УДК 621.39

Решение задачи описания прохождения электромагнитной волны через слоистую среду

А. А. Хохлов

Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Решается задача прохождения плоской монохроматической линейно поляризованной электромагнитной волны через многослойную диэлектрическую среду при отсутствии поглощения методом разложения общего решения системы уравнений Максвелла в каждом слое по фундаментальной системе решений, в случае изотропной среды — для отдельных поляризаций. В случае изотропных сред для одной (TE либо TM) поляризации задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, представляющих собой условия на каждой границе раздела слоев, по два уравнения на каждую границу. Аналогичным образом решается задача для произвольной линейно поляризованной монохроматической электромагнитной волны, т.е. линейной комбинации TE и TM поляризаций. В таком случае для каждой границы раздела слоев записывается четыре уравнения. В общем случае задача сводится к решению СЛАУ размерности $4(m+1)$, где m — количество слоев. В случае анизотропной среды задача должна решаться одновременно для двух поляризаций, матрица коэффициентов системы дифференциальных уравнений для каждого слоя имеет сложный вид и не является блочно-диагональной, что справедливо для изотропной среды.

Ключевые слова: анизотропная оптика, распространение электромагнитной волны, граничные условия электромагнитного поля, уравнения Максвелла, магнитная анизотропия.

1. Введение

Рассмотрено решение задачи описания взаимодействия электромагнитной волны с многослойной системой из непоглощающих слоев, обладающих в общем случае оптической и магнитной анизотропией. Будем рассматривать плоскую монохроматическую волну с определёнными значениями частоты ω и волнового вектора $\tilde{\mathbf{k}}$, удовлетворяющую однородному волновому уравнению. Напряжённость её электрического поля имеет вид [1]:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E_0} e^{i\omega t - \tilde{\mathbf{k}}\,\tilde{\mathbf{r}}}, \quad \tilde{\mathbf{k}} = \frac{\omega}{c} n(\omega)\,\tilde{\mathbf{s}}, \tag{1}$$

где $\mathbf{E_0}$ — амплитуда поля, n — показатель преломления среды, а $\tilde{\mathbf{s}} = \frac{\tilde{\mathbf{k}}}{|\tilde{\mathbf{k}}|}$ — единичный вещественный вектор. Напряжённость магнитного поля $\tilde{\mathbf{H}}$, электрическая индукция $\tilde{\mathbf{D}}$ и магнитная индукция $\tilde{\mathbf{B}}$ также могут быть описаны выражениями вида (1). Будем рассматривать только линейно поляризованные волны. В зависимости от направления поляризации они всегда могут быть выражены в виде линейной комбинация двух — **TE** и **TM** поляризаций.

2. Математическая модель

Используем уравнения Максвелла и уравнения связи в гауссовой системе единиц в отсутствие сторонних токов и зарядов с учётом вида волн (1):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\tilde{\mathrm{E}}(\tilde{\mathrm{r}},t) &= -ik_0\tilde{\mathrm{B}}(\tilde{\mathrm{r}},t); \quad \operatorname{rot}\tilde{\mathrm{H}}(\tilde{\mathrm{r}},t) = ik_0\tilde{\mathrm{D}}(\tilde{\mathrm{r}},t), \\ \tilde{\mathrm{D}}(\omega,\,\tilde{\mathrm{r}}) &= \hat{\varepsilon}(\omega)\tilde{\mathrm{E}}(\omega,\,\tilde{\mathrm{r}}); \quad \tilde{\mathrm{B}}(\omega,\,\tilde{\mathrm{r}}) = \hat{\mu}(\omega)\tilde{\mathrm{H}}(\omega,\,\tilde{\mathrm{r}}), \end{aligned} \tag{2}$$

Статья поступила в редакцию 31 марта 2010 г.

где $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ — тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости, ω — циклическая частота, $\tilde{\mathbf{r}}$ — вектор, описывающий координаты полей, k_0 — волновое число. Учитывается частотная дисперсия, пространственная дисперсия не учитывается. Электромагнитная волна падает на многослойную систему под некоторым углом α_0 из изотропной среды с коэффициентом преломления n_0 и выходит в изотропную среду с коэффициентом преломления n_{m+1} под углом α_{m+1}. Система координат выбрана так, чтобы падение волны происходило в плоскости XOZ. Это обусловливает отсутствие y — компоненты волнового вектора падающей волны. При распространении волны вдоль положительного направления оси OZ будет меняться только z-компонента волнового вектора, x-компонента будет оставаться неизменной. Система состоит из m слоев, каждый из которых характеризуется толщиной d_j, магнитной проницаемостью $\hat{\mu}_j$ и диэлектрической проницаемостью $\hat{\varepsilon}_j$.

3. Система дифференциальных уравнений

Для изотропных слоев диэлектрическая и магнитная проницаемости каждого слоя являются скалярами: $\hat{\mu} = \mu$, $\hat{\varepsilon} = \varepsilon$. Представив систему уравнений Максвелла в виде шести скалярных уравнений, подставив в неё уравнения связи и учитывая, что $\partial F_k/\partial y = 0$, а $\partial F_k/\partial x = -ik_x F_k$, где F_k — k-я координата любой из компонент электромагнитного поля $k = \{x, y, z\}$, получим следующую линейную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для j-го слоя для двух поляризаций:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\begin{pmatrix} H_{xj} \\ E_{yj} \\ H_{yj} \\ E_{xj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{ik_0}{\mu_j}\left(\varepsilon_j\mu_j - \frac{k_{xj}^2}{k_0^2}\right) & 0 & 0 \\ ik_0\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -ik_0\varepsilon_j \\ 0 & 0 & -\frac{ik_0}{\varepsilon_j}\left(\varepsilon\mu - \frac{k_{xj}^2}{k_0^2}\right) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_{xj} \\ E_{yj} \\ H_{yj} \\ E_{xj} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Система может решаться независимо для каждой поляризации, для TE следует взять вектор $(H_x; E_y)^T$ и левый верхний блок матрицы коэффициентов, для TM — вектор $(H_y; E_x)^T$ и правый нижний блок матрицы коэффициентов. Приведём решения для TE поляризации:

$$\begin{pmatrix} H_{xj} \\ E_{yj} \end{pmatrix}(z) = A_j\frac{\sqrt{\beta_j}}{\mu_j}e^{ik_0\sqrt{\beta_j}z} - B_j\frac{\sqrt{\beta_j}}{\mu_j}e^{-ik_0\sqrt{\beta_j}z}; \quad \beta_j = \sqrt{\varepsilon_j\mu_j - k_{xj}^2/k_0^2}. \quad (4)$$

В случае системы из анизотропных слоев матрица коэффициентов системы (3) выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{k_x\mu_{31}}{k_0\mu_{33}} & \varepsilon_{22} - \dfrac{\varepsilon_{23}\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}} - \dfrac{ik_x^2}{k_0^2\mu_{33}} & \dfrac{\mu_{23}}{\mu_{33}} - \dfrac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{33}} & \varepsilon_{21} - \dfrac{\varepsilon_{23}\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}} \\ \mu_{11} - \dfrac{\mu_{13}\mu_{31}}{\mu_{33}} & \dfrac{k_x\mu_{13}}{k_0\mu_{33}} & \mu_{12} - \dfrac{\mu_{13}\mu_{32}}{\mu_{33}} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{12} - \dfrac{\varepsilon_{13}\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{33}} & -\dfrac{ik_x\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}} & \varepsilon_{11} - \dfrac{\varepsilon_{13}\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}} \\ \mu_{21} - \dfrac{\mu_{23}\mu_{31}}{\mu_{33}} & \dfrac{\mu_{23}}{\mu_{33}} - \dfrac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{33}} & \mu_{22} - \dfrac{\mu_{23}\mu_{31}}{\mu_{33}} - \dfrac{ik_x^2}{k_0^2\varepsilon_{33}} & -\dfrac{ik_x\varepsilon_{31}}{k_0\varepsilon_{33}} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Для упрощения записи из матрицы вынесен множитель ik_0. Необходимо решать задачу для двух поляризаций совместно, так как в анизотропной среде всегда распространяются две поляризации, и их состояния зависят друг от друга. Также следует отметить, что нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы (5) аналитически крайне затруднительно, и следует воспользоваться устойчивыми численными методами. Также следует отметить, что матрица (5) соответствует матрице Δ из работы [2].

4. Граничные условия

Приравнивая тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей на границе раздела двух слоев, для j-ой границы системы (например, в случае изотропной среды для одной поляризации) можно записать следующее уравнение:

$$A_{j-1}\bar{v}_1^{j-1}e^{ik_0\sqrt{\beta_{j-1}}z_j}+B_{j-1}\bar{v}_2^{j-1}e^{-ik_0\sqrt{\beta_{j-1}}z_j}=A_j\bar{v}_1^je^{ik_0\sqrt{\beta_j}z_j}+B_j\bar{v}_2^je^{-ik_0\sqrt{\beta_j}z_j}, \quad (6)$$

где v_i^j — первый или второй собственный вектор одного из блоков матрицы (3) для слоя.

Выбрав решения вида (4), соответствующие условиям на бесконечности в нулевом и j слоях, можно получить систему линейных алгебраических уравнений относительно амплитудных коэффициентов отражения и пропускания, которые будут входить в представления электромагнитного поля в нулевом и $m+1$ слоях, и коэффициентов A_j и B_j в каждом слое.

Литература

1. *Агранович В. М., Гинзбург В. Л.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. — М.: Наука, 1965. — 376 с.
2. *Berreman D. W.* Optics in Stratified and Anisotropic Media: 4x4-Matrix Formulation // Journal of the optical society of America. — 1972. — No 4. — Pp. 502–510.

UDC 621.39

Solution of the Electromagnetic Waves Propagation Through a Stratified Medium Problem

A. A. Khokhlov

Telecommunication Systems Department
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

The problem of plane monochromatic linearly polarized electromagnetic wave diffraction through a stratified nonabsorbing medium is solved by means of general Maxwell equations solution expansion on fundamental solutions system for each layer, in case of isotropic media — for each separate polarization. In case of isotropic media for one (TE or TM) polarization the problem is equivalent to one of solving a linear algebraic equations system — two boarder equations on each boarder. In case of general monochromatic polarized electromagnetic wave the problem is equivalent to the solution of linear algebraic equations system with four equations on each boarder. In general the dimension of linear algebraic equations system is $4(m+1)$, where m is the number of layers. In case of anisotropic media the problem must be solved for both TE and TM polarizations simultaneously, the coefficient matrix of differential equations system for each layer doesn't have zero blocks.

Key words and phrases: anisotropic optics, propagation of electromagnetic wave, boundary conditions of electromagnetic field, Maxwell equations, magnetic anisotropy.