

УДК 530.1

Обобщение абелевой калибровочной симметрии

Н. П. Третьяков*, А. Я. Терлецкий†

* Кафедра прикладной математики
Российский государственный социальный университет
ул. Вильгельма Пика, д.4, Москва, 129226, Россия† Кафедра экспериментальной физики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклуто-Маклая, 6, Москва, 117198, Россия

Предложено обобщение абелевой $U(1)$ группы калибровочной симметрии, при котором единица и генератор алгебры Ли исходной группы меняются местами между собой. В результате получается коммутативное расширение группы симметрии, двумерное матричное представление которой содержит матрицы с определителями, равными не только 1, как в случае $SO(2)$, но и -1 . Целью настоящей работы является обоснование необходимости существования так называемых мнимых зарядов и электромагнитных полей с отрицательной плотностью энергии. Проанализированы некоторые космологические следствия существования таких полей.

Ключевые слова: калибровочная симметрия, абелева группа, мнимые заряды, отрицательная плотность энергии, ускоренное расширение вселенной.

Выдвинутая Я.П. Терлецким гипотеза о существовании мнимых зарядов и электромагнитных полей с отрицательной плотностью энергии [1] связана с формальной подстановкой в закон Кулона вместо действительных величин зарядов $\pm q$ мнимых величин $\pm iq$. В этом случае одноимённые заряды будут притягиваться, а разноимённые — отталкиваться. Именно это свойство представляет собой фундаментальное физическое отличие их от обычных зарядов; представление в виде мнимых величин — всего лишь математический приём описания. Полагая формально заряды и поля комплексными, в работе [1] были получены уравнения Максвелла и выражение для силы Лоренца (без взаимодействия между обычными и мнимыми зарядами). Одним из вариантов таких уравнений является следующий:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho_e; \operatorname{div} \vec{e} = -4\pi\rho_m; \operatorname{div} \vec{B} = 0; \operatorname{div} \vec{b} = 0; \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_e + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \operatorname{rot} \vec{b} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_m - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}; \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \operatorname{rot} \vec{e} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t}; \\ \vec{F}_{\text{Лор}} &= \rho_e \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{j}_e \vec{B}] + \rho_m \vec{e} - \frac{1}{c} [\vec{j}_m \vec{b}]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь \vec{E} , \vec{B} , \vec{e} , \vec{b} — соответственно «обычные» и «минус» поля, ρ_e , \vec{j}_e , ρ_m , \vec{j}_m — их источники.

Стандартный вывод теоремы Пойнтинга из уравнений (1) приводит к таким выражениям для мощности силы Лоренца, плотности энергии и плотности потока энергии:

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{\partial w}{\partial t} - \operatorname{div} \vec{S}; \quad w = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) - \frac{1}{8\pi} (\vec{e}^2 + \vec{b}^2); \\ \vec{S} &= \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{B}] - \frac{c}{4\pi} [\vec{e} \vec{b}], \end{aligned}$$

из которых очевидно, что плотность энергии минус-полей отрицательна. В работе [2] сделана попытка феноменологического вывода уравнений со взаимодействием между обычными и мнимыми зарядами; в его отсутствии они взаимодействуют между собой посредством лишь гравитации (т.е. мнимые заряды принадлежат так называемому «скрытому сектору»).

Следует отметить, что в работах [1, 2] уравнения получены чисто формально, что не придаёт убедительности такому их выводу. Как известно, существование электромагнитного поля может быть выведено исключительно из требования инвариантности лагранжиана относительно группы преобразований $U(1)$; векторный потенциал A_μ возникает как компенсирующее калибровочное поле, а элементарный заряд — как константа взаимодействия этого поля с полями материи [3]. Целью данной работы и является такое обобщение $U(1)$ — симметрии, которое приводит к необходимости существования минус — электромагнитного поля как калибровочного. Тем самым гипотеза Я.П. Терлецкого поднимается на более высокий уровень обоснованности.

Идея обобщения состоит в следующем. Группа $U(1)$ изоморфна $SO(2)$, т.е. группе ортогональных матриц с определителем, равным единице:

$$t_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Расширение группы до матриц с детерминантом минус единица может быть проведено добавлением к вращениям (2) отражений осей. Но тогда получается $O(2)$ — полная ортогональная группа, которая является некоммутативной даже в случае двух измерений. Это противоречит нашей попытке вывести существование минус-поля по аналогии с обычным электромагнитным полем, т.е. из некоторой коммутативной группы преобразований симметрии лагранжиана. На матрицы (2) можно посмотреть с другой стороны: как на анти циркулянтные, т.е. матрицы вида

$$\begin{bmatrix} a & b \\ qb & a \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $q = -1$. Вообще, при любом фиксированном q невырожденные матрицы вида (3) образуют коммутативную группу. Её можно обозначить $C_q(2, C)$ — q — циркулянтные матрицы размера 2 на 2 с комплексными элементами. Если $q = 1$, то матрицы называют просто циркулянтными.

Можно построить коммутативную группу циркулянтных матриц, зависящих от одного непрерывного параметра α , с детерминантами ± 1 , т.е. $SC_1(2, C)$. Группа состоит из элементов двух типов, имеющих общее и инфинитезимальное представление:

$$t_\alpha = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \alpha & \operatorname{sh} \alpha \\ \operatorname{sh} \alpha & \operatorname{ch} \alpha \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad s_\alpha = \begin{bmatrix} \operatorname{sh} \alpha & \operatorname{ch} \alpha \\ \operatorname{ch} \alpha & \operatorname{sh} \alpha \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (4)$$

$$\det t_\alpha = 1; \quad \det s_\alpha = -1;$$

Как видно из (4), элементы группы t_α и s_α отличаются тем, что единица и генератор меняются местами. Легко видеть, что выполняются все групповые аксиомы, т.е. наличие единицы и обратных элементов, а таблица группового умножения имеет вид

$$t_\alpha t_\beta = t_{\alpha+\beta}; \quad t_\alpha s_\beta = s_{\alpha+\beta}; \quad s_\alpha s_\beta = t_{\alpha+\beta}. \quad (5)$$

Построенная группа является двусвязной однопараметрической группой Ли. Инфинитезимальные операторы в (4) представляют её алгебру Ли.

Рассмотрим пространство представления группы в виде двумерных векторов — дублетов действительных скалярных полей, а их скалярное произведение определим с помощью индефинитной метрики:

$$\vec{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}; \quad \vec{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}; \quad \vec{\varphi} * \vec{\psi} = \varphi_1 \psi_1 - \varphi_2 \psi_2.$$

Тогда квадратичная форма $\vec{\varphi} * \vec{\varphi}$ оказывается инвариантной относительно преобразований t_α и меняет знак при преобразованиях s_α :

$$\begin{aligned}
t_\alpha \vec{\varphi} &= (\hat{1} + \alpha \hat{G}) \vec{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 + \alpha \varphi_2 \\ \varphi_2 + \alpha \varphi_1 \end{bmatrix}; \quad s_\alpha \vec{\varphi} = (\hat{G} + \alpha \hat{1}) \vec{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_2 + \alpha \varphi_1 \\ \varphi_1 + \alpha \varphi_2 \end{bmatrix}; \quad \hat{G} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \\
(t_\alpha \vec{\varphi}) * (t_\alpha \vec{\varphi}) &= (\varphi_1 + \alpha \varphi_2)^2 - (\varphi_2 + \alpha \varphi_1)^2 = \varphi_1^2 - \varphi_2^2 = \vec{\varphi} * \vec{\varphi}; \\
(s_\alpha \vec{\varphi}) * (s_\alpha \vec{\varphi}) &= (\varphi_2 + \alpha \varphi_1)^2 - (\varphi_1 + \alpha \varphi_2)^2 = \varphi_2^2 - \varphi_1^2 = -\vec{\varphi} * \vec{\varphi}.
\end{aligned} \tag{6}$$

По аналогии с обычным случаем определим ковариантную производную как

$$D_\mu \vec{\varphi} = \partial_\mu \vec{\varphi} - e A_\mu \hat{G} \vec{\varphi},$$

тогда при совместном преобразовании полевых переменных и градиентном преобразовании потенциалов ковариантные производные преобразуются так же, как поля:

$$\begin{aligned}
t_\alpha : \quad \vec{\varphi} &\rightarrow \vec{\varphi} + \alpha \hat{G} \vec{\varphi}; \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha; \quad D_\mu \vec{\varphi} \rightarrow D_\mu \vec{\varphi} + \alpha \hat{G} (D_\mu \vec{\varphi}), \\
s_\alpha : \quad \vec{\varphi} &\rightarrow \hat{G} \vec{\varphi} + \alpha \vec{\varphi}; \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha; \quad D_\mu \vec{\varphi} \rightarrow \hat{G} (D_\mu \vec{\varphi}) + \alpha (D_\mu \vec{\varphi}).
\end{aligned} \tag{7}$$

Следовательно, лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} D_\mu \vec{\varphi} * D^\mu \vec{\varphi} - m^2 \vec{\varphi} * \vec{\varphi} \tag{8}$$

инвариантен относительно преобразований t_α и меняет знак при преобразованиях s_α . Поскольку уравнения движения получаются путём приравнивания к нулю первой вариации лагранжиана, смена знака у последнего не изменяет динамических уравнений. Необходимо помнить в этой связи, что правильное название вариационного принципа — принцип стационарного (а не наименьшего) действия, а на реальных траекториях действие принимает экстремальное (а не обязательно наименьшее) значение. Итак, инвариантность динамических уравнений относительно расширенной абелевой группы достигается в данном случае за счёт инвариантности лагранжиана с точностью до знака.

Однако построенная симметрия разрушается при добавлении к лагранжиану необходимого кинетического члена, описывающего свободное электромагнитное поле:

$$L = \frac{1}{2} D_\mu \vec{\varphi} * D^\mu \vec{\varphi} - m^2 \vec{\varphi} * \vec{\varphi} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}; \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{9}$$

При градиентных преобразованиях потенциалов (7) тензор напряжённостей $F_{\mu\nu}$ очевидно не изменяется, следовательно, при преобразованиях s_α первые два члена лагранжиана (9) меняют знак, а последний член не изменяется. Весь лагранжиан (9) оказывается не инвариантным, хотя бы с точностью до знака!

Восстановить симметрию без введения новых сущностей невозможно. Помимо поля $\vec{\varphi}$, должно существовать другое поле $\vec{\psi}$, взаимодействующее со своим собственным калибровочным полем a_μ , но с теми же значениями констант e и m . Однако кинетический член поля a_μ противоположен по знаку:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \vec{\varphi} - e A_\mu \hat{G} \vec{\varphi} \right) * \left(\partial^\mu \vec{\varphi} - e A^\mu \hat{G} \vec{\varphi} \right) - m^2 \vec{\varphi} * \vec{\varphi} + \\
&\frac{1}{2} \left(\partial_\mu \vec{\psi} - e a_\mu \hat{G} \vec{\psi} \right) * \left(\partial^\mu \vec{\psi} - e a^\mu \hat{G} \vec{\psi} \right) - m^2 \vec{\psi} * \vec{\psi} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}; \tag{10} \\
f_{\mu\nu} &= \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu.
\end{aligned}$$

Для обеспечения инвариантности лагранжиана (10), хотя бы с точностью до знака, преобразования s_α должны сопровождаться перемешиванием полей $\vec{\varphi}$ и $\vec{\psi}$.

Такие преобразования обозначим заглавными буквами:

$$\begin{aligned}\hat{T}_\alpha : \vec{\varphi} &\rightarrow \vec{\varphi} + \alpha \hat{G} \vec{\varphi}; \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha; \quad \vec{\psi} \rightarrow \vec{\psi} + \alpha \hat{G} \vec{\psi}; \quad a_\mu \rightarrow a_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha; \\ \hat{S}_\alpha : \vec{\varphi} &\rightarrow \hat{G} \vec{\varphi} + \alpha \vec{\varphi}; \quad A_\mu \rightarrow a_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha; \quad \vec{\psi} \rightarrow \hat{G} \vec{\varphi} + \alpha \vec{\varphi}; \quad a_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha.\end{aligned}$$

В матричной форме:

$$\begin{aligned}\hat{T}_\alpha : \begin{bmatrix} \vec{\varphi} \\ \vec{\psi} \end{bmatrix} &\rightarrow \left(\begin{bmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} \hat{G} & 0 \\ 0 & \hat{G} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \vec{\varphi} \\ \vec{\psi} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} A_\mu \\ a_\mu \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\mu \\ a_\mu \end{bmatrix} + \frac{1}{e} (\partial_\mu \alpha) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \hat{S}_\alpha : \begin{bmatrix} \vec{\varphi} \\ \vec{\psi} \end{bmatrix} &\rightarrow \left(\begin{bmatrix} 0 & \hat{G} \\ \hat{G} & 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 & \hat{1} \\ \hat{1} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \vec{\varphi} \\ \vec{\psi} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} A_\mu \\ a_\mu \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\mu \\ a_\mu \end{bmatrix} + \frac{1}{e} (\partial_\mu \alpha) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (11)$$

Можно убедиться, что таблица группового умножения имеет такой же вид, что и (5):

$$T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}, \quad T_\alpha S_\beta = S_{\alpha+\beta}, \quad S_\alpha S_\beta = T_{\alpha+\beta},$$

т.е. это — представление той же самой группы, на этот раз четырёхмерное.

При преобразовании T_α каждый член лагранжиана (10) инвариантен. При преобразовании S_α члены с ковариантными производными и массовые члены переходят друг в друга и меняют знак; кинетические члены переходят друг в друга без смены знака ($F_{\mu\nu} \leftrightarrow f_{\mu\nu}$), однако их разность, входящая в (10), меняет знак, таким образом, меняет знак и лагранжиан в целом.

Можно построить более привычное представление. При замене, когда $e \rightarrow iq$; $\varphi_1 \rightarrow \tilde{\varphi}_1$; $\varphi_2 \rightarrow i\tilde{\varphi}_2$ (мнимый заряд!) а * заменяется на простое умножение, тогда лагранжиан (8) переходит в

$$L = (\partial_\mu \Phi - iqA_\mu \Phi) (\partial^\mu \bar{\Phi} + iqA^\mu \bar{\Phi}) - m^2 \Phi \bar{\Phi}; \quad \Phi = \tilde{\varphi}_1 + i\tilde{\varphi}_2; \quad \bar{\Phi} = \tilde{\varphi}_1 + i\tilde{\varphi}_2, \quad (12)$$

т.е. в обычный лагранжиан для комплексного скалярного поля Φ . Тогда преобразования (6) приобретают вид (при одновременной замене $\alpha \rightarrow i\beta$):

$$\begin{aligned}t_\alpha : \Phi = \tilde{\varphi}_1 + i\tilde{\varphi}_2 &\rightarrow \Phi + i\beta \Phi = e^{i\beta} \Phi; \quad \bar{\Phi} = \tilde{\varphi}_1 - i\tilde{\varphi}_2 \rightarrow \bar{\Phi} - i\beta \bar{\Phi} = e^{-i\beta} \bar{\Phi}, \\ s_\alpha : \Phi = \tilde{\varphi}_1 + i\tilde{\varphi}_2 &\rightarrow \Phi + i\beta \Phi = e^{i\beta} \Phi; \quad \bar{\Phi} = \tilde{\varphi}_1 - i\tilde{\varphi}_2 \rightarrow -\bar{\Phi} + i\beta \bar{\Phi} = -e^{-i\beta} \bar{\Phi}\end{aligned}\quad (13)$$

и в обоих случаях $A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha = A_\mu + \frac{1}{iq} \partial_\mu (i\beta) = A_\mu + \frac{1}{q} \partial_\mu \beta$. Можно показать, что и в этом представлении ковариантные производные

$$D_\mu \Phi = (\partial_\mu \Phi - iqA_\mu \Phi); \quad D^\mu \bar{\Phi} = (\partial^\mu \bar{\Phi} + iqA^\mu \bar{\Phi})$$

преобразуются по (13), т.е. так же, как поля Φ , $\bar{\Phi}$, следовательно, лагранжиан (12) инвариантен при преобразованиях t_α и меняет знак при s_α .

Преобразования (13) выглядят несколько необычно, учитывая, что $\bar{\Phi}$ — это комплексно сопряжённое Φ . Как эти преобразования полей выглядят в терминах их действительных и мнимых частей $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$? Легко показать, что

$$t_\alpha : \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \end{bmatrix}; \quad s_\alpha : \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} i \sin \alpha & i \cos \alpha \\ -i \cos \alpha & i \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Запишем инфинитезимальную форму (14), выделяя мнимую единицу, поскольку в стандартной форме калибровочные преобразования обычно записывают в виде [3, с. 98]

$$\varphi_A \rightarrow \varphi'_A = \varphi_A + i\alpha_j (T_j)_{AB} \varphi_B; \quad j = 1, \dots, K; \quad A, B = 1, \dots, R$$

где K — размерность калибровочной группы (в данном случае 1), R — размерность представления (в данном случае 2), $(T_j)_{AB}$ — генераторы группы. Получим:

$$\begin{aligned} t_\alpha : \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} &\rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + i\alpha \begin{pmatrix} -i & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}, \\ s_\alpha : \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} &\rightarrow \left\{ -i \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + i\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (15) снова видно, что элементы t_α и s_α отличаются тем, что единица и генератор двумерного вращения $i\varepsilon_{AB}$ меняются местами. Таблица группового умножения также имеет вид (5). Проводя рассуждения, аналогичные выше приведённым, получаем, что аналог лагранжиана (10) имеет вид

$$\begin{aligned} L = & (\partial_\mu \Phi - i q A_\mu \Phi) (\partial^\mu \bar{\Phi} + i q A^\mu \bar{\Phi}) - m^2 \Phi \bar{\Phi} + \\ & + (\partial_\mu \Psi - i q a_\mu \Psi) (\partial^\mu \bar{\Psi} + i q a^\mu \bar{\Psi}) - m^2 \Psi \bar{\Psi} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (16)$$

Лагранжиан (16) инвариантен относительно преобразований

$$T_\alpha : \Phi \rightarrow \Phi + i\alpha\Phi; \quad \bar{\Phi} \rightarrow \bar{\Phi} - i\alpha\bar{\Phi}; \quad \Psi \rightarrow \Psi + i\alpha\Psi; \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} - i\alpha\bar{\Psi}; \quad (17)$$

и меняет знак при преобразованиях

$$S_\alpha : \Phi \rightarrow \Psi + i\alpha\Psi; \quad \bar{\Phi} \rightarrow -\bar{\Psi} + i\alpha\bar{\Psi}; \quad \Psi \rightarrow \Phi + i\alpha\Phi; \quad \bar{\Psi} \rightarrow -\bar{\Phi} + i\alpha\bar{\Phi}; \quad (18)$$

а потенциалы преобразуются в точности как в (11), с заменой $e \rightarrow q$. Преобразования (17), (18) можно записать в матричной форме, аналогичной (11).

Лагранжиан (16) может быть представлен в стандартной форме, с явным выделением токов:

$$\begin{aligned} L = & \partial_\mu \Phi \partial^\mu \bar{\Phi} - m^2 \Phi \bar{\Phi} - A_\mu J_{(\Phi)}^\mu + q^2 A_\mu A^\mu \Phi \bar{\Phi} + \\ & + \partial_\mu \Psi \partial^\mu \bar{\Psi} - m^2 \Psi \bar{\Psi} - a_\mu J_{(\Psi)}^\mu + q^2 a_\mu a^\mu \Psi \bar{\Psi} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}; \\ J_{(\Phi)}^\mu = & i q (\Phi \partial_\mu \bar{\Phi} - \bar{\Phi} \partial_\mu \Phi); \quad J_{(\Psi)}^\mu = i q (\Psi \partial_\mu \bar{\Psi} - \bar{\Psi} \partial_\mu \Psi). \end{aligned}$$

Таким образом, отличие двух типов полей состоит в том, что для одного токовый и кинетический члены в лагранжиане имеют одинаковые знаки, а для другого — противоположные. Варьирование по полевым переменным и токам в первом случае приводит к обычным уравнениям Максвелла и силе Лоренца, а во втором — к уравнениям с мнимыми зарядами и отрицательной плотностью энергии электромагнитного поля.

Ясно, что существование мнимых зарядов и минус-полей приводит к существенным космологическим следствиям. Наличие полей с отрицательной плотностью энергии, имеющих космическую протяжённость, даёт основание выдвинуть гипотезу, что современное состояние Вселенной является радиационно-доминированным фотонами с отрицательной энергией и, как следствие — объяснить малое значение космологической постоянной как перенормированной энергии вакуума. Последнее является серьёзной проблемой стандартной космологической модели Λ CDM [4]. Если минус-фотоны дают существенный вклад в баланс энергии во Вселенной, то его следует записать так:

$$\Omega_M + \Omega_\Lambda - \Omega_{\text{rad}} = 1; \quad \Omega_{\text{rad}} = \left| \frac{\rho_{\text{rad},0}}{\rho_c} \right|, \quad (19)$$

где плотность энергии минус-фотонов и их давление отрицательны:

$$\rho_{\text{rad},0} < 0; \quad p_{\text{rad}} = \frac{\rho_{\text{rad},0}}{3} < 0.$$

Тогда уравнение ковариантного сохранения для радиационной компоненты и уравнения Фридмана запишутся в виде [4]:

$$\dot{\rho}_{\text{rad}} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_{\text{rad}} + p_{\text{rad}}) = 0 \Rightarrow \rho_{\text{rad}} = \frac{c}{a^4}, \quad (\dot{a})^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_c \left(\frac{\Omega_M a_0^3}{a} + \Omega_\Lambda a^2 - \Omega_{\text{rad}} \frac{a_0^4}{a^2} \right).$$

Дифференцируя уравнение Фридмана по времени, получаем

$$\ddot{a} = a \frac{4\pi}{3}G\rho_c \left(2\Omega_\Lambda - \Omega_M \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + 2\Omega_{\text{rad}} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 \right). \quad (20)$$

Из (20) следует, что при выполнении условия $2(\Omega_\Lambda + \Omega_{\text{rad}}) > \Omega_M$ современное состояние Вселенной характеризуется ускоренным расширением: $\ddot{a}_0 > 0$, как и в модели Λ CDM [4]. Отличие состоит в том, что, как видно из (19), вместо Ω_Λ имеем $\Omega_\Lambda - \Omega_{\text{rad}}$, т.е. объясняется малое значение космологической постоянной как перенормированной энергии вакуума Ω_Λ .

Литература

1. *Terletsky J. P.* // *Annales de la Fondation Louis de Broglie.* — 1990. — Vol. 15, No 1.
2. *Третьяков Н. П., Терлецкий А. Я., Терлецкий С. А.* // *Вестник РУДН, Серия Физика.* — 1999. — № 12. — С. 143–149.
3. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* *Квантовые поля.* — Физматлит, 1993. — 334 с.
4. *Горбунов Д. С., Рубаков В. А.* *Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва.* — М.: Издательство ЛКИ, 2008. — 552 с.

UDC 530.1

Extension of Abelian Gauge Symmetry

N. P. Tretyakov*, **A. Ya. Terletsky†**

* *Department of Applied Mathematics
Social State University of Russia
Wilhelm Pieck str. 4, Moscow, Russia*

† *Department of Experimental Physics
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, Russia 117198*

A generalization of the $U(1)$ gauge symmetry group by permutation of the generator and the unity is proposed. Thus a commutative extension of the symmetry group is obtained. The two-dimensional matrix representation of this group contains matrices with determinants both 1 and -1 . The aim of the present work consists in establishing the necessity of existence of so-called imaginary charges and electromagnetic fields with negative energy density. Some cosmological issues of the existence of such fields are discussed.

Key words and phrases: gauge symmetry, abelian group, imaginary charges, negative energy density, accelerating cosmological expansion.