Вестник РУДН Серия *Математика. Информатика. Физика.* № 3. 2009. С. 5–11

Математика

УДК 517.51

Неравенство разных метрик в анизотропных пространствах Лоренца

К. А. Бекмаганбетов, Е. Д. Нурсултанов

Кафедра математического анализа
Казахский филиал МГУ им. М.В.Ломоносова
ул. Мунайтпасова, 7, 010010 Астана, Республика Казахстан

В статье доказано неравенство разных метрик для тригонометрических полиномов со спектром из гиперболического креста в анизотропных пространствах Лоренца.

Ключевые слова: пространства Лоренца, неравенство разных метрик.

1. Введение

Пусть $\mathbf{N} = (N_1, \ldots, N_n)$, где $N_j \in \mathbb{N}$ для всех $j = 1, \ldots, n$ и

$$T_{\mathbf{N}}(x) = \sum_{|\mathbf{k}| \leqslant \mathbf{N}} c_{\mathbf{k}} e^{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$$

— тригонометрический полином порядка $\mathbf{N}$, $(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \sum\limits_{j=1}^{n} k_j x_j$.

При $\mathbf{1} \leqslant \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \leqslant \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \leqslant \infty$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_j \in \mathbb{R}$ для всех $j = 1, \ldots, n$, справедливы неравенства

$$\left\| T_{\mathbf{N}}^{(\alpha)} \right\|_{L_{\mathbf{q}}} \leqslant \prod_{j=1}^{n} N_j^{\alpha_j} \left\| T_{\mathbf{N}} \right\|_{L_{\mathbf{q}}}, \tag{1}$$

$$\left\| T_{\mathbf{N}} \right\|_{L_{\mathbf{q}}} \leqslant C \prod_{j=1}^{n} N_j^{(1/p_j - 1/q_j)} \left\| T_{\mathbf{N}} \right\|_{L_{\mathbf{p}}}, \tag{2}$$

здесь $T_{\mathbf{N}}^{(\alpha)}(x) = \sum\limits_{|\mathbf{k}| \leqslant \mathbf{N}} \bar{\mathbf{k}}^{\alpha} c_{\mathbf{k}} e^{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$, $\bar{\mathbf{k}}^{\alpha} = \prod\limits_{j=1}^{n} \bar{k}_j^{\alpha_j}$, $\bar{k} = \max\{1, |k|\}$.

Неравенства (1) и (2) называются соответственно неравенствами Бернштейна и Никольского для тригонометрических полиномов со спектром из прямоугольников [1]. Эти неравенства являются фундаментальным аппаратом исследования в теории приближения и теории вложения, для классов пространств Никольского и Бесова (H и B — классы).

В случае пространств с доминирующей смешанной производной (SH и SB — классы) аналогичную роль играют неравенства для тригонометрических полиномов со спектром из гиперболических крестов.

Пусть $N \in \mathbb{N}$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, где $\gamma_j > 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Множество

$$\Gamma(N, \gamma) = \left\{ \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) : k_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \ldots, n, \prod_{j=1}^{n} \bar{k}_j^{\gamma_j} \leqslant N \right\}$$

называется гиперболическим крестом порядка N, соответствующим γ.

Статья поступила в редакцию 21 марта 2009 г.

Пусть $T_{\Gamma(N,\gamma)}(\mathbf{x}) = \sum\limits_{\mathbf{k}\in\Gamma(N,\gamma)} c_{\mathbf{k}} e^{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$ — тригонометрический полином со спектром из гиперболического креста и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$ для всех $j = 1, \dots, n$, обозначим

$$T^{(\alpha)}_{\Gamma(N,\gamma)}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\Gamma(N,\gamma)} \bar{\mathbf{k}}^{\alpha} c_{\mathbf{k}} e^{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{x})}.$$

В работе В.Н. Темлякова [2] для полиномов со спектром из гиперболического креста приведено неравенство Бернштейна–Никольского в пространствах Лебега.

Пусть $1 \leqslant p \leqslant r < \infty$, $\alpha = \alpha_1 = \ldots = \alpha_\nu < \alpha_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$, $\alpha + 1/p > 0$, $1 = \gamma_1 = \ldots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant \gamma_n$ таковы, что $\alpha_j = \alpha\gamma_j$ для $j = \nu+1, \dots, n$. Тогда справедливы неравенства

$$\left\| T^{(\alpha)}_{\Gamma(N,\gamma)} \right\|_{L_\infty} \leqslant C N^{(\alpha+1/p)} \left(\ln(N+1)\right)^{(1-1/p)(\nu-1)} \left\| T_{\Gamma(N,\gamma)} \right\|_{L_p}, \tag{3}$$

$$\left\| T^{(\alpha)}_{\Gamma(N,\gamma)} \right\|_{L_r} \leqslant C N^{(\alpha+1/p-1/r)} \left\| T_{\Gamma(N,\gamma)} \right\|_{L_p}, \quad (\alpha \geqslant 0). \tag{4}$$

В данной работе мы изучаем неравенство Бернштейна–Никольского для тригонометрических полиномов со спектром из гиперболического креста в анизотропных пространствах Лоренца $L_{\mathbf{pq}^\star}$ [3,4]. Это позволило нам в достаточной степени раскрыть природу оценки, а именно выяснить её зависимость от сильных и слабых параметров пространств относительно каждой переменной.

2. Основные результаты

Пусть $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ — измеримая функция, заданная на $[0,1]^n$. Через $f^*(\mathbf{t}) = f^{*_1,\dots,*_n}(t_1, \dots, t_n)$ обозначим функцию, полученную применением к первой невозрастающей перестановки, последовательно по переменным $x_1, \dots, x_n$, при фиксированных остальных переменных.

Пусть мультииндексы $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ удовлетворяют условиям, если $0 < p_j < \infty$, то $0 < q_j \leqslant \infty$, если же $p_j = \infty$, то и $q_j = \infty$ для $j = 1, \dots, n$, и $\star = \{j_1, \dots, j_n\}$ — произвольная перестановка множества $\{1, \dots, n\}$. Анизотропным пространством Лоренца $L_{\mathbf{pq}^\star}$ называется множество функций, для которых

$$\|f\|_{L_{\mathbf{pq}^\star}} =$$

$$= \left(\int_0^1 \cdots \left(\int_0^1 \left| t_1^{1/p_1} \dots t_n^{1/p_n} f^{*_1,\dots,*_n}(t_1, \dots, t_n) \right|^{q_{j_1}} \frac{dt_{j_1}}{t_{j_1}} \right)^{q_{j_2}/q_{j_1}} \cdots \frac{dt_{j_n}}{t_{j_n}} \right)^{1/q_{j_n}} < \infty.$$

Здесь выражение $\left(\int_0^1 (G(s))^q \frac{ds}{s}\right)^{1/q}$ при $q = \infty$ понимается как $\sup_{s>0} G(s)$.

Нами доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leqslant \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leqslant \infty$, $\star = \{j_1, \dots, j_n\}$ *— некоторая перестановка множества* $\{1, \dots, n\}$,

$$\zeta = \max\{(\alpha_{j_i} + 1/p_{j_i})/\gamma_{j_i} : i = 1, \dots, n\},$$

$$B = \{i : (\alpha_{j_i} + 1/p_{j_i})/\gamma_{j_i} = \zeta, \quad i = 1, \dots, n\}, i_0 = \min\{i : i \in B\}.$$

Тогда справедливы неравенства:
при $\zeta > 0$

$$\left\| T^{(\alpha)}_{\Gamma(N,\gamma)} \right\|_{L_\infty} \leqslant C N^{\zeta} \left(\ln(N+1)\right)^{\sum\limits_{i\in B} 1/q'_{j_i} - 1/q'_{j_{i_0}}} \left\| T_{\Gamma(N,\gamma)} \right\|_{L_{\mathbf{pq}^\star}}, \tag{5}$$

при $\zeta = 0$

$$\left\|T^{(\alpha)}_{\Gamma(N,\gamma)}\right\|_{L_\infty} \leqslant C\left(\ln(N+1)\right)^{\sum\limits_{i\in B} 1/q'_{j_i}} \|T_{\Gamma(N,\gamma)}\|_{L_{\mathbf{pq}^\star}}, \tag{6}$$

при $\zeta < 0$

$$\left\|T^{(\alpha)}_{\Gamma(N,\gamma)}\right\|_{L_\infty} \leqslant C\|T_{\Gamma(N,\gamma)}\|_{L_{\mathbf{pq}^\star}}. \tag{7}$$

Замечание 1. Теорема 1 обобщает и дополняет соответствующий результат работы [5].

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n) < \mathbf{r} = (r_1,\ldots,r_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leqslant \mathbf{q} = (q_1,\ldots,q_n), \mathbf{d} = (d_1,\ldots,d_n) \leqslant \infty$, $1/\theta_j = (1/d_j - 1/q_j)_+$, $j = 1,\ldots,n$, $\star = \{j_1,\ldots,j_n\}$ *— некоторая перестановка множества* $\{1,\ldots,n\}$,

$$\zeta = \max\{(\alpha_{j_i} + 1/p_{j_i} - 1/r_{j_i})/\gamma_{j_i} : i = 1,\ldots,n\},$$

$$B = \{i : (\alpha_{j_i} + 1/p_{j_i} - 1/r_{j_i})/\gamma_{j_i} = \zeta, i = 1,\ldots,n\}, \quad i_0 = \min\{i : i \in B\}.$$

Тогда справедливы неравенства:
при $\zeta > 0$

$$\left\|T^{(\alpha)}_{\Gamma(N,\gamma)}\right\|_{L_{\mathbf{rd}^\star}} \leqslant CN^\zeta \left(\ln(N+1)\right)^{\sum\limits_{i\in B} 1/\theta_{j_i} - 1/\theta_{j_{i_0}}} \|T_{\Gamma(N,\gamma)}\|_{L_{\mathbf{pq}^\star}}, \tag{8}$$

при $\zeta = 0$

$$\left\|T^{(\alpha)}_{\Gamma(N,\gamma)}\right\|_{L_{\mathbf{rd}^\star}} \leqslant C\left(\ln(N+1)\right)^{\sum\limits_{i\in B} 1/\theta_{j_i}} \|T_{\Gamma(N,\gamma)}\|_{L_{\mathbf{pq}^\star}}, \tag{9}$$

при $\zeta < 0$

$$\left\|T^{(\alpha)}_{\Gamma(N,\gamma)}\right\|_{L_{\mathbf{rd}^\star}} \leqslant C\|T_{\Gamma(N,\gamma)}\|_{L_{\mathbf{pq}^\star}}. \tag{10}$$

Неравенства (5)–(12) в отличие от неравенств (3), (4) позволяют увидеть какие параметры пространств за что отвечают. Так, в неравенстве (8), в отличие от неравенства (4), возникает логарифмическая компонента, связанная со слабыми параметрами пространств, а именно с теми из них, которые соответствуют $\max\{(\alpha_{j_i} + 1/p_{j_i} - 1/r_{j_i})/\gamma_i : i = 1,\ldots,n\}$. Из неравенств (5), (8) также видно, что оценки зависят от параметра $\star = \{j_1,\ldots,j_n\}$ тем, что из $\sum\limits_{i\in B} 1/q'_{j_i}$ или $\sum\limits_{i\in B} 1/\theta_{j_i}$ вычитается соответствующая компонента $1/q'_{j_{i_0}}$ или $1/\theta_{j_{i_0}}$, которая впервые встречается при интегрировании в норме пространства $L_{\mathbf{pq}^\star}$.

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть* $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$, $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$, $\mathbf{q} = (q_1,\ldots,q_n)$, *где* $\beta_j \in \mathbb{R}$, $\gamma_j > 0$, $q_j > 0$ *для всех* $j = 1,\ldots,n$, $\nu \geqslant 0$ *и* $M \in \mathbb{N}$,

$$A_{M,\gamma}(\beta,\nu,\mathbf{q}) =$$

$$= \left(\sum_{k_n=0}^{\left[\frac{M}{\gamma_n}\right]} \ldots \left(\sum_{k_1=0}^{\left[\frac{M-\gamma_2 k_2-\ldots\gamma_n k_n}{\gamma_1}\right]} \left(2^{\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j k_j}(M-\gamma_1 k_1-\ldots-\gamma_n k_n)^\nu\right)^{q_1}\right)^{q_2/q_1} \ldots\right)^{1/q_n}.$$

Пусть $\zeta = \max\{\beta_j/\gamma_j : j = 1, \ldots, n\}$, $B = \{i : \beta_i/\gamma_i = \zeta,\ i = 1, \ldots, n\}$ *и* $i_0 = \min\{i : i \in B\}$, *тогда*

$$A_{M,\gamma}(\beta, \nu, \mathbf{q}) \sim \begin{cases} 2^{\zeta M} M^{\sum\limits_{i\in B} 1/q_i - 1/q_{i_0}} & \text{при} \quad \zeta > 0 \\ M^{\nu + \sum\limits_{i \in B} 1/q_i} & \text{при} \quad \zeta = 0 \\ M^{\nu} & \text{при} \quad \zeta < 0 \end{cases}. \tag{11}$$

Доказательство следует из следующих асимптотических соотношений

$$\sum_{k=0}^{M} 2^{\beta k}(M-k)^{\nu} \sim \begin{cases} 2^{\beta M} & \text{при} \quad \beta > 0 \\ M^{\nu+1} & \text{при} \quad \beta = 0 \\ M^{\nu} & \text{при} \quad \beta < 0 \end{cases}.$$

Лемма 2 (см. [6]). *Пусть* $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) < \mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) < \infty$, $\mathbf{1} + \mathbf{1/r} = \mathbf{1/p} + \mathbf{1/s}$, $\mathbf{1} \leqslant \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n), \mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n) \leqslant \infty$, $\mathbf{1}/\theta = (\mathbf{1/d} - \mathbf{1/q})_+$, $\star = \{j_1, \ldots, j_n\}$ — *некоторая перестановка множества* $\{1, \ldots, n\}$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\|f * g\|_{L_{\mathbf{rd}^\star}} \leqslant C\|f\|_{L_{\mathbf{pq}^\star}}\|g\|_{L_{\mathbf{s}\theta^\star}}.$$

Пусть $-\infty < \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{0} < \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n), \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \leqslant \infty$. Для функций $f \in L_{\mathbf{p}}([0,1)^n)$ обозначим через

$$\Delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} a_{\mathbf{k}}(f) e^{2\pi i \langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle},$$

где $\{a_{\mathbf{k}}(f)\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n}$ — коэффициенты Фурье функции f по кратной тригонометрической системе, $\rho(\mathbf{s}) = \{\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n : [2^{s_i - 1}] \leqslant |k_i| < 2^{s_i}, i = 1, \ldots, n\}$.

Анизотропным пространством Бесова $B_{\mathbf{p}}^{\alpha\mathbf{q}^\star}([0,1)^n)$ [7] называется множество функций f из $L_{\mathbf{p}}([0,1)^n)$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{B_{\mathbf{p}}^{\alpha\mathbf{q}^\star}([0,1)^n)} = \left\| \left\{ \mathbf{2}^{(\alpha, \mathbf{s})} \|\Delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{p}}([0,1)^n)} \right\} \right\|_{l_{\mathbf{q}^\star}},$$

где $\|\cdot\|_{l_{\mathbf{q}^\star}}$ — норма дискретного пространства Лебега $l_{\mathbf{q}^\star}$.

Сформулируем в виде леммы частный случай теоремы 4 из [7].

Лемма 3. *Пусть* $1 < \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) < \mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) < \infty$, $0 < \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \leqslant \infty$ *и* $\sigma = \frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{r}}$, $\star = (j_1, \ldots, j_n)$ — *некоторая перестановка множества* $(1, \ldots, n)$, *тогда*

$$B_{\mathbf{p}}^{\sigma\mathbf{q}^\star}([0,1)^n) \hookrightarrow L_{\mathbf{rq}^\star}([0,1)^n) \hookrightarrow B_{\mathbf{p}}^{-\sigma\mathbf{q}^\star}([0,1)^n).$$

Пусть $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$, $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ и $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, где $k_j \in \mathbb{Z}$, $s_j \in \mathbb{N}$ и $\gamma_j > 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Ступенчатым крестом называется множество

$$Q(M, \gamma) = \bigcup_{(\mathbf{s}, \gamma) \leqslant M} \rho(\mathbf{s}).$$

Лемма 4. *Пусть* $1 < \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) < \infty$, $0 < \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \leqslant \infty$, $\star = (j_1, \ldots, j_n)$ — *некоторая перестановка множества* $(1, \ldots, n)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) > 0$ *и* $U_{Q(M,\gamma)}^{(\alpha)} = \sum\limits_{\mathbf{k} \in Q(M,\gamma)} \bar{\mathbf{k}}^{\alpha} e^{2\pi i (\mathbf{k}, \mathbf{x})}$. *Тогда справедливо*

$$\left\| U_{Q(M,\gamma)}^{(\alpha)} \right\|_{L_{\mathbf{rq}^\star}([0,1]^n)} \sim A_{M,\gamma}\left(\alpha + \frac{1}{\mathbf{r}'}, 0, \mathbf{q}^\star\right).$$

Доказательство. Последовательность $\{\bar{\mathbf{k}}^\alpha\}$ — монотонна по каждому индексу, и согласно теореме Харди–Литтлвуда, получим

$$\left\|\Delta_{\mathbf{s}}\left(U_{Q(M,\gamma)}^{(\alpha)}\right)\right\|_{L_{\mathbf{p}}([0,1)^n)} \sim 2^{\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\alpha_j+\frac{1}{p'_j}\right)s_j}. \tag{12}$$

Согласно лемме 3 и (12) имеем

$$\left\|U_{Q(M,\gamma)}^{(\alpha)}\right\|_{L_{\mathbf{rq}^\star}([0,1]^n)} \leqslant C_1\left\|U_{Q(M,\gamma)}^{(\alpha)}\right\|_{B_{\mathbf{p}}^{\sigma\mathbf{q}^\star}([0,1)^n)} =$$

$$= C_1\left(\sum_{s_n=0}^{\left[\frac{M}{\gamma_n}\right]}\dots\left(\sum_{s_1=0}^{\left[\frac{M-\gamma_2s_2-\ldots-\gamma_ns_n}{\gamma_1}\right]}\left(2^{\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_js_j}\left\|\Delta_{\mathbf{s}}(U_{Q(M,\gamma)}^{(\alpha)})\right\|_{L_{\mathbf{p}}([0,1)^n)}\right)^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\dots\right)^{\frac{1}{q_n}} \sim$$

$$\sim\left(\sum_{s_n=0}^{\left[\frac{M}{\gamma_n}\right]}\dots\left(\sum_{s_1=0}^{\left[\frac{M-\gamma_2s_2-\ldots-\gamma_ns_n}{\gamma_1}\right]}\left(2^{\sum\limits_{j=1}^{n}(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{r_j}+\alpha_j+\frac{1}{p'_j})s_j}\right)^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\dots\right)^{\frac{1}{q_n}} =$$

$$=\left(\sum_{s_n=0}^{\left[\frac{M}{\gamma_n}\right]}\dots\left(\sum_{s_1=0}^{\left[\frac{M-\gamma_2s_2-\ldots-\gamma_ns_n}{\gamma_1}\right]}\left(2^{\sum\limits_{j=1}^{n}(\alpha_j+\frac{1}{r'_j})s_j}\right)^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\dots\right)^{\frac{1}{q_n}} =$$

$$= A_M\left(\alpha+\frac{1}{\mathbf{r}'},0,\mathbf{q}^\star\right). \tag{13}$$

Аналогично, согласно лемме 3 и (12), имеем

$$\left\|U_{Q(M,\gamma)}^{(\alpha)}\right\|_{L_{\mathbf{rq}^\star}([0,1]^n)} \geqslant C_1\left\|U_{Q(M,\gamma)}^{(\alpha)}\right\|_{B_{\mathbf{p}}^{-\sigma\mathbf{q}^\star}([0,1)^n)} =$$

$$= C_1\left(\sum_{s_n=0}^{\left[\frac{M}{\gamma_n}\right]}\dots\left(\sum_{s_1=0}^{\left[\frac{M-\gamma_2s_2-\ldots-\gamma_ns_n}{\gamma_1}\right]}\left(2^{\sum\limits_{j=1}^{n}-\sigma_js_j}\left\|\Delta_{\mathbf{s}}(U_{Q(M,\gamma)}^{(\alpha)})\right\|_{L_{\mathbf{p}}([0,1)^n)}\right)^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\dots\right)^{\frac{1}{q_n}} \sim$$

$$\sim\left(\sum_{s_n=0}^{\left[\frac{M}{\gamma_n}\right]}\dots\left(\sum_{s_1=0}^{\left[\frac{M-\gamma_2s_2-\ldots-\gamma_ns_n}{\gamma_1}\right]}\left(2^{\sum\limits_{j=1}^{n}(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{r_j}+\alpha_j+\frac{1}{p'_j})s_j}\right)^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\dots\right)^{\frac{1}{q_n}} =$$

$$=\left(\sum_{s_n=0}^{\left[\frac{M}{\gamma_n}\right]}\dots\left(\sum_{s_1=0}^{\left[\frac{M-\gamma_2s_2-\ldots-\gamma_ns_n}{\gamma_1}\right]}\left(2^{\sum\limits_{j=1}^{n}(\alpha_j+\frac{1}{r'_j})s_j}\right)^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\dots\right)^{\frac{1}{q_n}} =$$

$$= A_M\left(\alpha+\frac{1}{\mathbf{r}'},0,\mathbf{q}^\star\right). \tag{14}$$

Объединяя (13) и (14), получаем

$$\left\|U_{Q(M,\gamma)}^{(\alpha)}\right\|_{L_{\mathbf{rq}^\star}([0,1]^n)} \sim A_M\left(\alpha+\frac{1}{\mathbf{r}'},0,\mathbf{q}^\star\right).$$

Лемма доказана. □

4. Доказательство основных результатов

Доказательство (теоремы 1). Пусть $2^{M-1} < N \leqslant 2^M$, тогда $Q(M,\gamma)$ наименьший ступенчатый крест, покрывающий гиперболический крест $\Gamma(N,\gamma)$.

Полином $T^{(\alpha)}_{\Gamma(N,\gamma)}(\mathbf{x})$ представим в виде свёртки полинома $T_{\Gamma(N,\gamma)}(\mathbf{x})$ с ядром $U^{(\alpha)}_{Q(M,\gamma)}(\mathbf{x}) = \sum\limits_{\mathbf{k}\in Q(M,\gamma)} \bar{\mathbf{k}}^{\alpha} e^{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$.

Согласно неравенству Гельдера и леммы 4 получаем

$$\left\|T^{(\alpha)}_{\Gamma(N,\gamma)}\right\|_{L_\infty([0,1)^n)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in[0,1)^n} \left| \int\limits_0^1 T_{\Gamma(N,\gamma)}(\mathbf{y}) U^{(\alpha)}_{M,\gamma}(\mathbf{x}-\mathbf{y})d\mathbf{y} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left\|T_{\Gamma(N,\gamma)}\right\|_{L_{\mathbf{pq}^\star}([0,1)^n)} \left\|U^{(\alpha)}_{M,\gamma}\right\|_{L_{\mathbf{p}'\mathbf{q}'^\star}([0,1)^n)} \sim$$
$$\sim A_{M,\gamma}\left(\alpha + \frac{1}{\mathbf{p}}, 0, \mathbf{q}'^\star\right) \left\|T_{\Gamma(N,\gamma)}\right\|_{L_{\mathbf{pq}^\star}([0,1)^n)}.$$

Далее доказательство следует из леммы 1. Теорема доказана. □

Доказательство (теоремы 2). По аналогии с предыдущим доказательством и согласно лемм 2 и 4 получаем

$$\left\|T^{(\alpha)}_{\Gamma(N,\gamma)}\right\|_{L_{\mathbf{rd}^\star}([0,1)^n)} = \left\| \int\limits_0^1 T_{\Gamma(N,\gamma)}(\mathbf{y}) U^{(\alpha)}_{M,\gamma}(\mathbf{x}-\mathbf{y})d\mathbf{y} \right\|_{L_{\mathbf{rd}^\star}([0,1)^n)} \leqslant$$
$$\leqslant C \left\|T_{\Gamma(N,\gamma)}\right\|_{L_{\mathbf{pq}^\star}([0,1)^n)} \left\|U^{(\alpha)}_{M,\gamma}\right\|_{L_{\mathbf{s}\theta^\star}([0,1)^n)} \sim$$
$$\sim A_{M,\gamma}\left(\alpha + \frac{1}{\mathbf{s}'}, 0, \theta^\star\right) \left\|T_{\Gamma(N,\gamma)}\right\|_{L_{\mathbf{pq}^\star}([0,1)^n)} =$$
$$= A_{M,\gamma}\left(\alpha + \frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{r}}, 0, \theta^\star\right) \left\|T_{\Gamma(N,\gamma)}\right\|_{L_{\mathbf{pq}^\star}([0,1)^n)}.$$

Далее доказательство следует из леммы 1. Теорема доказана. □

Замечание 2. Точность по порядку неравенств из теорем 1 и 2 не сложно проверить на полиномах вида $U^{(\tau)}_{M,\gamma}(\mathbf{x})$, путём подбора мультииндекса $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$. Отметим также, что неравенства (7) и (12) можно получить как следствия теорем вложения $W^{\alpha}_{\mathbf{pq}^\star} \hookrightarrow L_\infty$ при $\alpha > 1/\mathbf{p}$ и $W^{\alpha}_{\mathbf{pq}^\star} \hookrightarrow L_{\mathbf{rd}^\star}$ при $\alpha > 1/\mathbf{p} - 1/\mathbf{r}$ из работы [7].

Литература

1. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969.
2. *Темляков В. Н.* Приближение функции с ограниченной смешанной производной // Труды МИ АН СССР. — 1986. — Т. 178. — С. 1–112.
3. *Blozinsky A. P.* Multivariate rearrangements and banach function spaces with mixed norms // Trans. Amer. Math. Soc. — 1981. — Pp. 149–167.
4. *Нурсултанов Е. Д.* О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p-пространств // Известия РАН. Серия математическая. — 2000. — Т. 64, № 1. — С. 95–122.
5. *Нурсултанов Е. Д.* Неравенство разных метрик С.М. Никольского и свойства последовательности норм сумм Фурье функций из пространства Лоренца // Труды МИ РАН. — 2006. — Т. 255. — С. 1–18.

6. *Nursultanov E., Tikhonov S.* Convolution inequalities in Lorentz spaces // Centre de Reserca Matematica, Preprints, Barselona. — 2008. — Vol. 802. — Pp. 1–31.
7. *Нурсултанов Е. Д.* Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Доклады РАН. — 2004. — Т. 394, № 1. — С. 16–19.

UDC 517.51

Nonequivalence of Different Metrics in Unisotropic Lorentz Spaces

K. A. Bekmaganbetov, E. D. Nursultanov

Mathematical Analysis Department
Kazakh branch of Lomonosov MSU
Munaitpasova, 7, 010010 Astana, Republic of Kazakhstan

The nonequivalence of different metrics for trigonometric polynomials with the spectrum from hyperbolic cross for unisotropic Lorentz spaces is proved.

Key words and phrases: Lorentz space, nonequivalence of different metrics.