Вестник РУДН Серия *Математика. Информатика. Физика.* № 3. 2009. С. 89–98

УДК 539.9

О буст-инвариантных решениях релятивистских уравнений поля

В. В. Кассандров, А. В. Третьякова

Институт гравитации и космологии
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Описываются твисторные алгебраические методы получения решений вакуумных уравнений Максвелла со сложной структурой сингулярного множества. Вводится понятие буст-инвариантных решений, с полевыми функциями, сохраняющими свои значения при гиперболическом повороте. Показано, что среди твисторно-генерируемых решений только бисингулярное решение Борна и две известные его модификации (с сингулярностью вида пары колец или расширяющегося тора) являются как аксиально-симметричными, так и буст-инвариантными.

Ключевые слова: твисторные методы, инвариантные решения, алгебродинамика, бисингулярное решение.

1. Частицы и поля в классическом релятивистском формализме

Линейные релятивистски инвариантные уравнения фундаментальных физических полей соответствуют частицам полуцелого или целого спина и классифицируются по соответствующим неприводимым (спинорным либо тензорным) представлениям группы Лоренца. Для описания процессов взаимодействия частиц используется либо калибровочная процедура (введение «компенсирующих» полей Янг-Миллса), либо метод эффективных лагранжианов и потенциалов, в основном чисто феноменологических [1, 2].

Введение потенциалов в принципе можно заменить выбором соответствующей нелинейности полевых уравнений, однако её общий вид до сих пор остаётся неопределённым. Ещё печальнее ситуация с определением структуры источников полей, в том числе электромагнитного (ЭМ) и гравитационного. Действительно, сами по себе уравнения Максвелла и Эйнштейна вообще не являются уравнениями, а скорее выступают в качестве *определения источников* ЭМ и гравитационного полей. Например, из производных любой (гладкой) псевдоримановой метрики составляется ненулевой тензор Эйнштейна, который определяет соответствующий тензор энергии-импульса некоторой эффективной материи, и вопрос о том, является ли данное распределение физически реализуемым или нет, в достаточной мере субъективен[1] . Та же ситуация имеет место и в электродинамике, где произвольное (гладкое) 4-векторное поле ЭМ потенциалов $A_\mu(x)$ тождественно удовлетворяет «уравнениям» Максвелла с эффективным источником - 4-вектором тока-заряда $J^\mu =: \partial_\nu F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu} =: \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, являющимися по существу не более чем определениями последнего.

Что касается гравитационного поля, то выход из этой ситуации был намечен ещё самим А. Эйнштейном, который считал, что на самом деле эффективный тензор энергии-импульса материи должен иметь чисто геометрическое происхождение, так что фактически имеет смысл рассматривать только *вакуумные уравнения* эйнштейновского типа, но на фоне другой, более богатой по внутренним свойствам геометрии (многомерной, с кручением, неметричностью и др.). В недавнее время такая точка зрения успешно развивалась, в частности, в работах А.В.

Статья поступила в редакцию 23 мая 2009 г.

[1]В концентрированном виде проблема источников возникает в современной космологии в связи с концепцией «тёмной материи» и «тёмной энергии»

Пушкина [3,4] и М.В. Горбатенко [5] на базе конформной геометрии Вейля. Ниже, однако, мы ограничимся только анализом полей в пространстве Минковского, и в первую очередь случаем ЭМ поля.

Истинные ограничения фундаментального характера на полевые распределения могут быть получены, например, на пути нелинейного обобщения электродинамики Максвелла[2] . В парадигме нелинейной электродинамики источники и поля представляют собой единую сущность: частицы-источники являются «полевыми сгустками» и отвечают солитоноподобным решениям нелинейных полевых уравнений с жёстко фиксированной самими уравнениями поля структурой и динамикой.

Чрезвычайно интересной модификацией этого подхода представляется предложенная впервые, по-видимому, в работах А.Ф. Раньяды с сотр. концепция *скрытой нелинейности* [12, 13], в рамках которой первичной сущностью являются некоторые (например, скалярные) поля, подчиняющиеся жёстким нелинейным уравнениям. При этом тензор напряжённости ЭМ поля просто *строится* из этих полей и их производных, так что для любого решения первичных уравнений индуцированное ЭМ поле тождественно удовлетворяет вакуумным уравнениям Максвелла. Последние при этом становятся как бы *вторичными*, и лишь некоторый подкласс их решений имеет физический смысл. Благодаря этому возникают ограничения на допустимые (т. е. совместимые с уравнениями для первичных скалярных полей) решения самих линейных вакуумных уравнений Максвелла, на их характеристики и временну́ю динамику. Был, в частности, обнаружен класс решений уравнений Максвелла с нетривиальной топологической структурой силовых линий [12,13] (см. также [14,15]).

Та же идея, однако следующая из первых принципов, по существу реализуется и в рамках развиваемого одним из авторов *алгебродинамического* (АД) подхода [16–18]. Здесь первичное поле имеет бикватернионную природу и подчиняется нелинейным уравнениям — обобщённым на алгебру бикватернионов уравнениям типа условий аналитичности Коши–Римана. Эти поля имеют тесную связь с твисторными структурами, что позволяет генерировать решения первичных АД уравнений и ассоциированных уравнений ЭМ и Янг-Миллсовского полей *чисто алгебраически*. Как и в работах Раньяды с сотр., в АД подходе *все индуцированные решения однородных уравнений Максвелла имеют целочисленный электрический заряд для каждой из изолированных сингулярностей*. С другой стороны, полученный с помощью алгебродинамической техники класс решений уравнений Максвелла не совпадает с решениями Раньяды и может быть охарактеризован как класс решений со сложной, *неточечной* структурой сингулярностей-источников.

Таким образом, как концепция «скрытой нелинейности» Раньяды, так и алгебродинамика демонстрируют, что структура наиболее простых, достоверных и известных более столетия полевых уравнений — вакуумных уравнений Максвелла — далеко не так тривиальна, как это принято считать. При этом стандартный подход, при котором источники (как правило, точечные, описываемые δ-функциями) создают ЭМ поля, действующие на другие заряды, не может рассматриваться как фундаментальный, поскольку оперирует по существу с двумя независимыми первичными сущностями — частицами и полями. Гораздо более общим и перспективным представляется чисто полевой подход, при котором регулярное в некоторой области «вакуумное» ЭМ поле при аналитическом продолжении вне её фиксирует положение и динамику сингулярностей — источников.

Именно такой подход позволяет рассматривать как физически значимые решения вакуумных уравнений Максвелла не только с точечной, но и с более общей *протяжённой* структурой сингулярностей. Действительно, далеко не все сингулярные решения однородных уравнений Максвелла могут быть воспроизведены с помощью задания эффективных δ-образных источников. Такая замена заведомо невозможна для *многозначных* ЭМ полей, наиболее известным примером которых является двузначное решение Керра–Ньюмена в ОТО (точнее, его плоский предел).

[2]Наиболее известными схемами нелинейной электродинамики являются теории Ми [6–8] и Борна–Инфельда [9–11]

Разумеется, сами по себе линейные однородные уравнения Максвелла не могут описать свойства реальных, тем более квантовых частиц. Однако они могут являться некоторой «тенью» первичных фундаментальных полевых уравнений, например в контексте концепции «скрытой нелинейности». В любом случае, последовательное изучение свойств их решений, как недавно обнаруженных, так и новых, со сложной топологией и сингулярной структурой, представляется чрезвычайно важным с физической точки зрения.

В этой статье, после краткого изложения твисторных методов получения решений уравнений Максвелла и общих свойств генерируемых при этом ЭМ полей (раздел 2), мы рассматриваем решения, инвариантные относительно некоторых преобразований координат (раздел 3). Вводится, в частности, понятие *буст-инвариантных решений*, для которых ЭМ поле сохраняет свои значения при некотором гиперболическом вращении (бусте). Далее рассматриваются дважды инвариантные решения, т. е. решения, являющиеся одновременно как буст-, так и аксиально-симметричными (инвариантными). Показано, что из широкого класса решений, генерируемых из первичного бикватернионного (твисторного) поля, таким дважды инвариантным решением является только известное «бисингулярное» решение Борна и его кольце- и торообразная модификации, полученные ранее в работах [19, 20]. Основные результаты работы резюмированы в заключении.

2. Твисторная структура и сингулярные решения уравнений Максвелла

Хорошо известно [21], что уравнения Максвелла допускают естественную *комплексную структуру*. А именно, для комплексно-значных ЭМ полей

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}} + i\vec{\mathcal{H}}, \tag{1}$$

где $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$ представляют вещественные векторы электрического и магнитного полей соответственно, однородные уравнения Максвелла записываются в следующей компактной форме (скорость света принята равной единице):

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = i\partial_t \vec{\mathcal{E}}, \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0, \tag{2}$$

Заметим, что появление мнимой единицы i здесь не случайно и имеет глубокую связь с геометрией пространства Минковского, а физически определяет правильную структуру законов Фарадея и Ампера–Максвелла. Известно также, что многие авторы, например Р. Пенроуз, рассматривали комплексно-значные ЭМ поля в качестве «волновой функции фотона».

Наличие внутренней комплексной структуры делает естественным рассмотрение *комплексно-аналитических* (в некоторой открытой области $\mathbf{M}$ пространства Минковского) решений уравнений (2). Однако такие функции, как правило, являются многозначными, и вне области аналитичности имеют *точки ветвления*. Математически такие сингулярности, очевидно, не могут описываться какими бы то ни было δ-образными распределениями. Однако их положение и динамика жёстко определяются структурой регулярной части поля, так что такие сингулярности имеют ясный физический смысл, в компактном случае — как частицеподобные образования. Наиболее известным примером такого рода является упомянутое во введении решение Керра–Ньюмена [22]. Широкий класс сингулярных решений однородных уравнений Максвелла был получен в работах [19, 23, 24] с помощью твисторных методов, к краткому изложению которых мы и перейдём сейчас.

Пусть на $\mathbf{M}$ введены спинорные координаты $X^{AA'}$, A, A', $\dots = 1, 2$, представимые эрмитовой матрицей X и связанные с декартовыми координатами каноническими соотношениями

$$X = X^{+} = \begin{pmatrix} u & w \\ p & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix}, \tag{3}$$

Одно из определений *твистора* $\mathbf{W}$ пространства $\mathbf{M}$ состоит в следующем [25]. Пусть имеется 2 двухкомпонентных спинора $\{\xi_{A'}, \tau^A\}$, связанных с точками пространства–времени так называемым *соотношением инцидентности* Пенроуза

$$\tau = X\xi \quad \Leftrightarrow \quad \tau^A = X^{AA'}\xi_{A'}. \tag{4}$$

Это соотношение определено с точностью до умножения на произвольное ненулевое комплексное число. Такая пара спиноров — элементов проективного комплексного трёхмерного пространства $\mathbb{C}P^3$ — называется *проективным твистором* пространства Минковского. Выбирая, например, однородные координаты в $\mathbb{C}^4$ как $\xi_{1'} = 1$, $\xi_{2'} = G$, будем иметь следующую связь между компонентами проективного твистора и точками $\mathbf{M}$:

$$\tau^1 = wG + u, \quad \tau^2 = vG + \bar{w}. \tag{5}$$

Если теперь рассматривать *твисторное поле* над $\mathbf{M}$, то соотношения инцидентности (5) играют роль дополнительных к уравнениям поля *связей*. Более того, при рассмотрении твисторного поля можно вообще обойтись без введения лагранжиана, заменив его некоторым функциональным уравнением между компонентами твистора. Простейшее из них имеет смысл ограничения значений твистора на произвольную (почти всюду гладкую) поверхность в $\mathbb{C}P^3$, задаваемую уравнением вида

$$\Pi(\mathbf{W}) = \Pi(G, \tau^1, \tau^2) = 0, \tag{6}$$

с произвольной аналитической функцией трёх твисторных аргументов Π. Действительно, с учётом (5) уравнение поверхности (6) может быть использовано для чисто алгебраического определения (в общем случае многозначного) поля проективного спинора $G(u, v, w, \bar{w})$ и, тем самым, полного твисторного поля. Таким образом, соотношение (6) в каком-то смысле действительно заменяет лагранжиан релятивистской теории поля.

Удивительно, что такая простая схема выявляет некоторую универсальную структуру различных релятивистских уравнений поля. Действительно, всякое поле $G(u, v, w, \bar{w})$, полученное как непрерывная ветвь решения системы алгебраических уравнений (5),(6), тождественно удовлетворяет как линейному уравнению д'Аламбера, так и нелинейному уравнению эйконала [19]. Более того, его вторые производные образуют (спин)тензор напряжённости ЭМ поля $\varphi_{(AB)}$, тождественно удовлетворяющий однородным уравнениям Максвелла $\nabla^{AA'}\varphi_{(AB)} = 0$. А именно, для компонент этого спинтензора имеем [18, 20]:

$$\varphi_{00} = \partial_u\partial_{\bar{w}} \ln G, \quad \varphi_{11} = \partial_v\partial_w \ln G, \quad \varphi_{01} = \varphi_{10} = \partial_w\partial_{\bar{w}} \ln G. \tag{7}$$

Для общего понимания отметим также, что такие распределения твисторного поля (и геометрически определяемая ими бессдвиговая изотропная конгруэнция лучей) имеют тесную связь с кватернионным анализом, со специальной геометрией Вейля–Картана, а также с решениями вакуумных уравнений Вейля, $SL(2, \mathbb{C})$-полей Янга–Миллса и электровакуумной системы Эйнштейна–Максвелла (см., например, обзор [18]).

Возвращаясь теперь к структуре ЭМ полей (7), заметим, что их компоненты могут быть выражены через производные Π_A, Π_{AB} (первого и второго порядков соответственно) генерирующей функции по соответствующим твисторным аргументам τ^A. А именно, имеем [20]:

$$\varphi_{(AB)} = \frac{1}{P}\left(\Pi_{AB} - \frac{d}{dG}\left(\frac{\Pi_A \Pi_B}{P}\right)\right), \tag{8}$$

причём обращение в ноль величины $P =: \mathrm{d}\Pi/\mathrm{d}G$ определяет структуру сингулярностей соответствующего ЭМ поля. Более того, соответствующая система алгебраических уравнений

$$\Pi(G, \tau^1, \tau^2) = 0, \quad P = \frac{\partial \Pi}{\partial G} + w\Pi_1 + v\Pi_2 = 0 \tag{9}$$

после исключения G (в полиномиальном случае — с помощью нахождения *результанта* двух многочленов) приводит к одной комплексной (двум вещественным) связи между координатами сингулярностей $\mathbf{M}$,

$$\Pi(u, v, w, \bar{w}) = 0, \tag{10}$$

представляющей собой *уравнение движения* сингулярностей ЭМ поля, а в фиксированный момент времени — уравнение *формы* и пространственного положения сингулярностей. Из соображений коразмерности сразу следует, что для решений общего вида (не обладающих, например, какой-либо симметрией) сингулярное множество представляет собой совокупность одномерных кривых — «струн» [17, 24]. Решения с точечными сингулярностями представляют собой очень частный случай сингулярных решений.

Алгебраическая процедура получения решений релятивистских (как линейных, так и нелинейных) уравнений поля, в том числе уравнений Максвелла, не имеет аналогов и позволяет получать решения с чрезвычайно сложной структурой сингулярного множества. Более того, «твисторно-генерируемые» решения уравнений Максвелла имеют некоторые свойства, присущие реальным квантовым частицам. В частности, электрический заряд любой ограниченной сингулярности равен либо нулю, либо целократен некоторому минимальному значению — заряду статического кулоновского решения, который жёстко фиксирован в отличие от обычной электродинамики Максвелла и играет роль *элементарного* заряда [17, 26]. В наших работах [19, 20, 23, 26] были получены различные типы твисторно-генерируемых решений уравнений Максвелла, в том числе волновые, бисингулярные, моделирующие процесс аннигиляции зарядов, а также решения с динамически перестраиваемой структурой сингулярного множества. В парадигме «скрытой нелинейности» твисторно-генерируемые решения приводят к обычной электродинамике Максвелла, обладающей, тем не менее, многими свойствами нелинейной теории (кроме, быть может, существования солитоноподобных решений).

3. Аксиально-симметричные и буст-инвариантные решения

Как в ОТО [27], так и в теории киральных полей, наиболее интересны решения, инвариантные относительно преобразований некоторой координатной или внутренней группы. В теории гравитации такие решения связаны с существованием векторов Киллинга и соответствующих им законов сохранения. В нелинейных теориях теорема Коулмена–Пале́ (см., например, [28]) позволяет считать, что именно на инвариантных решениях достигается истинный минимум функционала действия (в фиксированном гомотопическом классе).

С физической точки зрения естественно считать, что решения, описывающие структуру частиц или атомных систем со спином, являются аксиально симметричными. При этом в квантовой теории, как известно, условие инвариантности при вращениях относительно некоторой оси требуется не для волновой функции, а лишь для соответствующих ей вещественных билинейных форм, в то время как сама волновая функция может зависеть от азимутального угла через множитель $e^{iN\varphi}$, $N \in \mathbb{Z}$ (с учётом требования её однозначности). Для ЭМ поля, очевидно, в качестве условия его аксиальной симметрии следует требовать независимости от φ формы его *сингулярного множества* и его компонент (в цилиндрической или сферической системах координат).

Рассмотрим структуру аксиально-симметричных решений уравнений Максвелла, генерируемых с помощью вышеописанной алгебраической процедуры из некоторой твисторной функции $\Pi(\mathbf{W})$ и соответствующего ей решения $G(X)$ уравнения $\Pi(G, wG + u, vG + \bar{w}) = 0$. Множитель, факторизующий зависимость твисторных компонент от азимутального угла, соответствует подстановке $G = (\bar{w}/\rho)Y(u, v, \rho)$, $\rho =: \sqrt{\bar{w}w} = \sqrt{x^2 + y^2}$; при этом твисторные компоненты принимают вид $\tau^1 = \rho Y + u$, $\tau^2 = (\bar{w}/\rho)(vY + \rho)$, и при условии, что генерирующая функция Π зависит лишь от τ^1 и от *отношения* $\sigma = \tau_2/G$, возникает уравнение

$$\Pi(\tau^1, \sigma) =: \Pi(\rho Y + u,\ v + \rho/Y) = 0, \tag{11}$$

решение которого $Y(\rho, u, v)$, а вместе с ним и форма сингулярности и структура ассоциированного ЭМ поля не будут зависеть от азимутального угла φ. В частности, условие сингулярности (10) принимает вид:

$$Y^2 \frac{\partial \Pi}{\partial \tau^1} - \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma} = 0. \tag{12}$$

Если функция Π явно не содержит комплексные параметры, то после исключения Y из системы уравнений (11), (12) возникающее уравнение формы-движения сингулярностей $\Pi(u, v, \rho) = 0$ может оказаться вещественным. В этом случае в каждый момент времени $t = (u + v)/2$ имеется одна связь между двумя цилиндрическими координатами $z = (u - v)/2$ и ρ, определяющая форму некоторой сингулярной *поверхности вращения*. В исключительных случаях эта поверхность может вырождаться в совокупность точечных зарядов, двигающихся вдоль оси вращения. Пример подобного рода был рассмотрен, в частности, в работе [24]. Что же касается общего случая, то здесь мы встречаемся с системой коаксиальных сингулярных колец переменного, вообще говоря, радиуса. Согласно общей теореме квантования [17, 26], каждое из таких колец имеет электрический заряд, кратный минимальному («элементарному»). Ниже мы вернёмся к обсуждению структуры таких решений.

Инвариантность решения при повороте в некоторой *пространственной* плоскости, определяющая структуру аксиально-симметричного полевого распределения, в релятивистско-инвариантной теории имеет очевидный аналог, связанный с инвариантностью при гиперболических поворотах в одной из в *пространственно-временных* плоскостей. Пусть, например, все компоненты ЭМ или какого-либо другого релятивистского поля произвольно зависят от x, y (или, эквивалентно, от w, $\bar{w}$), а от t, z — лишь в виде комбинации $t^2 - z^2$. Тогда при гиперболическом вращении — бусте — на произвольный гиперболический угол θ, т. е. при преобразовании вида

$$t \mapsto t \operatorname{ch}\theta + z \operatorname{sh}\theta, \quad z \mapsto z \operatorname{ch}\theta + t \operatorname{sh}\theta, \tag{13}$$

такое решение «переходит в себя». Именно такие решения мы и могли бы называть *буст-инвариантными*. На самом деле, однако, это требование является слишком жёстким. Действительно, аналогия с аксиально-симметричным случаем показывает, что не во всех системах координат компоненты ЭМ поля независимы от азимутального угла; очевидно, это не имеет места для проекций поля на декартовы координатные оси x, y. Таким образом, под буст-инвариантным решением правильнее понимать такое, для которого существуют три компоненты ЭМ поля, значение которых не меняется при преобразовании гиперболического поворота на произвольный угол в некоторой пространственно-временной плоскости. Нахождение инвариантных компонент поля вполне аналогично нахождению радиальной и азимутальной компонент аксиально-симметричного решения. Другим эквивалентным определением буст-инвариантного решения может служить *требование инвариантности его сингулярного множества* (см. ниже).

Заметим теперь, что в отличие от аксиально-симметричных распределений существует «внешняя» ($t^2 - z^2 < 0$) и «внутренняя» ($t^2 - z^2 > 0$) области буст-инвариантных решений, преобразующиеся независимо «в себя» при гиперболических поворотах и разделённые областью 2-мерного «светового конуса» ($t^2 - z^2 = 0$). Отметим также, что аналогом «фазового фактора» $(\bar{w}/\rho) = e^{i\varphi}$, определяющего структуру «волновой функции» в аксиально-симметричном случае, для буст-инвариантных решений является, очевидно, множитель, пропорциональный $u = t + z$ (или $v = t - z$). Мы увидим ниже, что такая факторизация основного спинорного поля G автоматически приводит к буст-инвариантным решениям уравнений Максвелла.

Действительно, пусть $G = (u/s)U(w, \bar{w}, s)$, где $s = \sqrt{uv} = \sqrt{t^2 - z^2}$ (рассматривая для простоты «внутреннюю» область $t^2 > z^2$). Тогда твисторные аргументы принимают вид $\tau^1 = (u/s)(wU + s)$, $\tau^2 = (sU + \bar{w})$. Решение будет буст-инвариантным, лишь если генерирующая функция Π будет зависеть лишь от τ^2 и *отношения* $\beta = \tau^1/G$; таким образом, основное твисторное уравнение (6) принимает вид:

$$\Pi(\tau^2, \beta) =: \Pi(sU + \bar{w},\ w + s/U) = 0. \tag{14}$$

Сингулярности ЭМ поля, отвечающего некоторому решению $U(w, \bar{w}, s)$ уравнения (14), отвечают условию

$$U^2 \frac{\partial U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial U}{\partial \beta} = 0 \tag{15}$$

и также определяют геометрическое множество, инвариантное относительно гиперболического вращения (13).

Что физически означает буст-инвариантность? Пусть, например, при некотором $t = t_0$ в точке x_0, y_0, z_0 имели сингулярность некоторого решения полевых уравнений с такой симметрией, причём считаем $t_0^2 - z_0^2 =: b^2 > 0$, а также $t_0 < -|b|$. Тогда непременно существует «зеркальная» сингулярность в точке с противоположным $z = -z_0$, а в последующие моменты времени t эти сингулярности «воспроизводятся» в точках с *теми же* x, y и с координатами

$$z = \pm\sqrt{t^2 - b^2}. \tag{16}$$

Таким образом, если вначале сингулярности были точечными (изолированными), то затем они движутся навстречу друг другу и *аннигилируют* в момент времени $t = -|b|$. Это, однако, может сопровождаться появлением дополнительных *неточечных* сингулярностей, например сингулярных волновых фронтов (см. ниже). Продолжая рассмотрение в область $t > 0$, встречаемся при $t = |b|$ с эффектом *рождения пары* изолированных и затем расходящихся сингулярностей. Заметим, однако, что для протяжённых сингулярностей картина «аннигиляции/рождения» может оказаться более сложной [24].

Пусть теперь пара «зеркальных» сингулярностей некоторого буст-инвариантного решения находится во «внешней» области, т. е. $t_0^2 - z_0^2 =: -b^2 < 0$. Тогда их «уравнение движения» будет иметь вид

$$z = \pm\sqrt{t^2 + b^2} \tag{17}$$

и отвечает паре сингулярностей, совершающей встречное *гиперболическое* движение вплоть до минимального расстояния $2|b|$ при $t = 0$, с последующим «равноускоренным» разбеганием. Мы рассмотрим случай изолированных сингулярностей с такой динамикой ниже.

Разумеется, буст-инвариантные решения не обязаны быть аксиально-симметричными, однако представляется интересным рассмотреть именно такой случай двойной симметрии. Оказывается, что среди твисторно-генерируемых решений уравнений Максвелла таких дважды инвариантных решений немного. Действительно, соответствующая зависимость спинора G и отвечающих ему твисторных компонент τ^1, τ^2 от координат должна иметь очевидный вид:

$$G = (\bar{w}/\rho)(u/s)V(\rho, s) \quad \Rightarrow \quad \tau^1 = (u/s)(\rho V + s), \quad \tau^2 = (\bar{w}/\rho)(sV + \rho). \tag{18}$$

Для того, чтобы в уравнение для функции V не входили по отдельности множители $\bar{w}$ и u, генерирующая функция Π должна зависеть лишь от комбинации $\xi = \tau^1\tau^2/G$ трёх твисторных аргументов. Таким образом, генерирующее уравнение для случая дважды инвариантных решений будет иметь следующий вид:

$$\Pi(\xi) = 0, \quad \xi =: \frac{(\rho V + s)(sV + \rho)}{V}, \tag{19}$$

или, для одной из фиксированных непрерывных ветвей решения,

$$\rho s V^2 + (s^2 + \rho^2 + b^2)V + \rho s = 0, \tag{20}$$

где константа b (один из корней уравнения (19)) может, вообще говоря, быть не только вещественным или чисто мнимым, но и комплексным.

Уравнение (20) уже встречалось в наших работах [19, 20]; оно следует из твисторной генерирующей функции общего вида

$$\Pi = \tau^1\tau^2 + b^2 G, \tag{21}$$

однако только сейчас выясняется, что оно имеет фундаментальный характер, определяя общий вид буст-инвариантных и к тому же аксиально-симметричных решений. Воспроизведём ниже основные результаты исследования соответствующих решений уравнений Максвелла из работ [19, 20].

Сингулярности ЭМ поля, соответствующего спинору G, определяются кратными корнями квадратного уравнения (20), т. е. условию обращения в ноль дискриминанта

$$\Delta = (s^2 + \rho^2 + b^2)^2 - 4s^2\rho^2 \equiv (s^2 - \rho^2 + b^2)^2 + 4b^2\rho^2 = 0. \tag{22}$$

В случае действительного b это условие становится вырожденным,

$$\rho = 0, \quad z = \pm\sqrt{t^2 + b^2}, \tag{23}$$

так что реализуется упомянутый выше (17) случай двух точечных «зеркальных» сингулярностей, совершающих встречное гиперболическое движение. Соответствующее ЭМ поле — решение однородных уравнений Максвелла — вычисляется из (7) и имеет следующий вид [19]:

$$E_\rho = \mp\frac{8b^2\rho z}{\Delta^{3/2}}, \quad E_z = \pm\frac{4b^2}{\Delta^{3/2}}(t^2 - z^2 + \rho^2 + b^2), \quad H_\varphi = \mp\frac{8b^2\rho t}{\Delta^{3/2}}. \tag{24}$$

Нетрудно проверить, что электрические заряды сингулярностей равны по модулю 1/4 (в соответствии с вышеупомянутой общей теоремой «автоквантования» заряда для твисторно-генерируемых решений уравнений Максвелла [17,26]) и противоположны по знаку. Волновая зона (а следовательно, и излучение) в этом случае парадоксальным образом отсутствует [3] .

Рассмотрим теперь случай чисто мнимого $b = ia$, $a \in \mathbb{R}$. В этом случае уравнение сингулярного множества (22) принимает вид

$$z^2 = t^2 - (\rho \pm a)^2 \tag{25}$$

и описывает при $t = 0$ *электрически нейтральное* кольцо радиуса a, раздувающееся затем в *тор*, а при $t > |a|$ — тор с «самопересечением». Нетрудно проверить, что при фиксированном значении радиуса (в том числе на оси при $\rho = 0$) в некоторый момент времени действительно происходит рождение и последующее расхождение по гиперболическому закону типа (16) пары сингулярных колец, сочетание которых и формирует общую картину расширяющейся торообразной сингулярности.

Что касается общего случая комплексных значений константы b, он соответствует [19] двум электрически заряженным кольцам керровского типа, совершающим встречное гиперболическое движение по закону, аналогичному (17).

[3] Обсуждение этой старой и до сих пор нерешённой проблемы см. в [19] и в указанных там ссылках

4. Заключение

Выше мы рассмотрели некоторый подкласс решений однородных уравнений Максвелла, обладающих естественной комплексной структурой и генерирующихся произвольной функцией твисторного аргумента с помощью чисто алгебраической процедуры. Наличие твисторной структуры позволяет легко определять структуру сингулярного множества ЭМ полей, которая оказывается весьма сложной и, в общем случае, неточечной (пространственно протяжённой).

В настоящей работе был предложен новый подкласс решений уравнений Максвелла (или, более обще, — любых релятивистски инвариантных уравнений поля). А именно, были рассмотрены *буст-инвариантные* решения, т. е. решения, инвариантные относительно некоторого гиперболического вращения и аналогичные, тем самым, аксиально-симметричным решениям. Если последние фиксируют форму полевого распределения и его сингулярностей, то буст-инвариантные решения жёстко фиксируют временну́ю динамику поля и сингулярностей. В работе рассмотрен наиболее интересный случай решений, обладающих «двойной» симметрией, т. е. являющихся одновременно и аксиально-симметричными, и буст-инвариантными. Мы показали выше, что среди твисторно-генерируемых таких решений с «двойной симметрией» очень немного: они представляют собой торообразную или кольцеобразную модификации бисингулярного «равноускоренного» решения Борна. Существование таких особых инвариантных решений, жёстко фиксирующих временну́ю динамику «источников» ЭМ полей, может представлять интерес для общей теории рассеяния и реакций элементарных частиц.

Литература

1. Joint Chiral and Conformal Bosonization in QCD and Linear Sigma Model / A. A. Andrianov, V. A. Andrianov, V. Y. Novozhilov, Y. V. Novozhilov // Phys. Lett. — 1987. — Vol. B186. — Pp. 401–404.
2. *Stern J., Sazdjian H., Fuchs N. H.* What $\pi - \pi$ Scattering Tells Us about Chiral Perturbation Theory // Phys. Rev. — 1993. — Vol. D47. — Pp. 3814–3838.
3. *Горбатенко М. В., Пушкин А. В.* Динамика пространства линейной афинной связности и конформно-инвариантное расширение уравнений Эйнштейна // Вопр. атом. науки техн., Сер. Теорет. прикл. физ. — 1984. — Т. 2/2. — С. 40–46.
4. *Пушкин А. В.* Геометродинамика. — Саров: ВНИИЭФ, 2005.
5. *Gorbatenko M. V.* Conformal Geometrodynamics: Exact Nonstationary Spherically Symmetric Solutions. — E-print, www.arXiv.org/0711.1584.
6. *Mie G.* Grundlagen einer Theorie der Materie // Annalen der Phys. — 1912. — Vol. 37. — Pp. 511–534.
7. *Mie G.* Grundlagen einer Theorie der Materie // Annalen der Phys. — 1913. — Vol. 39. — Pp. 1–40.
8. *Mie G.* Grundlagen einer Theorie der Materie // Annalen der Phys. — 1913. — Vol. 40. — Pp. 1–66.
9. *Born M.* On the Quantum Theory of the Electromagnetic Field // Proc. Roy. Soc. — 1934. — Vol. A143. — Pp. 410–437.
10. *Born M., Infeld L.* Foundations of the New Field Theory // Proc. Roy. Soc. — 1934. — Vol. A144. — Pp. 425–451.
11. *Chernitskii A. A.* Bidyon as an Electromagnetic Model for Charged Particle with Spin // Hadron. J. — 2003. — Vol. 26. — Pp. 512–523.
12. *Ranãda A. F.* Topological Electromagnetism // J. Phys. A: Math. Gen. — 1992. — Vol. 25. — Pp. 1621–1641.
13. *Ranãda A. F., Trueba J. L.* Electromagnetic Knots // Phys. Lett. — 1995. — Vol. A202. — Pp. 337–341.
14. *Kiehn R. M.* Curvature and Torsion of Implicit Hypersurfaces and the Origin of Charge. — E-print, www.arXiv.org/gr-qc/0101109.

15. *Kiehn R. M.* Electromagnetic Waves in the Vacuum with Torsion and Spin. — E-print, www.arXiv.org/physics/9802033.
16. *Кассандров В. В.* Алгебраическая структура пространства–времени и алгебродинамика. — М.: Изд-во Университета дружбы народов, 1992.
17. *Кассандров В. В.* Алгебродинамика: кватернионы, твисторы, частицы // Вестник РУДН. Серия Физика. — 2000. — № 8(1). — С. 34–45.
18. *Кассандров В. В.* Кватернионный анализ и алгебродинамика // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. — 2006. — Т. 3, № 2(6). — С. 58–84.
19. *Кассандров В. В., Ризкалла Д. А.* Алгебродинамический подход в теории поля: бисингулярное решение и его модификации / под ред. А. В. Аминовой. — Казань: Изд-во КГУ, 1998. — С. 176–186.
20. *Kassandrov V. V., Riscallah J. A.* Twistor and "Weak" Gauge Structures in the Framework of Quaternionic Analysis. — E-print, www.arXiv.org/gr-qc/0012109.
21. *Бейтмен Г.* Математическая теория распространения электромагнитных волн. — М.: ГИФМЛ, 1958.
22. *Debney G., Kerr R. P., Schild A.* Solutions of the Einstein and Einstein–Maxwell Equations // Journ. Math. Phys. — 1969. — Vol. 10. — Pp. 1842–1856.
23. *Kassandrov V. V., Trishin V. N.* "Particle-Like" Singular Solutions in Einstein–Maxwell Theory and in Algebraic Dynamics // Grav. & Cosm. (Moscow). — 1999. — Vol. 5, No 4. — Pp. 272–276.
24. *Кассандров В. В.* Алгебродинамика: «Предсвет», частицы-каустики и поток времени // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. — 2004. — Т. 1, № 1. — С. 89–105.
25. *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство–время. Т. II. — М.: Мир, 1988.
26. *Kassandrov V. V.* Singular Sources of Maxwell Fields with Self-Quantized Electric Charge / Ed. by A. Chubykalo, A. Espinoza, V. Onoochin, R. Smirnov-Rueda. — Rinton Press, 2004. — Pp. 42–67.
27. Точные решения уравнений Эйнштейна, Глава 9 / Д. Крамер, Х. Штефани, Э. Херльт, М. Мак-Каллум. — М.: Энергоиздат, 1982.
28. *Рыбаков Ю. П.* Структура частиц в нелинейной теории поля, Глава 6. — М.: Изд-во Университета дружбы народов, 1985.

UDC 539.9

On Boost-Invariant Solutions of Relativistic Field Equations

V. V. Kassandrov, A. V. Tretyakova

Institute of Gravitation and Cosmology
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

Twistorial algebraic methods to obtain solutions of the vacuum Maxwell equations, with complicated structure of singular loci, are described. The notion of boost-invariant solutions, with the field functions preserving their values under a hyperbolic rotation, is introduced. It is proved that, among the twistor-generated solutions, only the bisingular Born solution and the two its known modifications (with a double-ring and an expanding toroidal singularities) are axisymmetric and boost invariant at the same time.

Key words and phrases: twistor methods, invariant solutions, algebrodynamics, bisingular solution.