стационарный процесс, периодограмма процесса, спектральная плотность, спектральное среднее, асимптотическая несмещённость, классы Никольского, ядро Фейера.

Пусть $\mathrm{X}(t), t = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ — гауссовская стационарная последовательность со средним ноль ($E\mathrm{X}(t) = 0$) и *спектральной плотностью (с.п.)* $f(\lambda), \lambda \in [-\pi; \pi]$, с $f(-\lambda) = f(\lambda)$, где E — оператор математического ожидания. Отметим также, что

$$E\mathrm{X}(t)\,\mathrm{X}(t') = cov(\mathrm{X}(t), \mathrm{X}(t')) = K(t, t') = k(t - t') = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-t')} f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda, \qquad (1)$$

где $t,\ t' = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, а $K(t, t') = k(t - t')$ — ковариационная функция последовательности $\mathrm{X}(t), t = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$. Стационарную случайную последовательность $\mathrm{X}(t), t = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ предполагаем вещественнозначной (действительной). Рассматривается стационарная гауссовская случайная последовательность $\mathrm{X}(t), t = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, то есть случай дискретного времени, поэтому областью изменения Q переменной λ (частоты) является отрезок (сегмент) $[-\pi; \pi]$.

Рассмотрим так называемое *спектральное среднее* стационарной случайной последовательности $\mathrm{X}(t), t = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, то есть линейный функционал $L(f)$ вида [1–3]

$$L(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda) f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda, \qquad (2)$$

где $\varphi(\lambda)$ — суммируемая функция, называемая *спектрально-усредняющей (с.у.)* функцией. В дальнейшем будем предполагать, что спектрально-усредняющая функция $\varphi(\lambda)$ вещественная и четная.

Заметим, что если $\varphi(\lambda)$ — индикатор отрезка (сегмента) $[-\pi;\mu]$, то

$$L(f) = \int_{-\pi}^{\mu} f(\lambda)\mathrm{d}\lambda = F(\mu),$$

где $F(\mu)$ — спектральная функция стационарной случайной последовательности $\mathrm{X}(t), t = 0, \pm1, \pm2\ldots$. Если $\varphi(\lambda) = e^{i\lambda\left(t-t'\right)}$, то

$$L(f) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\left(t-t'\right)} f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = k(t-t'),$$

где $k(t-t')$ — ковариационная функция процесса $\mathrm{X}(t), t = 0, \pm1, \pm2\ldots$.

В качестве оценки $L(f)$ будем рассматривать статистику L_N вида [2, 4, 5]

$$L_N = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda) I_N(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \tag{3}$$

где $I_N(\lambda)$ — так называемая *периодограмма* процесса $\mathrm{X}(t), t = 0, \pm1, \pm2\ldots$, которая имеет следующий вид

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{t=1}^{N} \mathrm{X}(t)e^{-it\lambda}\right|^2 \tag{4}$$

Напомним, что оценка L_N функционала $L(f)$ называется *асимптотически несмещенной*, если

$$\lim_{N\to\infty}\left[E(L_N) - L(f)\right] = 0, \tag{5}$$

где N — объем выборки.

В работах [6, 7] проведена оценка скорости сходимости в (5), когда $f(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ принадлежат функциональным классам Никольского $H_p(\gamma)$ для процессов с непрерывным временем.

Эти функциональные классы определяются следующим образом [5]:

$$H_p(\gamma) = \left\{\psi(\lambda) \in L_p, \left\|\psi^{(r)}(\lambda+h) - \psi^{(r)}(\lambda)\right\|_p \leqslant C\,|h|^{\alpha}\right\}, \tag{6}$$

где $0 < \alpha < 1$, $r \in N$, $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\gamma = r + \alpha$, $p \geqslant 1$, C — константа, не зависящая от h, а

$$L_p = L_p(Q) = \left\{f; \|f\|_p = \left(\int_Q |f(\lambda)|^p\,\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}, \quad 1 \leqslant p < \infty$$

— пространства суммируемых функций. Неравенство (6) выполняется при $\lambda \in [-\pi;\pi]$.

В работах [6, 7] оценена скорость сходимости в (5), когда спектральная плотность $f(\lambda) \in H_p(\gamma_1)$, спектральная усредняющая функция $\varphi(\lambda) \in H_q(\gamma_2)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$. Все вышеизложенное касалось процессов с непрерывным временем.

Цель настоящей работы — рассмотреть эту же задачу для процессов с дискретным временем. Рассматриваемая в данной работе проблема является частью общей проблемы непараметрического статистического оценивания $L(f)$ на основе выборки $\{\mathrm{X}(1), \mathrm{X}(2), \ldots, \mathrm{X}(N)\}$ объема N гауссовского стационарного центрированного $(E\mathrm{X}(t)=0)$ случайного процесса $\mathrm{X}(t), t=0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

Замечание. Здесь и всюду ниже через C будем обозначать различные положительные постоянные. Все рассматриваемые функции, в том числе и спектральную плотность, будем считать периодичными с периодом 2π.

Для доказательства приведенной ниже теоремы нам понадобятся некоторые предварительные результаты.

Функция $F_N(u)$, называемая *ядром Фейера,* определяется следующим образом

$$F_N(u)=\frac{1}{2\pi N}\left(\frac{\sin\frac{Nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2, \qquad u\in[-\pi;\ \pi]. \tag{7}$$

Лемма 1. *Определенное по (7) ядро $F_N(u)$ является четным, неотрицательным и обладает следующими свойствами:*

$$1)\quad \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u)\mathrm{d}u=1 \tag{8}$$

$$2)\quad \int_{1}^{\pi} F_N(u)\mathrm{d}u\leqslant CN^{-1} \tag{9}$$

$$3)\quad \int_{0}^{1} F_N(u)u^{\alpha}\mathrm{d}u\leqslant\begin{cases} CN^{-\alpha}, & \text{при } \alpha<1\\ CN^{-1}\ln N, & \text{при } \alpha=1\\ \mathrm{C}N^{-1}, & \text{при } \alpha>1.\end{cases} \tag{10}$$

Доказательство приведено, например, в [8].

Лемма 2. *Справедливо следующее соотношение*

$$E(L_N)=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x-y)f(x)\varphi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x, \tag{11}$$

где $f(x)$ — спектральная плотность; $\varphi(y)$ — спектрально-усредняющая функция; $F_N(x-y)$ — ядро Фейера; E — оператор математического ожидания.

Доказательство приведено в [6].

Лемма 3. *Пусть $\psi(\lambda+u)\in H_p(\gamma)$ с $\gamma=r+\alpha$, где $r\in N$, $\quad N=\{1,\ 2,\ 3,\ldots\}$, $0<\alpha<1$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а)

$$\left\|\psi^{(j)}\right\|_p\leqslant C<\infty, \quad j=\overline{1,r} \tag{12}$$

б) функция $\psi(\lambda+u)$ разлагается в ряд Тейлора

$$\psi(\lambda+u)=\sum_{n=0}^{r}\frac{\psi^{(n)}(\lambda)}{n!}u^n+R(\lambda+u,\lambda), \tag{13}$$

где $R(\lambda+u,\lambda)$ — это остаточный член, удовлетворяющий неравенству

$$\|R(\lambda+u,\lambda)\|_p \leqslant \frac{C}{r!}\ |u|^{r+\alpha}\,. \tag{14}$$

Доказательство приведено, например, в [8].

Перейдем теперь к формулировке и доказательству результата данной работы.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *спектральная плотность $f(\lambda)\in H_p(\gamma_1)$, $0<\gamma_1<1$, $p\geqslant 1$; спектрально-усредняющая функция $\varphi(\lambda)\in H_q(\gamma_2)$, $0<\gamma_2<1$, $q\geqslant 1$ при $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$;*
2) *спектральная плотность $f(\lambda)\in H_p(\gamma_1)$, $\gamma_1\geqslant 1$, $p\geqslant 1$; спектрально-усредняющая функция $\varphi(\lambda)\in H_q(\gamma_2)$, $0<\gamma_2<1$, $q\geqslant 1$ при $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$;*
3) *спектральная плотность $f(\lambda)\in H_p(\gamma_1)$, $0<\gamma_1<1$, $p\geqslant 1$; спектрально-усредняющая функция $\varphi(\lambda)\in H_q(\gamma_2)$, $\gamma_2\geqslant 1$, $q\geqslant 1$ при $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$;*
4) *спектральная плотность $f(\lambda)\in H_p(\gamma_1)$, $\gamma_1\geqslant 1$, $p\geqslant 1$; спектрально-усредняющая функция $\varphi(\lambda)\in H_q(\gamma_2)$, $\gamma_2\geqslant 1$, $q\geqslant 1$ при $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.*

Тогда

$$|K_N|\leqslant\begin{cases} CN^{-(\gamma_1+\gamma_2)}\ ,\ \textit{при}\ \gamma_1+\gamma_2<1\\ CN^{-1}\ln N\ ,\ \textit{при}\ \gamma_1+\gamma_2=1\\ CN^{-1}\ ,\ \textit{при}\ \gamma_1+\gamma_2>1,\end{cases}$$

где $K_N=E(L_N)-L(f)$.

Доказательство. Согласно (11) имеем

$$E(L_N)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F_N(u)f(\lambda+u)\varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F_N(u)f(\lambda+u)\varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}u+ \\ +\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F_N(u)f(\lambda+u)\varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}u.$$

Функция $F_N(u)$ является чётной, то есть $F_N(-u)=F_N(u)$, поэтому выражение $F_N(u)f(\lambda+u)\varphi(\lambda)$ во втором двойном интеграле запишем следующим образом

$$F_N(u)f(\lambda+u)\varphi(\lambda)=F_N(u)f(\lambda)\varphi(\lambda+u).$$

Тогда

$$E(L_N)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F_N(u)f(\lambda+u)\varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F_N(u)f(\lambda)\varphi(\lambda+u)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}u. \tag{15}$$

Учитывая (2), (8) и равенство $\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\lambda)\varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\lambda+u)\varphi(\lambda+u)\mathrm{d}\lambda$, получим

$$L(f)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\lambda)\varphi(\lambda)\int\limits_{-\pi}^{\pi}F_N(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}\lambda=\int\limits_{-\pi}^{\pi}F_N(u)\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\lambda)\varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}u=$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) f(\lambda)\varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) f(\lambda+u)\varphi(\lambda+u)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(u)\int_{-\pi}^{\pi}(f(\lambda)\varphi(\lambda)+f(\lambda+u)\varphi(\lambda+u))\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}u,$$

т.е. линейный функционал $L(f)$ можно представить в следующем виде

$$L\,(f) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(u)\int_{-\pi}^{\pi}(f(\lambda)\varphi(\lambda)+f(\lambda+u)\varphi(\lambda+u))\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}u. \qquad (16)$$

Учитывая (15) и (16), получим

$$E(L_N) - L(f) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) f(\lambda+u)\varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}u +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) f(\lambda)\varphi(\lambda+u)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) f(\lambda)\varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}u -$$
$$- \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) f(\lambda+u)\varphi(\lambda+u)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(u)(f(\lambda)\varphi(\lambda+u) -$$
$$- f(\lambda)\varphi(\lambda) - f(\lambda+u)\varphi(\lambda+u) + f(\lambda+u)\varphi(\lambda))\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}u.$$

Далее,

$$E(L_N) - L(f) =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(u)(f(\lambda)\left[\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda)\right] - f(\lambda+u)\left[\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda)\right])\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}u =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(u)(f(\lambda)-f(\lambda+u))(\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda))\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}u.$$

Итак,

$$K_N = E(L_N) - L(f) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(u)(f(\lambda)-f(\lambda+u))(\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda))\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}u. \qquad (17)$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера, из (17) находим, что

$$|K_N| = \left|\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(u)(f(\lambda)-f(\lambda+u))(\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda))\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}u\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|F_N(u)\int_{-\pi}^{\pi}(f(\lambda)-f(\lambda+u))(\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda))\mathrm{d}\lambda\right|\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |F_N(u)| \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda) - f(\lambda+u))(\varphi(\lambda+u) - \varphi(\lambda)) \mathrm{d}\lambda\right| \mathrm{d}u \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_N(u) \int\limits_{-\pi}^{\pi} |(f(\lambda) - f(\lambda+u))(\varphi(\lambda+u) - \varphi(\lambda))| \,\mathrm{d}\lambda \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_N(u) \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda) - f(\lambda+u)| \; |\varphi(\lambda+u) - \varphi(\lambda)| \,\mathrm{d}\lambda \mathrm{d}u \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_N(u) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda+u) - f(\lambda)|^p \,\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\lambda+u) - \varphi(\lambda)|^q \,\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{q}} \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_N(u) \left\|f(\lambda+u) - f(\lambda)\right\|_p \left\|\varphi(\lambda+u) - \varphi(\lambda)\right\|_q \mathrm{d}u.$$

Итак,

$$|K_N| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_N(u) \left\|f(\lambda+u) - f(\lambda)\right\|_p \left\|\varphi(\lambda+u) - \varphi(\lambda)\right\|_q \mathrm{d}u. \tag{18}$$

Далее, воспользовавшись неравенством Минковского (неравенство треугольника для пространств функций с интегрируемой p-й степенью), будем иметь

$$\left\|f(\lambda+u) - f(\lambda)\right\|_p = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda+u) - f(\lambda)|^p \,\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda+u)|^p \,\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |-f(\lambda)|^p \,\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda+u)|^p \,\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda)|^p \,\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\|f(\lambda+u)\right\|_p + \left\|f(\lambda)\right\|_p. \tag{19}$$

Аналогично $\left\|\varphi(\lambda+u) - \varphi(\lambda)\right\|_q \leqslant \left\|\varphi(\lambda+u)\right\|_q + \left\|\varphi(\lambda)\right\|_q$.

Далее, так как функции $f(\lambda)$ являются периодичными с периодом 2π, то

$$\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda+u)|^p \,\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda)|^p \,\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}},$$

т.е.

$$\left\|f(\lambda+u)\right\|_p = \left\|f(\lambda)\right\|_p, \tag{20}$$

где $-\pi \leqslant u \leqslant \pi$. Аналогично $\left\|\varphi(\lambda+u)\right\|_q = \left\|\varphi(\lambda)\right\|_q$, где $-\pi \leqslant u \leqslant \pi$. Тогда, учитывая (18), (19) и (20), получим

$$|K_N| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} F_N(u) \left\|f(\lambda+u) - f(\lambda)\right\|_p \left\|\varphi(\lambda+u) - \varphi(\lambda)\right\|_q \mathrm{d}u+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{-1}F_N(u)\left\|f(\lambda+u)-f(\lambda)\right\|_p\left\|\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda)\right\|_q\mathrm{d}u+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{\pi}F_N(u)\left\|f(\lambda+u)-f(\lambda)\right\|_p\left\|\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda)\right\|_q\mathrm{d}u\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}F_N(u)\left\|f(\lambda+u)-f(\lambda)\right\|_p\left\|\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda)\right\|_q\mathrm{d}u+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{-1}2F_N(u)\left\|f(\lambda)\right\|_p 2\left\|\varphi(\lambda)\right\|_q\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{\pi}2F_N(u)\left\|f(\lambda)\right\|_p 2\left\|\varphi(\lambda)\right\|_q\mathrm{d}u=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}F_N(u)\left\|f(\lambda+u)-f(\lambda)\right\|_p\left\|\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda)\right\|_q\mathrm{d}u+$$

$$+2\left\|f(\lambda)\right\|_p\left\|\varphi(\lambda)\right\|_q\int\limits_{-\pi}^{-1}F_N(u)\mathrm{d}u+2\left\|f(\lambda)\right\|_p\left\|\varphi(\lambda)\right\|_q\int\limits_{1}^{\pi}F_N(u)\mathrm{d}u.$$

В силу чётности функции $F_N(u)$ выходит, что

$$|K_N|\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}F_N(u)\left\|f(\lambda+u)-f(\lambda)\right\|_p\left\|\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda)\right\|_q\mathrm{d}u+$$

$$+4\left\|f(\lambda)\right\|_p\left\|\varphi(\lambda)\right\|_q\int\limits_{1}^{\pi}F_N(u)\mathrm{d}u. \quad (21)$$

Далее, учитывая оценку (9), окончательно получаем, что

$$|K_N|\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}F_N(u)\left\|f(\lambda+u)-f(\lambda)\right\|_p\left\|\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda)\right\|_q\mathrm{d}u+CN^{-1}. \quad (22)$$

Согласно лемме 3

$$\left\|f(\lambda+u)-f(\lambda)\right\|_p=\left\|\sum_{n=1}^{r_1}\frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}u^n+R_1(\lambda+u,\lambda)\right\|_p\leqslant\left\|\sum_{n=1}^{r_1}\frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}u^n\right\|_p+$$

$$+\left\|R_1(\lambda+u,\lambda)\right\|_p\leqslant\sum_{n=1}^{r_1}\left\|\frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}u^n\right\|_p+\left\|R_1(\lambda+u,\lambda)\right\|_p\leqslant\sum_{n=1}^{r_1}\left\|u^n f^{(n)}(\lambda)\right\|_p+$$

$$+\left\|R_1(\lambda+u,\lambda)\right\|_p=\sum_{n=1}^{r_1}|u^n|\,\left\|f^{(n)}(\lambda)\right\|_p+\left\|R_1(\lambda+u,\lambda)\right\|_p\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{n=1}^{r_1}|u^n|+\frac{\mathrm{C}}{r_1!}|u|^{r_1+\alpha_1}=C\sum_{n=1}^{r_1}|u^n|+C|u|^{r_1+\alpha_1}.$$

Итак,

$$\left\|f(\lambda+u)-f(\lambda)\right\|_p \leqslant C\sum_{n=1}^{r_1}|u^n| + C\,|u|^{r_1+\alpha_1}. \tag{23}$$

Аналогично,

$$\left\|\varphi(\lambda+u)-\varphi(\lambda)\right\|_q \leqslant C\sum_{j=1}^{r_2}\left|u^j\right| + C\,|u|^{r_2+\alpha_2}. \tag{24}$$

– Случай, когда $0<\gamma_1<1$, $0<\gamma_2<1$. Оценка (22) примет следующий вид

$$|K_N| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} F_N(u)\,C\,|u|^{\gamma_1+\gamma_2}\,\mathrm{d}u + CN^{-1} \tag{25}$$

Учитывая четность функции $F_N(u)\,|u|^{\gamma_1+\gamma_2}$, получим

$$|K_N| \leqslant C\int\limits_{0}^{1} F_N(u)\ \ |\,u\,|^{\gamma_1+\gamma_2}\mathrm{d}u + CN^{-1}. \tag{26}$$

Учитывая (10), приходим к завершению рассмотрения случая 1.

– Случай, когда $\gamma_1 \geqslant 1$, $\gamma_2<1$. Учитывая (22), (23) и тот факт, что $\varphi \in H_q(\gamma_2)$ означает, что $\left\|\varphi^{(r_2)}(\lambda+u)-\varphi^{(r_2)}(\lambda)\right\|_q \leqslant C\,|u|^{\alpha_2}$, где $\gamma_2=r_2+\alpha_2$, $0<\alpha_2<1$ (у нас здесь $r_2=0$, так как $\gamma_2<1$), имеем следующую оценку

$$|K_N| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} F_N(u)\left(C\sum_{n=1}^{r_1}|u^n| + C\,|u|^{r_1+\alpha_1}\right)C\,|u|^{\alpha_2}\,\mathrm{d}u + CN^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} F_N(u)C\,|u|^{\alpha_2}\sum_{n=1}^{r_1}|u^n|\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} F_N(u)C\,|u|^{\alpha_2}\,|u|^{r_1+\alpha_1}\,\mathrm{d}u + CN^{-1}.$$

Окончательно получаем следующую оценку

$$|K_N| \leqslant C\sum_{n=1}^{r_1}\int\limits_{0}^{1} u^{n+\alpha_2}F_N(u)\mathrm{d}u + C\int\limits_{0}^{1} u^{\alpha_1+r_1+\alpha_2}F_N(u)\mathrm{d}u + CN^{-1}.$$

Учитывая (10), получим, что $|K_N| \leqslant \mathrm{C}N^{-1}$.
Рассмотрение случая 2 закончено.

– Случай, когда $\gamma_1<1$, $\gamma_2 \geqslant 1$. Учитывая (22), (24) и тот факт, что $f \in H_p(\gamma_1)$ означает, что $\left\|f^{(r_1)}(\lambda+u)-f^{(r_1)}(\lambda)\right\|_p \leqslant C\,|u|^{\alpha_1}$, где $\gamma_1=r_1+\alpha_1$, $0<\alpha_1<1$ (у нас здесь $r_1=0$, так как $\gamma_1<1$), имеем следующую оценку

$$|K_N| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} F_N(u)C\,|u|^{\alpha_1}\left(C\sum_{j=1}^{r_2}\left|u^j\right| + C\,|u|^{r_2+\alpha_2}\right)\mathrm{d}u + CN^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} CF_N(u)\,|u|^{\alpha_1}\sum_{j=1}^{r_2}\left|u^j\right|\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} CF_N(u)\,|u|^{\alpha_1+r_2+\alpha_2}\,\mathrm{d}u + CN^{-1}.$$

Окончательно получаем следующую оценку

$$|K_N| \leqslant C\sum_{j=1}^{r_2}\int_0^1 u^{j+\alpha_1}F_N(u)\mathrm{d}u + C\int_0^1 u^{\alpha_1+r_2+\alpha_2}F_N(u)\mathrm{d}u + \mathrm{C}N^{-1}.$$

Учитывая (10), получим, что $|K_N| \leqslant \mathrm{C}N^{-1}$.
Рассмотрение случая 3 закончено.

– Случай, когда $\gamma_1 \geqslant 1$, $\gamma_2 \geqslant 1$. Оценка (22), учитывая (23) и (24), примет следующий вид

$$|K_N| \leqslant \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} F_N(u)\left[C\sum_{n=1}^{r_1}|u^n| + C\,|u|^{r_1+\alpha_1}\right]\left[C\sum_{j=1}^{r_2}\left|u^j\right| + C\,|u|^{r_2+\alpha_2}\right]\mathrm{d}u + CN^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}C\int_{-1}^{1} F_N(u)\sum_{n=1}^{r_1}|u^n|\sum_{j=1}^{r_2}\left|u^j\right|\mathrm{d}u + \frac{1}{2}C\int_{-1}^{1} F_N(u)\sum_{n=1}^{r_1}|u^n|\,|u|^{r_2+\alpha_2}\mathrm{d}u +$$

$$+ \frac{1}{2}C\int_{-1}^{1} F_N(u)\,|u|^{r_1+\alpha_1}\sum_{j=1}^{r_2}\left|u^j\right|\mathrm{d}u + \frac{1}{2}C\int_{-1}^{1} F_N(u)\,|u|^{r_1+\alpha_1}\,|u|^{r_2+\alpha_2}\,\mathrm{d}u + CN^{-1} =$$

$$= C\sum_{n=1}^{r_1}\sum_{j=1}^{r_2}\int_0^1 F_N(u)u^{n+j}\mathrm{d}u + C\sum_{n=1}^{r_1}\int_0^1 F_N(u)u^{n+r_2+\alpha_2}\mathrm{d}u +$$

$$+ C\sum_{j=1}^{r_2}\int_0^1 F_N(u)u^{r_1+\alpha_1+j}\mathrm{d}u + C\int_0^1 F_N(u)u^{r_1+\alpha_1+r_2+\alpha_2}\mathrm{d}u + CN^{-1}.$$

Окончательно получаем

$$|K_N| \leqslant C\sum_{n=1}^{r_1}\sum_{j=1}^{r_2}\int_0^1 F_N(u)u^{n+j}\mathrm{d}u + C\sum_{n=1}^{r_1}\int_0^1 F_N(u)u^{n+r_2+\alpha_2}\mathrm{d}u +$$

$$+ C\sum_{j=1}^{r_2}\int_0^1 F_N(u)u^{r_1+\alpha_1+j}\mathrm{d}u + C\int_0^1 F_N(u)u^{r_1+\alpha_1+r_2+\alpha_2}\mathrm{d}u + CN^{-1}.$$

Учитывая (10), получим, что $|K_N| \leqslant CN^{-1}$. Рассмотрение случая 4 закончено.

Теорема доказана. □

Литература

1. *Бенткус Р., Рудзкис Р., Статулявичус В.* Экспоненциальные неравенства для оценок спектра стационарной гауссовской последовательности // Литовский математический сборник. — 1975. — Т. 15. — С. 25–39. [*Bentkus R., Rudzkis R., Statulyavichus V.* Ehksponencialjnihe neravenstva dlya ocenok spektra stacionarnoyj gaussovskoyj posledovateljnosti // Litovskiyj matematicheskiyj sbornik. — 1975. — T. 15. — S. 25–39.]
2. *Гиновян М. С.* Асимптотически эффективное непараметрическое оценивание функционалов от спектральной плотности, имеющей нули // Теория вероятностей и её применение. — 1988. — Т. 33, вып. 2. — С. 315–322.

[*Ginovyan M. S.* Asimptoticheski ehffektivnoe neparametricheskoe ocenivanie funkcionalov ot spektraljnoyj plotnosti, imeyutheyj nuli // Teoriya veroyatnosteyj i eyo primenenie. — 1988. — T. 33, вып. 2. — S. 315–322.]
3. *Ибрагимов И. А.* Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса // Теория вероятностей и её применение. — 1963. — Т. 8, вып. 4. — С. 391–430. [*Ibragimov I. A.* Ob ocenke spektraljnoyj funkcii stacionarnogo gaussovskogo processa // Teoriya veroyatnosteyj i eyo primenenie. — 1963. — T. 8, вып. 4. — S. 391–430.]
4. *Гиновян М. С.* Об оценке значения линейного функционала от спектральной плотности стационарного гауссовского процесса // Теория вероятностей и её применение. — 1988. — Т. 33, вып. 4. — С. 777–781. [*Ginovyan M. S.* Ob ocenke znacheniya lineyjnogo funkcionala ot spektraljnoyj plotnosti stacionarnogo gaussovskogo processa // Teoriya veroyatnosteyj i eyo primenenie. — 1988. — T. 33, вып. 4. — S. 777–781.]
5. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Об оценке значения линейного функционала от плотности распределения // Записки научного семинара ЛОМИ. — 1986. — Т. 153. — С. 45–53. [*Ibragimov I. A., Khasjminskiyj R. Z.* Ob ocenke znacheniya lineyjnogo funkcionala ot plotnosti raspredeleniya // Zapiski nauchnogo seminara LOMI. — 1986. — T. 153. — S. 45–53.]
6. *Ginovian M. S.* Asymptotic Properties of Spectrum Estimate of Stationary Gaussian Processes // Izvestiya Natsionalnoi Akademii Nauk Armenii. Matematika. — 1995. — Vol. 30, No 1. — Pp. 1–16.
7. *Шомахов А. Ю.* Об оценке скорости сходимости математического ожидания статистики L_T к линейному функционалу от спектральной плотности $L(f)$ стационарного гауссовского процесса // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». — 2010. — № 1(36). — С. 89–99. [*Shomakhov A. Yu.* Ob ocenke skorosti skhodimosti matematicheskogo ozhidaniya statistiki L_T k lineyjnomu funkcionalu ot spektraljnoyj plotnosti $L(f)$ stacionarnogo gaussovskogo processa // Vestnik MGTU im. N.Eh. Baumana. Ser. «Estestvennihe nauki». — 2010. — No 1(36). — S. 89–99.]
8. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969. — 480 с. [*Nikoljskiyj S. M.* Priblizhenie funkciyj mnogikh peremennihkh i teoremih vlozheniya. — M.: Nauka, 1969. — 480 s.]

UDC 519.24

On Estimation of Convergence Rate of Statistics Expectancy L_N to Linear Functional of Spectral Density $L(f)$ of Stationary Gaussian Process

A. Yu. Shomakhov

Plekhanov Russian University of Economics
Stremyanny per. 36, 117997, Moscow, Russian

For the real-valued stationary Gaussian centered process $\mathrm{X}(t), t = 0, \pm1, \pm2\ldots$, with a spectral density $f(\lambda)$, a problem is considered of estimating the convergence rate of expectancy of statistics $L_N = \int \varphi(\lambda) I_N(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda,\ \lambda \in [-\pi;\pi]$, where $I_N(\lambda)$ is a periodogram of a process $\mathrm{X}(t), t = 0, \pm1, \pm2\ldots$, to a linear functional of the spectral density $L(f) = \int \varphi(\lambda) f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$ of the stationary Gaussian process based on the sample $\{\mathrm{X}(1), \mathrm{X}(2), \ldots, \mathrm{X}(N)\}$.

Key words and phrases: stationary process, periodogram of a process, spectral density, spectral mean, asymptotic unbiasedness, Nikolsky classes, Fejér kernel.