УДК 517.51

Оптимальное восстановление разностей последовательностей по неточной информации

С. С. Чудова

Advanced Chemistry Development (Московское отделение разработки)
Россия, 117513, Москва, ул.Академика Бакулева, 6.

В работе ставится и решается задача оптимального восстановления k-й разности числовой последовательности на классе последовательностей, у которых n-я разность ($k < n$) ограничена, при условии, что исходная последовательность известна приближённо. Получены явные выражения для оптимального метода восстановления и оптимальной погрешности.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, оптимальный метод, погрешность восстановления, разности последовательностей.

1. Введение

В работе рассматривается задача оптимального восстановления k-й разности числовой последовательности при условии, что сама последовательность известна приближённо и принадлежит классу последовательностей, у которых n-я разность ($n > k$) ограничена некоторой константой. Это дискретный аналог задачи об оптимальном восстановлении k-й производной на соболевском классе функций, рассмотренной в [1] и [2]. Интерес к такой постановке вызван тем, что в практических задачах часто имеют дело с функциями, значения которых известны лишь в некотором наборе точек и при этом приближённо.

2. Постановка задачи

Перейдём к точным постановкам. Обозначим через $l_2 = l_2(\mathbb{Z})$ множество всех последовательностей $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, для которых $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2 < \infty$. Это нормированное пространство с нормой $\|x\|_2 = (\sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2)^{1/2}$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{Z}) = \{x \in l_2 \,|\Delta^n x \in l_2\}$, где

$$\Delta^n x = \left\{\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\binom{n}{s}x_{j+s}\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$$

— n-я разность последовательности $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Положим

$$W_2^n(\mathbb{Z}) = \{x \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{Z}) \mid \|\Delta^n x\|_2 \leqslant 1\}.$$

Ставится задача о восстановлении (по возможности наилучшим образом) k-й разности ($1 \leqslant k \leqslant n-1$) последовательности $x \in W_2^n(\mathbb{Z})$ при условии, что эта последовательность известна приближённо, а именно, известна последовательность $y \in l_2$ такая, что $\|x - y\|_2 \leqslant \delta$, где $\delta > 0$.

Под этим мы понимаем следующее. Любое отображение $m\colon l_2 \to l_2$ объявляем методом восстановления и погрешностью этого метода называем величину

$$e\left(\Delta^k, W_2^n(\mathbb{Z}), \delta, m\right) = \sup_{\substack{x\in W_2^n(\mathbb{Z}),\ y\in l_2\\ \|x-y\|_2\leqslant\delta}} \|\Delta^k x - m(y)\|_2.$$

Статья поступила в редакцию 25 марта 2009 г.
Автор благодарен Г.Г. Магарил-Ильяеву за постановку задачи и внимание к работе.

Нас интересует величина

$$E(\Delta^k, W_2^n(\mathbb{Z}), \delta) = \inf_{m\colon l_2\to l_2} e(\Delta^k, W_2^n(\mathbb{Z}), \delta, m),$$

которая называется *погрешностью оптимального восстановления*, и метод $\widehat{m}$, называемый *оптимальным методом восстановления*, на котором достигается нижняя грань.

3. Формулировка результата и схема доказательства

Напомним, что преобразование Фурье F на l_2 ставит каждой последовательности $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in l_2$ в соответствие 2π-периодическую функцию по формуле: $Fx(\omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j e^{-ij\omega}$.

Теорема. *Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $k \leqslant n-1$ и $\delta > 0$. Тогда*

$$E\left(\Delta^k, W_2^n(\mathbb{Z}), \delta\right) = \begin{cases} 2^k\delta, & \text{если } \ \delta \leqslant 2^{-n}, \\ \delta^{1-k/n}, & \text{если } \ \delta > 2^{-n}. \end{cases}$$

Оптимальный метод имеет вид

$$\widehat{m}(y) = \begin{cases} \Delta^k y, & \text{если } \ \delta \leqslant 2^{-n}, \\ \Delta^k (z * y), & \text{если } \ \delta > 2^{-n}, \end{cases}$$

где $z * y$ — свёртка последовательности y с последовательностью z такой, что

$$Fz(\omega) = \frac{1-\frac{k}{n}}{1-\frac{k}{n}\left(1-\delta^2|e^{i\omega}-1|^{2n}\right)}.$$

Из теоремы видно, что если погрешность достаточно мала ($\delta \leqslant 2^{-n}$), то оптимальный способ восстановления k-й разности последовательности x по наблюдению y заключается в том, чтобы использовать само наблюдение. Если же $\delta > 2^{-n}$, то наблюдаемую последовательность надо предварительно «сгладить», т.е. свернуть с некоторой последовательностью.

Доказательство (схема). Сначала оценим снизу $E(\Delta^k, W_2^n(\mathbb{Z}), \delta)$. Несложная проверка показывает, что эта величина не меньше значения следующей экстремальной задачи

$$\|\Delta^k x\|_2 \to \max, \quad \|x\|_2 \leqslant \delta, \quad \|\Delta^n x\|_2 \leqslant 1, \quad x \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{Z}). \tag{1}$$

Легко видеть, что $F(\Delta^m x)(\omega) = |e^{i\omega}-1|^m Fx(\omega)$, если $\Delta^m x \in l_2$. Тогда по теореме Планшереля

$$\|\Delta^m x\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |e^{i\omega}-1|^{2m} |Fx(\omega)|^2\, d\omega.$$

Учитывая это обстоятельство, Перейдём к образам Фурье в задаче (1) и получим, что её значение равно квадрату значения следующей задачи

$$\begin{gathered} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |e^{i\omega}-1|^{2k} |Fx(\omega)|^2\, d\omega \to \max, \\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |Fx(\omega)|^2\, d\omega \leqslant \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |e^{i\omega}-1|^{2n} |Fx(\omega)|^2\, d\omega \leqslant 1. \end{gathered} \tag{2}$$

Рассмотрим расширение этой задачи на пространство всех положительных мер на окружности (заменяя формально $(2\pi)^{-1}|Fx(\omega)|^2\,d\omega$ на $d\mu(\omega)$):

$$
\begin{gathered}
\int_{-\pi}^{\pi} |e^{i\omega}-1|^{2k}\,d\mu(\omega) \to \max, \quad \int_{-\pi}^{\pi} d\mu(\omega) \leqslant \delta^2, \\
\int_{-\pi}^{\pi} |e^{i\omega}-1|^{2n}\,d\mu(\omega) \leqslant 1, \quad d\mu(\omega) \geqslant 0.
\end{gathered} \tag{3}
$$

Это выпуклая задача. Сопоставим ей функцию Лагранжа

$$
\mathcal{L}(d\mu\cdot,\lambda_1,\lambda_2) = -\int_{-\pi}^{\pi} |e^{i\omega}-1|^{2k}\,d\mu(\omega) + \lambda_1\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\mu(\omega)-\delta^2\right) + \\
+ \lambda_2\left(\int_{-\pi}^{\pi} |e^{i\omega}-1|^{2n}\,d\mu(\omega)-1\right).
$$

Хорошо известно (см., например, [3]) и легко проверяется, что если найдутся допустимая в задаче (3) мера $d\widehat{\mu}\cdot$ и $\widehat{\lambda}_1 \geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_2 \geqslant 0$ такие, что (a): $\min_{d\mu\cdot\geqslant 0}\mathcal{L}(d\mu\cdot,\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(d\widehat{\mu}\cdot,\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)$ и (b): $\widehat{\lambda}_1\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\widehat{\mu}(\omega)-\delta^2\right) = \widehat{\lambda}_2\left(\int_{-\pi}^{\pi}|e^{i\omega}-1|^{2n}\,d\widehat{\mu}(\omega)-1\right) = 0$, то $d\widehat{\mu}\cdot$ — решение задачи 3.

Пусть сначала $\delta > 2^{-n}$. Положим $d\widehat{\mu}(\omega) = \delta^2\delta(\omega-\omega_0)$, где $\omega_0 = 2\arcsin(\delta^{-1/n}/2)$ и $\delta(\omega-\omega_0)$ — δ-функция в ω_0, $\widehat{\lambda}_1 = (1-k/n)\delta^{-2k/n}$, $\widehat{\lambda}_2 = (k/n)\delta^{2(n-k)/n}$. Несложная проверка показывает, что условия (a) и (b) выполнены и тем самым $d\widehat{\mu}\cdot$ — решение задачи (3) и её значение: $\int_{-\pi}^{\pi}|e^{i\omega}-1|^{2k}\,d\widehat{\mu}(\omega) = \delta^{2(n-k)/n}$. Аппроксимируя $d\widehat{\mu}\cdot$ соответствующей δ-образной последовательностью, получаем, что то же значение имеет и задача (2). Тогда значение задачи (1) равно $\delta^{1-k/n}$ и значит $E(\Delta^k, W_2^n(\mathbb{Z}),\delta) \geqslant \delta^{1-k/n}$.

Пусть теперь $\delta \leqslant 2^{-n}$. Положим $d\widehat{\mu}(\omega) = \delta^2\delta(\omega-\pi)$, $\widehat{\lambda}_1 = 2^{2k}$, $\widehat{\lambda}_2 = 0$. Снова простая проверка показывает, что условия (a) и (b) выполнены, т. е. $d\widehat{\mu}\cdot$ — решение задачи (3), её значение равно $2^{2k}\delta^2$ и по тем же соображениям, что и в предыдущем случае, получаем, что $E(\Delta^k, W_2^n(\mathbb{Z}),\delta) \geqslant 2^k\delta$. Итак, оценка снизу для погрешности оптимального восстановления доказана.

Перейдём к построению оптимального метода. Согласно общим конструкциям (см. подробнее [1,2]), если для каждого $y \in l_2$ существует решение x_y экстремальной задачи

$$
\widehat{\lambda}_1\|x-y\|_2^2 + \widehat{\lambda}_2\|\Delta^n x\|_2^2 \to \min, \quad x \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{Z}), \tag{4}
$$

где $\widehat{\lambda}_1 = (1-k/n)\delta^{-2k/n}$, $\widehat{\lambda}_2 = (k/n)\delta^{2(n-k)/n}$, если $\delta > 2^{-n}$ и $\widehat{\lambda}_1 = 2^{2k}$, $\widehat{\lambda}_2 = 0$, если $\delta \leqslant 2^{-n}$, то метод $\widehat{x}(y) = \Delta^k x_y$ обладает тем свойством, что его погрешность $e(\Delta^k, W_2^n(\mathbb{Z}),\delta,\widehat{m})$ равна значению задачи (1), которое, по доказанному, не превосходит $E(\Delta^k, W_2^n(\mathbb{Z}),\delta)$. Но, очевидно, $E(\Delta^k, W_2^n(\mathbb{Z}),\delta) \leqslant e(\Delta^k, W_2^n(\mathbb{Z}),\delta,\widehat{m})$ и значит $\widehat{m}$ — оптимальный метод.

Переходя к образам Фурье (используя теорему Планшереля), нетрудно найти для каждого $y \in l_2$ преобразование Фурье x_y:

$$
Fx_y(\omega) = \frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2|e^{i\omega}-1|^{2n}} Fy(\omega).
$$

Подставляя сюда выражения для $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$, соответствующие случаю $\delta > 2^{-n}$, получаем, что последовательность x_y есть свёртка последовательности z (преобразование Фурье которой указано в теореме) с последовательностью y, а оптимальный метод, как отмечено, есть k-я разность этой свёртки.

Если $\delta \leqslant 2^{-n}$, то, очевидно, $x_y = y$ и поэтому $\widehat{m}(y) = \Delta^k y$. Теорема доказана. $\square$

4. Заключение

Полученный оптимальный метод восстановления является универсальным методом для целого класса последовательностей и зависит от точности исходных данных. Данный метод гарантирует нам, что ошибка восстановления разности заданного порядка любой последовательности из нашего класса не превысит вычисленного значения погрешности.

Литература

1. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. — 2002. — № 193:3. — С. 79–100.
2. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прилож. — 2003. — № 37. — С. 51–64.
3. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. Изд. 2-е, испр. — М.: Эдиториал УРСС, 2003. — 176 с.

UDC 517.51

Optimal Recovery of Differences of Sequences from Inaccurate Information

S. S. Chudova

Advanced Chemistry Development, Moscow Department
6 Akademik Bakulev Street, Moscow 117513, Russia

In the paper the problem of optimal recovery of k-th difference of numerical sequence in the class of sequences for which n-th difference ($k < n$) is bounded from the inaccurate values of original sequence is formulated and solved. Explicit expressions are obtained for optimal recovery method and optimal error.

Key words and phrases: optimal recovery, optimal method, inaccurary of recovery, sequences differences.