Физика

УДК 531.51, 539.184

Влияние девиттовского самодействия на дипольное излучение водородоподобных гравиатомов

Ю. П. Лаптев, М. Л. Фильченков

Институт гравитации и космологии
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

Рассмотрены гравитационно-связанные системы, так называемые «гравиатомы», состоящие из минидыры и захваченной ею заряженной частицы. Вычислена частота, сила осциллятора и интенсивность дипольного перехода $2p \to 1s$ с учётом девиттовского самодействия, которое уменьшает частоту и интенсивность излучения по сравнению с соответствующими величинами для водородоподобного гравиатома.

Ключевые слова: гравиатомы, самодействие, дипольное излучение.

В предыдущих работах [1, 2] рассматривались гравиатомы, т. е. квантовые системы, состоящие из минидыры (первичной чёрной дыры) и удерживаемой ею за счёт гравитационного взаимодействия заряженной частицы. Особенностью гравиатомов является наличие девиттовской силы самодействия, действующей на заряд в гравитационном поле [3]. В работах [1, 2] было показано, что могут существовать только гравиатомы, содержащие лептоны и мезоны с зарядом $q = \pm e$ (электрон, мюон, тау-лептон, вино, пион, каон и их античастицы), для которых выполняется условие

$$\alpha_g = \frac{GMm}{\hbar c} = 0{,}608 \div 0{,}707\,,$$

где α_g — гравитационный эквивалент постоянной тонкой структуры, M — масса минидыры, m — масса частицы. Сила деВитта мала по сравнению с ньютоновской, поэтому в первом приближении гравиатомы можно считать водородоподобными. Было рассчитано электромагнитное и гравитационное излучение гравиатомов.

В настоящей работе в рамках стационарной теории возмущений вычислены поправки к энергетическим уровням и волновым функциям водородоподобного гравиатома, обусловленные девиттовским самодействием. Рассмотрен дипольный переход $2p \to 1s$, для которого найдена частота, сила осциллятора и интенсивность излучения.

Уравнение Шрёдингера для гравиатома [2]

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\left(\frac{dR_{pl}}{dr}\right)\right] - \frac{l(l+1)}{r^2}R_{pl} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{mc^2 r_g}{2r} - \frac{mc^2 r_q r_g}{4r^2}\right)R_{pl} = 0 \qquad (1)$$

описывает радиальное движение частицы с зарядом q и массой m в эффективном потенциале минидыры, имеющем вид

$$U_{\text{eff}} = -\frac{mc^2 r_{r_g}}{2r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + \frac{mc^2 r_q r_g}{4r^2}, \qquad (2)$$

где $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ — гравитационный радиус минидыры, $r_q = \frac{q^2}{mc^2}$ — классический радиус заряженной частицы (ниже полагаем $q = \pm e$, но $r_q \neq r_e$, так как $m \neq m_e$), l — орбитальное квантовое число.

Статья поступила в редакцию 3 марта 2009 г.

Первые два члена формулы (2) описывают водородоподобный гравиатом, энергетический спектр, волновые функции которого известны [1, 2, 4]. Возмущение водородоподобного гравиатома, обусловленное девиттовским самодействием, имеет вид

$$V = \frac{mc^2 r_q r_g}{4r^2}. \tag{3}$$

Согласно стационарной теории возмущений имеем [5]

$$E_{nl} = E_{nl}^{(0)} + E_{nl}^{(1)}, \tag{4}$$

$$\psi_{nl} = \psi_{nl}^{(0)} + \psi_{nl}^{(1)}, \tag{5}$$

где $E_{nl}^{(0)}$, $\psi_{nl}^{(0)}$ — невозмущённые уровни и волновые функции соответственно. Энергетические уровни водородоподобного гравиатома (вырожденные по l) даются формулой [1, 2]

$$E_{n}^{(0)} = -\frac{1}{2}\frac{mc^2}{n^2}\alpha_g^2. \tag{6}$$

Возмущения энергетического спектра имеют вид

$$E_{nl}^{(0)} = V_{nl,nl}, \tag{7}$$

где

$$V_{nl,nl} = \int\limits_0^\infty \left[R_{nl}^{(0)}\right]^2 V r^2 \,\mathrm{d}r. \tag{8}$$

Вычисление интеграла (8) для водородоподобных волновых функций [4] и возмущающего потенциала (3) даёт

$$E_{nl}^{(1)} = \frac{mc^2\alpha_{eg}}{n^3\left(l+\frac{1}{2}\right)}\alpha_g^2, \tag{9}$$

где $\alpha_{eg} = \frac{e^2}{\hbar c}\alpha_g$ — произведение постоянной тонкой структуры на её гравитационный эквивалент.

Возмущение волновых функций для случая вырожденных уровней запишется как [5]

$$R_{nl}^{(1)} = \sum_{\substack{ml\\ m\neq n}} \frac{V_{ml,ni}}{E_{ni}^{(0)} - E_{ml}^{(0)}} R_{nl}^{(0)}, \tag{10}$$

где

$$V_{ml,ni} = \int\limits_0^\infty R_{ml}^{(0)} V R_{ni}^{(0)} r^2 \,\mathrm{d}r. \tag{11}$$

Дипольному переходу $2p \to 1s$ соответствует матричный элемент, пропорциональный $\int\limits_0^\infty R_{10}R_{21}r^3\,\mathrm{d}r$. Поправки к невозмущённым волновым функциям выражаются через волновые функции $1s, 2s$ и $2p$ состояний [4]

$$R_{10}^{(0)} = 2e^{-r}, \tag{12}$$

$$R_{20}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{r}{2}}\left(1-\frac{r}{2}\right), \tag{13}$$

$$R_{21}^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{6}}e^{-\frac{r}{2}}, \tag{14}$$

где r записано в единицах

$$a_B^g = \frac{\hbar^2}{GMm^2}, \tag{15}$$

т. е. величины, являющейся аналогом боровского радиуса для водородоподобного гравиатома [1, 2]. Из формулы (10) получаем

$$R_{10}^{(1)} = \frac{V_{10,20}R_{20}^{(0)} + V_{10,21}R_{21}^{(0)}}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}}, \tag{16}$$

$$R_{21}^{(1)} = \frac{V_{10,21}R_{10}^{(0)}}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}}, \tag{17}$$

где

$$V_{10,20} = \int\limits_0^\infty R_{10}^{(0)}R_{20}^{(0)}Vr^2\,\mathrm{d}r, \tag{18}$$

$$V_{10,21} = \int\limits_0^\infty R_{10}^{(0)}R_{21}^{(0)}Vr^2\,\mathrm{d}r. \tag{19}$$

Волновые функции возмущённого водородоподобного гравиатома имеют вид

$$R_{10} = R_{10}^{(0)} + \frac{V_{10,20}}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}}R_{20}^{(0)} + \frac{V_{10,21}}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}}R_{21}^{(0)}, \tag{20}$$

$$R_{21} = R_{21}^{(0)} + \frac{V_{10,21}}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}}R_{10}^{(0)}, \tag{21}$$

где

$$\frac{V_{10,20}}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} = -\frac{16\sqrt{2}}{27}\alpha_{eg}, \tag{22}$$

$$\frac{V_{10,21}}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} = -\frac{64}{27\sqrt{6}}\alpha_{eg}. \tag{23}$$

Так как $\langle\alpha_{eg}\rangle = \frac{e^2}{\hbar c}\langle\alpha_g\rangle \simeq 5\cdot 10^{-3}$, то условия применимости теории возмущений

$$|V_{mn}| \ll |E_m^{(0)} - E_n^{(0)}| \tag{24}$$

выполняются для гравиатомов.

Интенсивность дипольного излучения возмущённого водородоподобного гравиатома даётся формулой

$$I_{nl,n'l'} = \frac{2\hbar e^2\omega_{nl,n'l'}^3}{mc^3}f_{nl,n'l'}. \tag{25}$$

Частота перехода $n'l' \to nl$ имеет вид

$$\omega_{nl,n'l'} = \frac{E_{nl} - E_{n'l'}}{\hbar}. \tag{26}$$

Сила осциллятора, просуммированная по магнитным квантовым числам

$$f_{nl,n'l'} = f_{nl,n'l'}^{(0)}\frac{E_{nl} - E_{n'l'}}{E_{nl}^{(0)} - E_{n'l'}^{(0)}}\left[\frac{\int\limits_0^\infty R_{nl}R_{n'l'}r^3\,\mathrm{d}r}{\int\limits_0^\infty R_{nl}^{(0)}R_{n'l'}^{(0)}r^3\,\mathrm{d}r}\right]^2, \tag{27}$$

где $f^{(0)}_{nl,n'l'}$ — сила осциллятора для водородоподобного гравиатома.

Для дипольных переходов ($\Delta l = 1$) серии Лаймана имеем [4]

$$f_{10,n1} = \frac{2^8 n^5 (n-1)^{2n-4}}{3(n+1)^{2n+4}}. \tag{28}$$

Для силы осциллятора перехода $2p \to 1s$ получаем

$$f^{(0)}_{10,21} = \frac{2^{13}}{3^9}. \tag{29}$$

Отношение радиальных интегралов возмущённого и невозмущённого гравиатомов принимает вид

$$\frac{\int\limits_0^\infty R_{10} R_{21} r^3 \,\mathrm{d}r}{\int\limits_0^\infty R^{(0)}_{10} R^{(0)}_{21} r^3 \,\mathrm{d}r} = 1 - 6\alpha_{eg} - \frac{1280}{2187}\alpha_{eg}^2. \tag{30}$$

При вычислении (30) мы использовали значения следующих интегралов от водородоподобных волновых функций

$$\int\limits_0^\infty R^{(0)}_{10} R^{(0)}_{21} r^3 \,\mathrm{d}r = \frac{2^{15/2}}{3^{9/2}}, \quad \int\limits_0^\infty \left[R^{(0)}_{10}\right]^2 r^3 \,\mathrm{d}r = \frac{3}{2}, \quad \int\limits_0^\infty R^{(0)}_{20} R^{(0)}_{21} r^3 \,\mathrm{d}r = 3\sqrt{3},$$
$$\int\limits_0^\infty R^{(0)}_{20} R^{(0)}_{10} r^3 \,\mathrm{d}r = -\frac{2^5}{3^4}\sqrt{2}, \quad \int\limits_0^\infty \left[R^{(0)}_{21}\right]^2 r^3 \,\mathrm{d}r = 5.$$

Частота возмущённого гравиатома

$$\omega_{12} = \omega^{(0)}_{12}\left(1 - \frac{23}{9}\alpha_{eg}\right). \tag{31}$$

Подставляя (26), (27), (30) и (31) в (25), получаем окончательное выражение для интенсивности излучения при переходе $2p \to 1s$

$$I_{10,21} \approx I^{(0)}_{10,21}\left(1 - \frac{23}{9}\alpha_{eg}\right)^4 \left(1 - \frac{15}{4}\alpha_{eg}\right)^2, \tag{32}$$

где интенсивность невозмущённого гравиатома

$$I^{(0)}_{10,21} = \frac{2\hbar e^2 [\omega^{(0)}_{12}]^3}{mc^3} f^{(0)}_{10,21}. \tag{33}$$

Подставляя $\langle \alpha_{eg} \rangle \simeq 5 \cdot 10^{-3}$ в формулы (31) и (32), получаем, что учёт девиттовского самодействия уменьшает частоту на 1 %, а интенсивность излучения — на 10 % для перехода $2p \to 1s$. Это связано с тем, что наличие девиттовской силы отталкивания от центра, действующей на заряженные частицы в ньютоновском гравитационном поле [3], приводит к тому, что они движутся дальше от минидыры, чем незаряженные.

Представляет интерес также учёт вращения минидыры и спина заряженной частицы, входящих в состав гравиатома. Однако эти вопросы являются предметом дальнейшего исследования.

Литература

1. *Fil'chenkov M. L., Laptev Y. P.* Graviatom Dipole Radiation // Grav. Cosmol. — 2006. — Vol. 12, No 1. — P. 65.
2. *Laptev Y. P., Fil'chenkov M. L.* Electromagnetic and Gravitational Radiation of Graviatoms // Astron. Astroph. Trans. — 2006. — Vol. 25, No 1. — P. 33.
3. *DeWitt C. M., DeWitt B. S.* Falling Charges // Physics. — 1964. — Vol. 1, No 1. — P. 3.
4. *Бете Г., Солпитер Э.* Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. — М.: ГИФМЛ, 1960. — Пер. с англ.
5. *Савельев И. В.* Основы теоретической физики. Т. 2. Квантовая механика / под ред. В. А. Шахнова. — М.: Наука ФМ, 1996.

UDC 531.51, 539.184

DeWitt's Self-Action Effect on the Dipole Radiation of Hydrogen-like Graviatoms

Yu. P. Laptev, M. L. Fil'chenkov

Institute of Gravitation and Cosmology
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

Gravitationally bound systems, so-called graviatoms, consisting of a minihole and a charged particle are considered. A frequency, oscillator strength and intensity of radiation are calculated for the dipole transition $2p \to 1s$ taking into account DeWitt's self-action, which diminishes the frequency and intensity of the transition as compared with the corresponding quantities for a hydrogen-like graviatom.

Key words and phrases: graviatoms, self-action, dipole radiation.