Вестник РУДН Серия *Математика. Информатика. Физика.* № 2 (1). 2010. С. 79–94

Физика

УДК 537.812, 539.12.01, 512.552

О некоторых аспектах применения полинорм на алгебрах в физике

А. А. Элиович, В. И. Санюк

Кафедра теоретической физики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, 117198, Россия

В статье рассматриваются некоторые возможности применения в физике псевдонорм степени выше 2 (полинорм) на гиперкомплексных алгебрах, прежде всего на примере алгебры бикватернионов. Благодаря этому возникает новый угол зрения на ряд известных вопросов. В частности, показывается, что рассмотрение 4-нормы в теории поля делает естественным переход от электродинамики Максвелла к нелинейной электродинамике Борна–Инфельда. Кроме того, алгебраический подход показывает естественность добавления предложенного Т. Скирмом нелинейного члена в мезонный лагранжиан ядерных сил. При этом выявляется целесообразность введения дополнительного члена в лагранжиан Скирма, что предположительно может улучшить свойства модели.

Ключевые слова: гиперкомплексные алгебры, бикватернионы, мультипликативные полинормы, нелинейные теории поля, электродинамика Борна–Инфельда, модель Скирма.

1. Введение

В последние два десятилетия фундаментальная теоретическая физика находится в состоянии идейного поиска. В этой ситуации уделяется внимание не только магистральным направлениям исследований, но и разного рода «окольным тропам» [1]. Одной из таких полузабытых программ была красивая идея алгебраизации физики, предложенная в середине XIX века Уильямом Гамильтоном и поддержанная, в частности, Уильямом Клиффордом. Они пытались понять устройство природы, предположив, что в основе физики лежит геометрия, а в основе геометрии — некоторая гиперкомплексная алгебра с исключительными свойствами. На этом пути обнаружился ряд замечательных наблюдений и неочевидных связей. Согласно гиперкомплексной программе они представляют собой осколки единой картины, которую со временем удастся собрать; напротив, большинство современных исследователей полагает, что здесь имеет место лишь набор совпадений, неизбежных в малых размерностях. Вне зависимости от того, насколько соответствует истине мечта Гамильтона, те или иные связи между гиперкомплексными алгебрами, геометрией и физикой представляются интересным объектом изучения.

Статья состоит из двух частей. В первой части кратко представлена мотивировка и предмет исследования, вводятся основные математические конструкции (см. также [1,2]). Во второй показываются некоторые возможности для применения данного аппарата в физике, прежде всего в теории поля.

Статья поступила в редакцию 28 июля 2009 г.

Авторам приятно выразить свою признательность Ю. П. Рыбакову, И. В. Воловичу, С. С. Кокареву (участникам семинара отдела математической физики МИРАН) за ценное обсуждение.

2. Алгебры и полинормы

2.1. Кватернионы и бикватернионы: краткая сводка

Кватернионы H (см., например, [3]) — это ближайшее обобщение комплексных чисел. Они были придуманы У. Гамильтоном в 1843 г. для описания вращений 3-мерного пространства (подобно тому, как комплексные числа могут служить для описания преобразований плоскости). Кватернионы есть гиперкомплексные числа размерности 4

$$\mathbf{a} = a_0 1 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3, \tag{1}$$

где a_i — вещественные числа, а орты $\mathbf{q}_i$ перемножаются согласно правилу умножения

$$1\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k 1 = \mathbf{q}_k, \quad \mathbf{q}_j\mathbf{q}_k = -\delta_{jk}1 + \varepsilon_{jkn}\mathbf{q}_n,$$

где δ_{jk} и ε_{jkn} — символы Кронекера и Леви–Чивиты ($j, k, n = 1, 2, 3$). Умножение кватернионов некоммутативно, но ассоциативно (т. е. не зависит от расстановки скобок).

Кроме умножения и сложения, на кватернионах подобно комплексным числам определена важная операция сопряжения

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3. \tag{2}$$

Кватернионное сопряжение является инволюцией, линейно и переставляет порядок сомножителей, т. е. является антиавтоморфизмом:

$$\bar{\bar{\mathbf{a}}} = \mathbf{a}, \quad \overline{\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}} = \lambda\bar{\mathbf{a}} + \mu\bar{\mathbf{b}}, \quad \overline{\mathbf{ab}} = \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}$$

(λ, μ — вещественные числа). Благодаря этим свойствам следующие выражения не меняются при сопряжении:

$$\mathrm{Re}\,(\mathbf{a}) = 1/2(\mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}}) \quad \text{(реальная часть)},$$
$$N_r(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{a}}, \quad N_l(\mathbf{a}) \equiv N_r(\bar{\mathbf{a}}) = \bar{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{a} \quad \text{(правая и левая 2-нормы)}.$$

При этом $\mathrm{Re}\,(\bar{\mathbf{a}}) \equiv \mathrm{Re}\,(\mathbf{a})$; левая и правая нормы совпадают (это свойство выполняется не во всех алгебрах):

$$N_r(\mathbf{a}) = N_l(\mathbf{a}) \equiv N(\mathbf{a}) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Отсюда видно, что норма кватернионов положительно определена, а их метрика имеет сигнатуру $+4$. Самое замечательное в кватернионах — мультипликативность их нормы: норма произведения кватернионов равна произведению их норм.

$$N(\mathbf{ab}) = N(\mathbf{a})N(\mathbf{b}). \tag{3}$$

Этот факт лежит в основе геометрических интерпретаций кватернионов; кроме этого, благодаря нему для вещественных чисел имеет место замечательное тождество четырёх квадратов: правильно записанное произведение сумм четырёх квадратов есть снова сумма четырёх квадратов.

Уникальность кватернионов вытекает из классических теорем об исключительных алгебрах (см. [3–5]). Высшая из исключительных алгебр — алгебра октав размерности 8 также обладает положительно определённой (сигнатура метрики $+8$) и мультипликативной нормой. Однако алгебра октав уже не ассоциативна, что затрудняет её применение в геометрии и физике. Сохраняется лишь ослабленная ассоциативность (*альтернативность*): в октавах любые два элемента порождают ассоциативную подалгебру. Октавы связаны с исключительными группами Ли, значение которых для физики в последнее время растёт, и с наиболее глубокими областями проективной геометрии [6, 7]. В целом, роль октав в физике остаётся не вполне прояснённой. Октавы и свойство альтернативности будут затронуты в данной статье лишь для прояснения общей теории и особенностей кватернионов и бикватернионов.

Бикватернионы B есть кватернионы, определённые над полем комплексных чисел ($\mathbf{i_0}^2 = -1$). В связи с этим эти числа можно по-прежнему записывать в виде (1), имея в виду под коэффициентами a_i уже комплексные числа. Однако, в статье будет принята более свободная трактовка бикватернионов как 8-мерной алгебры над полем вещественных чисел, состоящей из двух блоков:

$$\mathbf{a} = a + k \cdot \mathbf{i}_0,$$

или в развёрнутой записи

$$\mathbf{a} = a_0 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 + k_0\mathbf{i}_0 + k_1\mathbf{i}_1 + k_2\mathbf{i}_2 + k_3\mathbf{i}_3,$$

где a, k — кватернионы с вещественными коэффициентами. $\mathbf{i}_0$ является внешней единицей, коммутирующей с кватернионами a, k, $\mathbf{i}_0^2 = -1$; единицы $\mathbf{i}_j$ — результат внешнего (тензорного) произведения $\mathbf{i}_0 \otimes \mathbf{q}_j$. Отсюда вытекает правило умножения бикватернионов в блочном и табличном виде (левый верхний угол заодно представляет таблицу умножения кватернионов):

$$(a + k \cdot \mathbf{i}_0)(b + l \cdot \mathbf{i}_0) = ab - kl + (al + kb) \cdot \mathbf{i}_0.$$

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$
$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	-1	$-\mathbf{q}_1$	$-\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$
$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{q}_1$	1	$-\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$
$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	1	$-\mathbf{q}_1$
$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$-\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_1$	1

($Tab.$ 1)

2.2. 2-норма и система сопряжений для бикватернионов

Ключ к пониманию свойств гиперкомплексной алгебры — не столько таблица умножения, сколько система заданных на ней сопряжений. Учитывая, что бикватернионы представляют собой прямо удвоенные кватернионы, аналогичное *кватернионное сопряжение* $\bar{\mathbf{a}}$ для них можно ввести по очевидному правилу:

$$\begin{gathered} \bar{\mathbf{a}} = \alpha_0 - \alpha_1\mathbf{q}_1 - \alpha_2\mathbf{q}_2 - \alpha_3\mathbf{q}_3, \text{ (запись с комплексными коэффициентами)}, \\ \bar{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3 + k_0\mathbf{i}_0 - k_1\mathbf{i}_1 - k_2\mathbf{i}_2 - k_3\mathbf{i}_3, \\ \text{(полная запись с вещественными коэффициентами)}, \\ \bar{\mathbf{a}} = \overline{a + k \cdot \mathbf{i}_0} = \bar{a} + \bar{k} \cdot \mathbf{i}_0 \quad \text{(сокращённая запись)}. \end{gathered} \tag{4}$$

С помощью данного сопряжения на алгебре бикватернионов можно определить квадратичную 2-норму, которая теперь будет не вещественным, а комплексным числом:

$$N_2(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a}. \tag{5}$$

В покомпонентном виде 2-норма бикватернионов равна:

$$N_2(\mathbf{a}) = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ - k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2) + 4\mathbf{i}_0(a_0k_0 + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3). \tag{6}$$

Комплексная 2-норма в алгебре бикватернионов, а равно и её аналог в алгебре биоктав (комплексных октав), также обладает замечательным свойством мультипликативности (3). На её основе можно ввести и вещественную псевдонорму 4 порядка, которая наследует свойство мультипликативности (см. ниже, а также [1, 2]).

Для построения и изучения 4-нормы и 4-скалярного произведения в алгебре бикватернионов одного базового кватернионного сопряжения недостаточно. Введём поэтому второе, *дуальное кватернионное сопряжение* (записи в той же последовательности, что и в (4)):

$$\begin{gathered}
\widetilde{\mathbf{a}} = \alpha_0^* - \alpha_1^*\mathbf{q}_1 - \alpha_2^*\mathbf{q}_2 - \alpha_3^*\mathbf{q}_3, \\
\widetilde{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3 - k_0\mathbf{i}_0 + k_1\mathbf{i}_1 + k_2\mathbf{i}_2 + k_3\mathbf{i}_3, \\
\widetilde{\mathbf{a}} = \widetilde{a + k} \cdot \mathbf{i}_0 = \bar{a} - \bar{k} \cdot \mathbf{i}_0.
\end{gathered} \tag{7}$$

Преобразование $\widetilde{\mathbf{a}}$ (7) также может считаться сопряжением, поскольку, как и $\bar{\mathbf{a}}$ (4), является инволюционным антиавтоморфизмом. Однако в отличие от базового сопряжения, $\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}} \neq \widetilde{\mathbf{a}}\mathbf{a}$.

Теперь рассмотрим комбинацию сопряжений $\bar{\widetilde{\mathbf{a}}}$:

$$\begin{gathered}
\bar{\widetilde{\mathbf{a}}} = a_0^* + a_1^*\mathbf{q}_1 + a_2^*\mathbf{q}_2 + a_3^*\mathbf{q}_3, \\
\bar{\widetilde{\mathbf{a}}} = a_0 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 - k_0\mathbf{i}_0 - k_1\mathbf{i}_1 - k_2\mathbf{i}_2 - k_3\mathbf{i}_3, \\
\bar{\widetilde{\mathbf{a}}} = \overline{\widetilde{a + k} \cdot \mathbf{i}_0} = a - k \cdot \mathbf{i}_0.
\end{gathered} \tag{8}$$

Отсюда видно, что преобразование $\bar{\widetilde{\mathbf{a}}}$ есть *комплексное сопряжение*, внешнее для кватернионов a, k. Обозначим его $\mathbf{a}^*$. Оно является инволюцией и автоморфизмом (а не антиавтоморфизмом):

$$(\mathbf{a}^*)^* = \mathbf{a} \quad \text{и} \quad (\mathbf{ab})^* = \mathbf{a}^*\mathbf{b}^*. \tag{9}$$

Важное преимущество базового сопряжения $\bar{\mathbf{a}}$ (4) перед дуальным сопряжением $\widetilde{\mathbf{a}}$ в том, что гиперкомплексные числа, инвариантные относительно основного сопряжения $\bar{\mathbf{a}}$ (их можно назвать *реальными* относительно него), содержат в себе только орты 1 и $\mathbf{i_0}$ и поэтому, подобно вещественным числам, коммутируют с любыми числами алгебры. Данное свойство базового кватернионного сопряжения $\bar{\mathbf{a}}$ и является источником ряда хороших свойств алгебр кватернионов, бикватернионов, октав и биоктав. Лишь немногие алгебры располагают таким «хорошим» сопряжением, которое называют *скалярным*, или *центральным*. Алгебры с центральным сопряжением и их основные свойства изучены в [1, 2].

2.3. 2-скалярное и 2-векторное произведения в алгебрах H и B

Ниже понадобятся не только 2-норма (5), (6), но и другие квадратичные конструкции для алгебр кватернионов H и бикватернионов B. Введём *2-скалярное произведение* (для бикватернионов оно является не вещественным, а комплексным числом):

$$N(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = N(\mathbf{a}) + N(\mathbf{b}) + 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \tag{10}$$

и следовательно

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}\big(N(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - N(\mathbf{a}) - N(\mathbf{b})\big). \tag{11}$$

С очевидностью, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = N(\mathbf{a})$. 2-скалярное произведение легко выразить напрямую через операции алгебры:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \operatorname{Re}(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}) = 1/2(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}} + \mathbf{b}\bar{\mathbf{a}}) = \operatorname{Re}(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = 1/2(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b} + \bar{\mathbf{b}}\mathbf{a}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}),$$

т.е. в силу свойств 2-нормы на алгебрах H и B левое и правое скалярное произведение совпадают.

Введём теперь *левое (l) и правое (r) векторные произведения*; это уже не числа, а элементы алгебры кватернионов или бикватернионов:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_l \equiv \mathrm{Im}\,(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = 1/2(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}\mathbf{a}), \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_r \equiv \mathrm{Im}\,(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}) = 1/2(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}} - \mathbf{b}\bar{\mathbf{a}}).$$

С очевидностью, $\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle = -\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle, \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_r = \langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle_l.$

Отметим, что для векторных произведений $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \neq \langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle$ или $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_r \neq \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_l$. Однако, как показано в работе [2], в алгебрах H и B выполняется: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 = \langle \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}} \rangle^2$, т. е. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_r^2 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_l^2$.

В алгебрах кватернионов и бикватернионов верно тождество

$$N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2. \tag{12}$$

Далее, если не указан индекс r или l, будет иметься в виду правое векторное произведение.

2.4. Гиперкомплексные алгебры и физика [7, 8]

Применение гиперкомплексных алгебр в физике пока что носит скорее эпизодический, чем систематический характер. Отметим наиболее важные моменты.

– Кватернионы и 3-мерные вращения.
  Кватернионы — обёртывающая алгебра для алгебры Ли группы 3-мерных вращений $SO(3)$. Группа автоморфизмов кватернионов $SU(2)$ локально изоморфна этой группе. Как следствие, кватернионы — естественный язык для машинного моделирования поворотов, для описания вращений твёрдого тела и для ньютоновой механики в целом. Соответствующая конструкция, так называемая «теория винтов», была впервые создана У. Клиффордом, А. П. Котельниковым и Э. Штуди [9–12].
– Бикватернионы и группа Лоренца.
  Бикватернионы — обёртывающая алгебра для алгебры Ли группы Лоренца $SO(1, 3)$. Группа автоморфизмов бикватернионов $SL(2, C)$ локально изоморфна этой группе. Как следствие, многие результаты частной теории относительности могут быть довольно органично записаны на языке бикватернионов [7, 8].
– Аналитические функции от бикватернионов и уравнения Максвелла.
  Прямолинейные попытки создать аналог теории функций комплексных переменных для кватернионов или бикватернионов не проходят, что связано с их некоммутативностью (см. [13]). Швейцарским математиком Фютером был предложен более тонкий вариант введения аналитичных кватернионных и бикватернионных функций от переменных того же рода, который стал фактически стандартным (хотя есть и несколько других, менее известных вариантов, см. например [14]). Уравнения Фютера, выражающие условие аналитичности бикватернионных переменных, совпали с уравнениями Максвелла (см. [8]).
– Бикватернионы и матрицы Паули.
  Матрицы Паули, рассматриваемые с алгебраической точки зрения, изоморфны бикватернионам. Уже одно это показывает связь этой алгебры с квантовой механикой, в частности, с теорией спиноров.

Во всех известных успешных результатах никак не используется тот факт, что алгебра бикватернионов обладает вещественной нормой 4 порядка. В связи с этим возникает основной вопрос: сколь много может дать учёт этого факта, т. е. введение в рассмотрение полинорм сверх обычных квадратичных норм.

Отметим, что вопрос о применении полинорм в физике независимо ставился в работах Д. Г. Павлова и его группы ([15] и др.). Однако перспектива применения в физике изучаемых ими коммутативно-ассоциативных гиперкомплексных алгебр выглядит неясной.

2.5. Нормы выше квадратичных — за и против

Отметим наиболее распространённые соображения против использования в геометрии и физике псевдонорм степени выше 2:

- Аргумент максимальной подвижности, выдвинутый Гельмгольцем и Ли: только в пространствах с квадратичной метрикой возможно вращение твёрдых тел, в прочих пространствах группа движений с фиксированной точкой беднее [16]. Аргумент не имеет решающей силы с позиций релятивистской и квантовой физики.
- Все классические простые группы Ли есть, как известно, группы инвариантности той или иной квадратичной формы. При этом все простые группы известны (перечислены в полной классификации Картана), а остальные невырожденные непрерывные группы сводятся к ним. Поскольку геометрии согласно Эрлангенской программе Клейна связаны с теми или иными группами, формы степени выше 2 выглядят излишними.

Можно выдвинуть и контраргументы в пользу использования полинорм:

- В современной физике применяются не только простые, но и полупростые группы (прямые произведения простых групп), а они приводят к формам выше квадратичных.
- Представления одной и той же абстрактной группы могут сильно отличаться по своим геометрическим характеристикам. Есть ситуации, когда группа, оставляющая инвариантной квадратичную форму в некотором пространстве, вместе с тем действует и как группа преобразований в совершенно другом пространстве (иной размерности), оставляя в нем инвариантной форму более высокой размерности, например, 4. С точки зрения абстрактной алгебры достаточно изучить лишь первый случай, второй излишен. С геометрической и физической точки зрения это не так, поскольку ситуации существенно различаются.

Главная проблема в том, что переход к алгебрам с псевдонормой (формой) выше квадратичной открывает слишком много степеней свободы. Чтобы нащупать какой-то ясный путь, имеет смысл и здесь действовать в духе программы Гамильтона, рассматривая не все алгебры, а прежде всего чем-то замечательные, выделяющиеся среди прочих. Иначе говоря, нужно найти и использовать какие-либо жёсткие ограничения, исключительности в алгебрах выше квадратичных.

Самое очевидное ограничение даёт идея распространить на полинормы условие мультипликативности 2-нормы $N(a \cdot b) = N(a)N(b)$. Это условие не только ограничивает круг допустимых алгебр, но и естественным образом связывает псевдонорму (форму) с умножением алгебры.

2.6. Мультипликативные полинормы

В 1950–60-х гг. вопрос о мультипликативности форм степени выше 2 поставил и решил Р. Д. Шафер [17–19] (с дополнениями К. МакКриммона [20]), показав, что невырожденные мультипликативные псевдонормы можно построить только над альтернативными (в частности, ассоциативными) алгебрами.

Пусть V — векторное пространство, возможно ∞-мерное, над полем F характеристики 0 или $p > n$. Отображение $\mathbf{u} \to N(\mathbf{u})$ V на F называется *формой степени n* на V в случае $N(\lambda\mathbf{u}) = \lambda^n N(\mathbf{u})$ для любых $\lambda \in F$, $\mathbf{u} \in V$.

Теорема 1 (Шафера). *Пусть $\mathbb{U}$ — алгебра с единицей, вообще говоря бесконечномерная, над полем F характеристики 0 или $p > n$. Необходимое и достаточное условие для существования на $\mathbb{U}$ невырожденной формы N степени $n > 0$, допускающей композицию, состоит в том, что $\mathbb{U}$ является конечномерной сепарабельной альтернативной алгеброй $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{U}_r$, $\mathbb{U}_i$ — простые алгебры степени m_i, где $n = m_1 f_1 + \ldots + m_r f_r$, удовлетворяется для положительных целых чисел f_i $(i = 1, \ldots, r)$. Более того, форма N на $\mathbb{U}$ задаётся посредством*

$$N(\mathbf{u}) = [n_1(u_1)]^{f_1} \cdots [n_r(u_r)]^{f_r},$$

где $n_j(u_j)$ — форма, заданная на простой алгебре $\mathbb{U}_j$.

Здесь существенным является понятие *невырожденности* нормы степени n, которое вводится так:

1) С каждой n-нормой связывается n-линейная форма *n-скалярного произведения* от n гиперкомплексных чисел по формуле Шафера:

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = \frac{1}{n!}\left[N\left(\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n\right) - \sum_{i=1}^{n} N\left(\mathbf{u}_1 + \ldots + \check{\mathbf{u}}_i + \ldots + \mathbf{u}_n\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i<j} N\left(\mathbf{u}_1 + \ldots + \check{\mathbf{u}}_i + \ldots + \check{\mathbf{u}}_j + \ldots + \mathbf{u}_n\right) - \ldots + (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} N(\mathbf{u}_i)\right], \quad (13)$$

где запись $\check{\mathbf{u}}_i$ означает, что $\mathbf{u}_i$ опущен. Легко видеть, что $N_n(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u})$, поскольку $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^k (n-k)^n = n!$

Форма $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ имеет все свойства, которые естественно ожидать от обобщения понятия скалярного произведения. Она вещественна, симметрична относительно любых перестановок векторов, линейна по каждому из них (в частности, обращается в нуль, если один из векторов равен нулю). Более точно называть эту форму n-псевдоскалярным произведением, так как она в общем случае не является положительно определённой.

2) По определению Шафера, формы степени n называются *невырожденными* в случае, если из условия $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = 0$ для всех $\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ вытекает $\mathbf{u}_1 = 0$.

Условие мультипликативности полинорм вместе с их невырожденностью вносит важное конструктивное ограничение, облегчающее применение гиперкомплексных алгебр в геометрии и физике [1, 2].

2.7. 4-норма и четырёхскалярное произведение для бикватернионов

Мультипликативные вещественные 4-нормы в алгебрах бикватернионов и биоктав строятся очевидным образом на основе также мультипликативных комплексных норм 2 порядка [1, 2]. В самом деле, умножив комплексную 2-норму на сопряжённое комплексное число, мы получим вещественное число с наследуемым свойством мультипликативности:

$$N_4(\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a})^* = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\left(\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\right)^* = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}^*\bar{\mathbf{a}}^* = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a}^*). \quad (14)$$

Здесь $*$ — комплексное или двойное сопряжение $(\mathbf{ab})^* = \mathbf{a}^*\mathbf{b}^*$, см. (8) из раздела 2.2.

В сокращённом (блочном) виде 4-норма для алгебр бикватернионов равна:

$$N_4(\mathbf{a}) = N_4(a + k\cdot\mathbf{i}_0) = (N_2(a) - N_2(k))^2 + 4(a, k)^2. \quad (15)$$

В покомпонентном виде 4-норма бикватернионов принимает вид:

$$N_4(\mathbf{a}) = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \; - k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2)^2 \; + 4(a_0k_0 + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3)^2. \quad (16)$$

С очевидностью, 4-норма неотрицательна. Но она не является положительно определённой (и не может являться в силу теоремы Фробениуса): из факта $N_4(\mathbf{a}) = 0$ не следует $\mathbf{a} = 0$. Именно поэтому более корректно говорить о *псевдонормах.* Как легко видеть, чтобы занулить 4-норму, нужно взять k равным по 2-норме a, и при этом перпендикулярным ему: $(a, k) = 0$. Например, $a = 3\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_3,\; k = 2\mathbf{i}_0 + 3\mathbf{i}_2$.

Формула мультипликативности 4-нормы алгебры бикватернионов в кватернионной записи выглядит так (с помощью (10) и ряда других кватернионных тождеств её можно доказать и напрямую):

$$\Big((N_2(a)-N_2(k))^2+4(a,k)^2\Big)\cdot\Big((N_2(b)-N_2(l))^2+4(b,l)^2\Big)=$$
$$=(N_2(ab-kl)-N_2(al+kb))^2+4\,(ab-kl,\ al+kb)^2\,.$$

Это тождество можно записать и проверить в вещественных числах. Подобно формулам суммы квадратов, это тождество, случайное для вещественных чисел, отражает существование алгебры бикватернионов.

Для бикватернионов 4-норма, как можно показать, может быть представлена в ином виде [2], использующем дуальное сопряжение (7):

$$N_4(\mathbf{a})=\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}\,(\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}})^*,$$

$$N_4(\mathbf{a})=N_4(a+k\cdot\mathbf{i}_0)=(N_2(a)+N_2(k))^2+4\langle k,a\rangle^2,$$
$$(N_2(a)-N_2(k))^2+4(a,k)^2=(N_2(a)+N_2(k))^2+4\langle k,a\rangle^2. \tag{17}$$

Зная 4-норму, можно ввести *обратный элемент* для алгебры бикватернионов. В самом деле, поскольку $N_4(\mathbf{a})=N_2(\mathbf{a})N_2^*(\mathbf{a})=\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}N_2^*(\mathbf{a})$, $N_4(\bar{\mathbf{a}})=\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}N_2^*(\bar{\mathbf{a}})$, $N_4(\bar{\mathbf{a}})=N_4(\mathbf{a})$, то правый и левый обратный элементы (они, конечно, существуют не всегда) равны

$$\mathbf{a}_r^{-1}=\frac{\bar{\mathbf{a}}N_2^*(\mathbf{a})}{N_4(\mathbf{a})}=\frac{\bar{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{a}^*\bar{\mathbf{a}}^*}{N_4(\mathbf{a})},\quad \mathbf{a}_l^{-1}=\frac{N_2^*(\bar{\mathbf{a}})\bar{\mathbf{a}}}{N_4(\mathbf{a})}\equiv\mathbf{a}_r^{-1}. \tag{18}$$

Поскольку $N_2(\bar{\mathbf{a}})=N_2(\mathbf{a})$, то правый и левый обратные элементы совпадают. Таким образом, обратный элемент существует для каждого элемента с ненулевой 4-нормой алгебры B.

4-скалярное произведение вводится посредством формулы Шафера (13), которая для случая $n=4$ выглядит так:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})=\frac{1}{24}\big[N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})-N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})-N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{d})-N_4(\mathbf{a}+\mathbf{c}+\mathbf{d})-$$
$$-N_4(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})\ +N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b})+N_4(\mathbf{a}+\mathbf{c})+N_4(\mathbf{b}+\mathbf{c})+N_4(\mathbf{a}+\mathbf{d})+$$
$$+N_4(\mathbf{b}+\mathbf{d})+N_4(\mathbf{c}+\mathbf{d})\ -N_4(\mathbf{a})-N_4(\mathbf{b})-N_4(\mathbf{c})-N_4(\mathbf{d})\big].$$

Принимая во внимание формулу, выражающую для алгебры бикватернионов 4-норму через 2-норму (14), и выражая 2-норму суммы через 2-скалярное произведение согласно (10), получаем после ряда упрощений формулу 4-скалярного произведения для алгебры B:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})=\frac{1}{6}\big[(\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{c}^*,\mathbf{d}^*)+(\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b}^*,\mathbf{d}^*)+(\mathbf{a},\mathbf{d})(\mathbf{b}^*,\mathbf{c}^*)+$$
$$+(\mathbf{c},\mathbf{d})(\mathbf{a}^*,\mathbf{b}^*)+(\mathbf{b},\mathbf{d})(\mathbf{a}^*,\mathbf{c}^*)+(\mathbf{b},\mathbf{c})(\mathbf{a}^*,\mathbf{d}^*)\big].$$

2.8. Четырёхвекторное произведение для бикватернионов и биоктав

Имеет смысл пойти дальше результатов Шафера и обобщить не только скалярное, но и векторное произведение. Для алгебр бикватернионов, биоктав и им подобным четырёхвекторное произведение можно предложить на основе следующей формулы:

$$\langle\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\rangle=\frac{1}{6}\big[\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle\langle\mathbf{c}^*,\mathbf{d}^*\rangle+\langle\mathbf{a},\mathbf{c}\rangle\langle\mathbf{d}^*,\mathbf{b}^*\rangle+\langle\mathbf{a},\mathbf{d}\rangle\langle\mathbf{b}^*,\mathbf{c}^*\rangle+$$

$$+ \langle \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle\langle \mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*\rangle + \langle \mathbf{d}, \mathbf{b}\rangle\langle \mathbf{a}^*, \mathbf{c}^*\rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle\langle \mathbf{a}^*, \mathbf{d}^*\rangle\big].$$

Как легко видеть, 4-векторное произведение полностью антисимметрично относительно перестановок в любой паре векторов. Как и 2-векторное произведение, это не вещественное число, а гиперкомплексный вектор. В отличие от мнимого 2-векторного произведения 4-векторное произведение реально относительно базового сопряжения $\bar{\mathbf{r}}$ (и содержит поэтому только орты 1 и $\mathbf{i}_0$). Можно показать, что если половина степени нормы $n/2$ — чётное число, то n-векторное произведение будет реальным, при нечётным $n/2$ — мнимым (так, мнимо 2-векторное произведение кватернионов).

Если образовать 4-векторное произведение из кватернионов (алгебры с нормой степени 2, а не 4), получится вещественное число с ясным геометрическим смыслом. Оно равно детерминанту матрицы, составленной из координат всех 4 векторов:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, 4-векторное произведение для кватернионов равно 4-объёму параллелепипеда, натянутого на четыре вектора, т. е. совпадает с смешанным произведением 4 порядка.

Пока совершенно неясно, найдёт ли 4-векторное произведение применение в физике.

2.9. Основные конструкции в матричном представлении

Для приложения введённых выше конструкций в геометрии и физике целесообразно представить их в матричном виде. Бикватернионы имеют точное матричное представление посредством комплексных матриц 2×2. Это представление известно как алгебра матриц Паули

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{i}_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \quad \mathbf{i}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{i}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{i}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В данном представлении бикватернион

$$\mathbf{a} = a_0 \cdot 1 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 + k_0\mathbf{i}_0 + k_1\mathbf{i}_1 + k_2\mathbf{i}_2 + k_3\mathbf{i}_3$$

записывается так:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + k_3 - ia_3 + ik_0 & -ia_1 - a_2 + k_1 - ik_2 \\ -ia_1 + a_2 + k_1 + ik_2 & a_0 - k_3 + ia_3 + ik_0 \end{pmatrix}.$$

Бикватернионному сопряжению (4)

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 \cdot 1 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3 + k_0\mathbf{i}_0 - k_1\mathbf{i}_1 - k_2\mathbf{i}_2 - k_3\mathbf{i}_3$$

соответствует присоединённая матрица

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - k_3 + ia_3 + ik_0 & ia_1 + a_2 - k_1 + ik_2 \\ ia_1 - a_2 - k_1 - ik_2 & a_0 + k_3 - ia_3 + ik_0 \end{pmatrix}.$$

2-норма бикватерниона, понимаемая как комплексное число, равна детерминанту его матрицы, а с другой стороны, она может быть выражена через произведение матрицы бикватерниона на присоединённую ($\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}' = \operatorname{Det}\mathbf{A}\cdot I$):

$$N_2(\mathbf{a}) = \operatorname{Det}\mathbf{A} = \frac{1}{2}\operatorname{Sp}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}').$$

Отсюда 2-скалярное произведение (комплексное число) есть:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{1}{4}\operatorname{Sp}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}' + \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}').$$

Правое 2-векторное произведение (элемент алгебры бикватернионов) есть:

$$\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}' - \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}').$$

Дуальному кватернионному сопряжению (7)

$$\widetilde{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3 - k_0\mathbf{i}_0 + k_1\mathbf{i}_1 + k_2\mathbf{i}_2 + k_3\mathbf{i}_3$$

соответствует эрмитово-сопряжённая матрица

$$\mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + k_3 + ia_3 - ik_0 & ia_1 + a_2 + k_1 - ik_2 \\ ia_1 - a_2 + k_1 + ik_2 & a_0 - k_3 - ia_3 - ik_0 \end{pmatrix}.$$

Внешнему для кватернионов комплексному сопряжению (8), равному комбинации сопряжений (4) и (7) $\bar{\widetilde{\mathbf{a}}}$,

$$\bar{\widetilde{\mathbf{a}}} = \mathbf{a}^\star = a_0 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 - k_0\mathbf{i}_0 - k_1\mathbf{i}_1 - k_2\mathbf{i}_2 - k_3\mathbf{i}_3$$

соответствует матрица

$$\mathbf{A}'^+ = \mathbf{A}^\star = \begin{pmatrix} a_{22}^* & -a_{21}^* \\ -a_{12}^* & a_{11}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - k_3 - ia_3 - ik_0 & -ia_1 - a_2 - k_1 + ik_2 \\ -ia_1 + a_2 - k_1 - ik_2 & a_0 + k_3 + ia_3 - ik_0 \end{pmatrix}.$$

Как следствие, 4-норма равна

$$N_4(\mathbf{a}) = \frac{1}{4}\operatorname{Sp}(\mathbf{A}\mathbf{A}')[\operatorname{Sp}(\mathbf{A}\mathbf{A}')]^* = \frac{1}{4}\operatorname{Sp}(\mathbf{A}\mathbf{A}')\operatorname{Sp}(\mathbf{A}^\star\mathbf{A}^{\star\prime}),$$

а 4-скалярное произведение есть

$$\begin{aligned}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) = \frac{1}{96}\big[&\operatorname{Sp}(\mathbf{A}\mathbf{B}' + \mathbf{B}\mathbf{A}')\operatorname{Sp}(\mathbf{C}^\star\mathbf{D}^{\star\prime} + \mathbf{D}^\star\mathbf{C}^{\star\prime}) + \\ &+ \operatorname{Sp}(\mathbf{A}\mathbf{C}' + \mathbf{C}\mathbf{A}')\operatorname{Sp}(\mathbf{B}^\star\mathbf{D}^{\star\prime} + \mathbf{D}^\star\mathbf{B}^{\star\prime}) + \operatorname{Sp}(\mathbf{A}\mathbf{D}' + \mathbf{D}\mathbf{A}')\operatorname{Sp}(\mathbf{B}^\star\mathbf{C}^{\star\prime} + \mathbf{C}^\star\mathbf{B}^{\star\prime}) + \\ &+ \operatorname{Sp}(\mathbf{C}\mathbf{D}' + \mathbf{D}\mathbf{C}')\operatorname{Sp}(\mathbf{A}^\star\mathbf{B}^{\star\prime} + \mathbf{B}^\star\mathbf{A}^{\star\prime}) + \operatorname{Sp}(\mathbf{B}\mathbf{D}' + \mathbf{D}\mathbf{B}')\operatorname{Sp}(\mathbf{A}^\star\mathbf{C}^{\star\prime} + \mathbf{C}^\star\mathbf{A}^{\star\prime}) + \\ &+ \operatorname{Sp}(\mathbf{B}\mathbf{C}' + \mathbf{C}\mathbf{B}')\operatorname{Sp}(\mathbf{A}^\star\mathbf{D}^{\star\prime} + \mathbf{D}^\star\mathbf{A}^{\star\prime})\big].\end{aligned}$$

Все формулы значительно упрощаются в важном для приложений случае чисто мнимых бикватернионов с шестью ненулевыми компонентами ($a_0 = k_0 = 0$). В этом случае $\bar{\mathbf{a}} = -\mathbf{a}$, $\mathbf{a}^\star = -\widetilde{\mathbf{a}}$, т. е. $\mathbf{A}' = -\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^\star = -\mathbf{A}^+$. Тогда 2-норма, 2-скалярное и 2-векторное произведения есть:

$$N_2(\mathbf{a}) = -\mathbf{a}^2 = -\frac{1}{2}\operatorname{Sp}(\mathbf{A}^2), \quad (\mathbf{a},\mathbf{b}) = -\frac{1}{4}\operatorname{Sp}(\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{A}),$$
$$\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = \frac{1}{2}(\mathbf{B}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{B}) = \frac{1}{2}[\mathbf{B},\mathbf{A}], \tag{19}$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 = -N_2(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) = \frac{1}{8} \mathrm{Sp}\,([\mathbf{A}, \mathbf{B}]^2) \qquad (20)$$

($[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ — коммутатор матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}$). 4-норма и 4-скалярное произведение в данном случае равны

$$N_4(\mathbf{a}) = \frac{1}{4} \mathrm{Sp}\,(\mathbf{A}^2) \mathrm{Sp}\,(\mathbf{A}^{+2}),$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \frac{1}{96}\big[&\mathrm{Sp}\,(\mathbf{AB} + \mathbf{BA})\,\mathrm{Sp}\,(\mathbf{C}^+\mathbf{D}^+ + \mathbf{D}^+\mathbf{C}^+) + \\ &+ \mathrm{Sp}\,(\mathbf{AC} + \mathbf{CA})\,\mathrm{Sp}\,(\mathbf{B}^+\mathbf{D}^+ + \mathbf{D}^+\mathbf{B}^+) + \mathrm{Sp}\,(\mathbf{AD} + \mathbf{DA})\,\mathrm{Sp}\,(\mathbf{B}^+\mathbf{C}^+ + \mathbf{C}^+\mathbf{B}^+) + \\ &+ \mathrm{Sp}\,(\mathbf{CD} + \mathbf{DC})\,\mathrm{Sp}\,(\mathbf{A}^+\mathbf{B}^+ + \mathbf{B}^+\mathbf{A}^+) + \mathrm{Sp}\,(\mathbf{BD} + \mathbf{DB})\,\mathrm{Sp}\,(\mathbf{A}^+\mathbf{C}^+ + \mathbf{C}^+\mathbf{A}^+) + \\ &+ \mathrm{Sp}\,(\mathbf{BC} + \mathbf{CB})\,\mathrm{Sp}\,(\mathbf{A}^+\mathbf{D}^+ + \mathbf{D}^+\mathbf{A}^+)\big].\end{aligned}$$

3. Некоторые возможности применения полинорм в физике

Как хорошо известно [8], электромагнитное поле довольно естественно описывается бикватернионными переменными, поэтому здесь логично искать приложение норм 4 порядка и иных конструкций для алгебр с центральным сопряжением.

3.1. 4-форма и элемент массы электромагнитного поля

Введём бикватернион электромагнитного поля

$$\mathbf{F} = \mathbf{q}_1 H_1 + \mathbf{q}_2 H_2 + \mathbf{q}_3 H_3 + \mathbf{i}_1 E_1 + \mathbf{i}_2 E_2 + \mathbf{i}_3 E_3 = \mathbf{H} + \mathbf{i}_0 \mathbf{E} \qquad (21)$$

($\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ — чисто мнимые кватернионы, которые могут рассматриваться просто как 3-векторы напряжённости электрического и магнитного полей). Комплексная 2-норма этого бикватерниона в силу формулы (6) равна

$$\begin{aligned}N_2(\mathbf{F}) = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2 + 2\mathbf{i}_0(H_1E_1 + H_2E_2 + H_3E_3) = \\ = \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2 + 2\mathbf{i}_0(\mathbf{H}, \mathbf{E}) = \mathbf{I}_s + 2 \cdot \mathbf{i}_0 \mathbf{I}_p,\end{aligned}$$

т. е. она составлена из скалярного $\mathbf{I}_s = \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2$ и псевдоскалярного $\mathbf{I}_p = (\mathbf{H}, \mathbf{E})$ инвариантов электромагнитного поля. 4-норма бикватерниона электромагнитного поля (вещественный скаляр) в силу (15), (16) равна

$$\begin{aligned}N_4(\mathbf{F}) = (H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2)^2 + 4(H_1E_1 + H_2E_2 + H_3E_3)^2, \\ N_4(\mathbf{F}) = (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{H}, \mathbf{E})^2 = \mathbf{I}_s^2 + 4\,\mathbf{I}_p^2.\end{aligned} \qquad (22)$$

В переводе на обычный тензорный язык 4-норма есть

$$N_4(\mathbf{F}) = \frac{1}{4}\left((F_{ik}F^{ik})^2 + (\widetilde{F}_{ik}F^{ik})^2\right).$$

Чтобы выявить скрытый физический смысл 4-нормы, используем (17):

$$\begin{aligned}N_4(\mathbf{F}) = (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{E}, \mathbf{H})^2 = (\mathbf{H}^2 + \mathbf{E}^2)^2 + 4\langle \mathbf{H}, \mathbf{E} \rangle^2 \quad \text{или} \\ N_4(\mathbf{F}) = (\mathbf{H}^2 + \mathbf{E}^2)^2 - 4|\langle \mathbf{H}, \mathbf{E} \rangle^2|\end{aligned} \qquad (23)$$

(последний член $\leqslant 0$). Таким образом, 4-норма электромагнитного поля имеет ясный физический смысл: с точностью до коэффициента она равна разности квадратов плотности энергии и плотности импульса поля, т. е. является 2-нормой вектора потока энергии-импульса поля. В связи с этим, 4-норму можно интерпретировать как квадрат *плотности массы поля* (эта плотность $\neq 0$ в силу неаддитивности массы в релятивистской физике). Несложно также показать, что 4-норма электромагнитного поля с точностью до коэффициента равна свёртке тензора энергии-импульса поля с самим собой $T_{ik}T^{ik}$; кроме этого квадрату 4-нормы равен детерминант матрицы тензора энергии-импульса.

3.2. 4-форма и преобразование дуальности электромагнитного поля

Из выражения (23) становится очевидным, что 4-норма электромагнитного поля содержит скрытую симметрию кирального типа $U(1)$. Она инвариантна при замене $\mathbf{E}' = \mathbf{E}\cos\theta + \mathbf{H}\sin\theta$, $\mathbf{H}' = -\mathbf{E}\sin\theta + \mathbf{H}\cos\theta$, или в бикватернионном виде (21): $\mathbf{F}' = (\mathbf{H} + \mathbf{i}_0\mathbf{E})' = \mathbf{F}e^{\mathbf{i}_0\theta}$. Это обобщённое преобразование дуальности, оставляющее, как известно, инвариантными уравнения Максвелла в вакууме и тензор энергии-импульса свободного электромагнитного поля [21]. При наличии зарядов это преобразование надо дополнить заменой $e' = e\cos\theta + g\sin\theta$, $g' = -e\sin\theta + g\cos\theta$, где g — магнитный заряд. Частицы в данном случае несут одновременно оба типа зарядов, что, впрочем, не приводит к нетривиальным экспериментальным последствиям. Таким образом, введение в рассмотрение 4-нормы электромагнитного поля позволяет прояснить природу обобщённой дуальной инвариантности уравнений Максвелла, скрытую при стандартном квадратичном подходе.

3.3. Связь 4-формы с электродинамикой Борна–Инфельда

Выражение (22) 4-нормы электромагнитного поля содержит в качестве одного из своих членов выражение, совпадающее с лагранжианом Максвелла. Что получится, если использовать 4-норму при конструировании лагранжиана поля? Оказывается, это естественным путём ведёт к нелинейной электродинамике Борна–Инфельда. В самом деле, принцип соответствия подсказывает следующий вид модифицированного лагранжиана в первом нетривиальном приближении $L' = L_0 + \Lambda$, где L_0 — лагранжиан Максвелла, а Λ — малая в обычных условиях поправка. Таким образом, модифицированный лагранжиан, использующий 4-норму поля, должен иметь в 1-м постмаксвелловском приближении следующий вид:

$$L' = -\frac{1}{8\pi}\Big[(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) + \alpha\big((\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{H},\mathbf{E})^2\big)\Big], \tag{24}$$

где α — малый параметр. Именно такое приближение даёт электродинамика Борна–Инфельда. В самом деле, лагранжиан здесь, как известно, равен:

$$L = -\frac{1}{4\pi a^2}\Big[\sqrt{1 + a^2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) - a^4(\mathbf{H},\mathbf{E})^2} - 1\Big].$$

Используя разложение корня $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2 - x^2/8$ и сохраняя члены до a^4, получаем следующее соответствие с электродинамикой Максвелла:

$$\begin{aligned} L \approx -\frac{1}{4\pi a^2}\Big(1 + \frac{1}{2}a^2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) - \frac{1}{2}a^4(\mathbf{H},\mathbf{E})^2 - \frac{1}{8}a^4(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 - 1\Big) = \\ = -\frac{1}{8\pi}\Big((\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) - \frac{1}{4}a^2\big((\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{H},\mathbf{E})^2\big)\Big), \end{aligned}$$

т. е. в точности вид (24).

Преобразовав лагранжиан Борна–Инфельда к виду

$$L = -\frac{1}{4\pi a^2}\Big[\sqrt{\big(1+\frac{a^2}{2}(\mathbf{H}^2-\mathbf{E}^2)\big)^2 - \frac{a^4}{4}\big((\mathbf{H}^2-\mathbf{E}^2)^2+4(\mathbf{H},\mathbf{E})^2\big)} - 1\Big] = \\ = -\frac{1}{4\pi a^2}\Big[\sqrt{\big(1+\frac{a^2}{2}L_0\big)^2 - \frac{a^4}{4}N_4(\mathbf{F})} - 1\Big],$$

можно увидеть, что сходная ситуация будет сохраняться во всех порядках: будут комбинироваться 2-норма (лагранжиан Максвелла) и 4-норма электромагнитного поля (22), т. е. скаляры 2-го и 4-го порядка. Заметим, что требование составлять лагранжиан из скаляров 2 и 4 порядка вместе с принципом соответствия жёстко приводит к теории Борна–Инфельда лишь в первом нетривиальном порядке. В следующих порядках этих условий недостаточно, чтобы зафиксировать коэффициенты, т. е. возникает некоторый теоретический произвол (диапазон теорий). Это — принципиальная ограниченность предложенного подхода. Тем не менее, несомненно, что введение в рассмотрение 4-нормы электромагнитного поля выявляет естественность нелинейного обобщения электродинамики в теории Борна–Инфельда.

Важно отметить, что требование использовать алгебраически выделенные 2-норму и 4-норму поля, и в частности вид (24), является более жёстким и содержательным ограничением, чем очевидное требование строить лагранжиан из инвариантов поля. Это можно проиллюстрировать на примере нелинейного лагранжиана Эйлера-Гейзенберга квантовой электродинамики, эффективно учитывающего поляризацию вакуума в случае, когда поля достаточно медленно меняются во времени и пространстве [22]. Лагранжиан Эйлера–Гейзенберга, как известно, может быть выражен с помощью инвариантов электромагнитного поля и в первом постклассическом приближении равен $L' = L_0 + \dfrac{e^4}{45\cdot 8\pi^2 m^4}\big((\mathbf{H}^2-\mathbf{E}^2)^2 + 7(\mathbf{E},\mathbf{H})^2\big)$. Как легко видеть, этот лагранжиан не имеет вида (24).

3.4. О лагранжиане модели Скирма

Ещё один случай, когда алгебраические соображения могут прояснить интуитивным путём полученные физические результаты, даёт модель Скирма [23, 24] ядерных взаимодействий. Т. Скирм создал модель для описания барионов как протяжённых локализованных структур с нетривиальным топологическим зарядом, который интерпретируется как барионное число. Модель оказалась простым и удачным прообразом эффективной мезонной теории (в общем виде до сих пор неизвестной), к которой должна сводиться квантовая хромодинамика в низкоэнергетическом пределе. В этом пределе сильные взаимодействия в значительной мере сводятся к обмену π-мезонами. В рамках модели Скирма удаётся удовлетворительным образом описывать спектроскопию основных состояний адронов и их взаимодействия. Не менее успешно лагранжиан Скирма применяется в физике сплошных сред.

Основной объект модели — *скирмионы* — представляют собой киральные топологические солитоны со спонтанно нарушенной киральной симметрией. Описывающее их киральное поле $U(x)$ принимает значения на полевом многообразии модели $\Phi = S^3 \simeq [SU(2)]$ и параметризуется изовекторным полем $\varphi^a(x)$, соответствующим триплету пионных полей:

$$U(x) = \varphi^0 + i(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\varphi}) = \exp\big[i(n^a\tau^a)\Theta(x)\big];\ n^a = \varphi^a/|\boldsymbol{\varphi}|;\ \sin\Theta = \pm|\varphi|;\ a = 1,2,3, \quad (25)$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, $\boldsymbol{\tau}$ — матрицы Паули, $\Theta(x)$ — киральный угол, $x = (x^0, \boldsymbol{x})$. Поля (25) подчинены естественным граничным условиям на пространственной бесконечности $U(x) \to \boldsymbol{I}$ $\quad(\varphi^a(x) \to 0)$ при $|\boldsymbol{x}| \to \infty$, где $\boldsymbol{I}$ — единичная 2×2 матрица.

Левоинвариантные киральные токи $l_\mu = U^{-1}\partial_\mu U$ принимают значения в алгебре Ли группы $SU(2)$. Динамика модели Скирма определяется плотностью лагранжиана

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4\lambda^2}\mathrm{Sp}\,(l_\mu l^\mu) + \frac{\varepsilon^2}{16}\mathrm{Sp}\,([l_\mu, l_\nu][l^\mu, l^\nu]),$$

где ε, λ — параметры модели. Первый член совпадает с лагранжианом Вайнберга-Гюрши, который в «древесном» приближении хорошо воспроизводит результаты алгебры токов для низкоэнергетической динамики пионов. Второй член 4 порядка отвечает идее Скирма рассматривать барионы как вихри в «пионной жидкости», описываемой «обобщёнными скоростями» l_μ.

Однако поскольку лагранжиан модели Скирма не выводится напрямую из КХД и не является единственным обобщением лагранжиана Вайнберга–Гюрши, возникает вопрос о возможности его обоснования посредством алгебраических соображений.

Как легко видеть, в алгебраическом плане каждая из компонент токов l_μ представляет собой чисто мнимый кватернион. Это означает, что мы имеем дело с тензорным произведением алгебры бикватернионов B (эрмитовы компоненты которой представляются матрицами Паули и отвечают пространству-времени) на алгебру кватернионов H: $B \otimes H$. Такая алгебра не является алгеброй с центральным сопряжением, поэтому здесь приходится расширять технику, изложенную выше. Можно показать, что в общем случае алгебра $B \otimes H$ обладает вещественной формой степени 8. Однако в данном случае ситуация сильно упрощается благодаря тому, что ненулевыми являются только 12 компонент этой алгебры (по 3 чисто мнимых кватерниона на каждую из 4 эрмитовых компонент пространственно-временного бикватерниона). Благодаря этому псевдонорма сводится к форме 4 степени. Опустив промежуточные вычисления, приведём конечный результат — в кватернионной записи 4-форма равна

$$\begin{aligned} N_4 = (|\boldsymbol{l}_0|^2 - |\boldsymbol{l}_1|^2 - |\boldsymbol{l}_2|^2 - |\boldsymbol{l}_3|^2)^2 + \\ + 4\big(\langle \boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3\rangle^2 + \langle \boldsymbol{l}_3, \boldsymbol{l}_1\rangle^2 + \langle \boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2\rangle^2 - \langle \boldsymbol{l}_0, \boldsymbol{l}_1\rangle^2 - \langle \boldsymbol{l}_0, \boldsymbol{l}_2\rangle^2 - \langle \boldsymbol{l}_0, \boldsymbol{l}_3\rangle^2\big). \end{aligned}$$

Используя формулы (19), (20) раздела 2.9, эту 4-форму можно перевести на обычный тензорный язык:

$$N_4 = \frac{1}{4}\big(\mathrm{Sp}\,(l_\mu l^\mu)\big)^2 + \frac{1}{2}\big(\mathrm{Sp}\,([l_\mu, l_\nu][l^\mu, l^\nu])\big).$$

В согласии с принципом соответствия и по аналогии с электродинамикой Борна–Инфельда естественно считать, что лагранжиан модели (в первом постлинейном приближении) должен представлять собой сумму вещественной части псевдонормы 2 порядка $N_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,(l_\mu l^\mu)$ и псевдонормы 4 порядка в качестве малой поправки. Таким образом, лагранжиан в этом приближении должен иметь вид $\mathfrak{L} = N_2 + \alpha N_4$ (α — малый параметр), или

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4\lambda^2}\mathrm{Sp}\,(l_\mu l^\mu) + \frac{\varepsilon^2}{32}\Big(\big(\mathrm{Sp}\,(l_\mu l^\mu)\big)^2 + 2\mathrm{Sp}\,([l_\mu, l_\nu][l^\mu, l^\nu])\Big). \tag{26}$$

Это выражение очень похоже на лагранжиан Скирма, в частности, естественным образом появляется нелинейный «вихревой член». Однако в лагранжиане Скирма нет среднего члена. Поскольку этот член представляет собой квадрат 2-нормы времени-подобного вектора, т. е. дважды-положителен, его добавление, по-видимому, может улучшить свойства модели. Подобный член уже вводился в эффективной мезонной теории (например, [25]), правда, с другими коэффициентами.

Как и в электродинамике Борна–Инфельда, алгебраические соображения вместе с принципом соответствия определяют вид модифицированного лагранжиана Скирма (26) лишь в первом постлинейном порядке. В общем случае лагранжиан может представлять собой некоторую функцию, комбинирующую псевдонормы 2 и 4 порядка, т. е. опять же возникает диапазон теорий. В связи с этим, приведём согласованный с алгебраическими соображениями вид модифицированного лагранжиана в форме, сходной с электродинамикой Борна–Инфельда:

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{\lambda^2}\Big[\sqrt{\Big(1+\frac{1}{2}N_2\Big)^2 - \frac{\varepsilon^2\lambda^2}{4}N_4} - 1\Big] =$$
$$= -\frac{1}{\lambda^2}\Big[\sqrt{\big(1+\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\,(l_\mu l^\mu)\big)^2 - \frac{\varepsilon^2\lambda^2}{16}\Big(\big(\mathrm{Sp}\,(l_\mu l^\mu)\big)^2 + 2\mathrm{Sp}\,([l_\mu, l_\nu][l^\mu, l^\nu])\Big)} - 1\Big].$$

4. Выводы

Поскольку 4-норма для алгебр бикватернионов и биоктав однозначно выражается через 2-норму (которая также является мультипликативной), неясно, насколько существенными будут те новые возможности, которые создаёт переход от комплексной 2-нормы к вещественной 4-норме, а также введение 4-скалярного и 4-векторного произведений. Тем не менее как минимум выявляются некоторые новые связи между уже известными вещами, которые затушёваны при стандартном квадратичном подходе.

В любом случае представляются интересными попытки придать квадраобъектам какой-либо геометрический и физический смысл. Некоторые первые попытки сделать это представлены здесь. При этом возникает новый угол зрения на ряд привычных вопросов. В частности, рассмотрение связанной с бикватернионами вещественной 4-нормы показывает естественность перехода от электродинамики Максвелла к нелинейной электродинамике Борна–Инфельда. Алгебраический подход показывает и естественность добавления предложенного Т. Скирмом нелинейного члена в лагранжиан, описывающий ядерные взаимодействия посредством обмена пионами. При этом выявляется целесообразность введения дополнительного члена в лагранжиан Скирма, что предположительно может улучшить свойства модели. Таким образом, алгебраическое рассмотрение позволяет прояснить интуитивные находки в нелинейных полевых теориях, а также внести в них некоторые дополнительные элементы жёсткости.

Литература

1. *Элиович А. А.* О полинормах на неассоциативных алгебрах и их возможном применении в физике // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. — 2008. — Т. 5, № 2(10). — С. 131–159.
2. *Элиович А. А.* О норме бикватернионов и иных алгебр с центральным сопряжением // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. — 2004. — Т. 1, № 2. — С. 24–50.
3. *Кантор И. Л., Солодовников А. С.* Гиперкомплексные числа. — М.: Наука, 1973. — 144 с.
4. *Розенфельд Б. А., Замаховский М. П.* Геометрия групп Ли. — М.: МЦНМО, 2003.
5. Общая алгебра, Том 1. Справочная математическая библиотека. — М.: Наука, 1990.
6. *Baez J. C.* The Octonions. — arXiv: math-RA/0105155.
7. *Лыхмус Я., Паал Э., Соргесепп Л.* Труды института физики Академии наук Эстонии. — 66. Тарту, 1990. — № 66. — С. 8–22.
8. *Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачёв Е. А.* Кватернионы в релятивистской физике, Изд. 2. — М.: УРСС, 2003. — 200 с.
9. *Clifford W.* Preliminary Sketch of Biquaternions // Proc. of the London Math. Soc. — 1873. — Vol. IV.
10. *Котельников А. П.* Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. — Казань, 1895. — 224 с.

11. *Study E.* Geometry der Dynamen. — Leipzig, 1901, 1903.
12. *Диментберг Ф. М.* Винтовое счисление и его приложения в механике. — М.: Наука, 1965.
13. *Sudbery A.* Quaternionic Analysis // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1979. — Vol. 85. — Pp. 199–225.
14. *Кассандров В. В.* Кватернионный анализ и алгебродинамика // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. — 2006. — Т. 3, № 2(6). — С. 58–84.
15. *Павлов Д. Г.* Четырехмерное время // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. — 2004. — Т. 1, № 1. — С. 33–42.
16. Об основаниях геометрии. Сборник к столетию со дня смерти Лобачевского / под ред. А. П. Нордена. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 532 с.
17. *Schafer R. D.* On Forms of Degree n Permitting Composition // J. Math. Mech. — 1963. — Vol. 12. — Pp. 777–792.
18. *Schafer R. D.* Forms Permitting Composition // Advances in Mathematics. — 1970. — Vol. 4. — Pp. 111–148.
19. *Schafer R. D.* An Introduction to Nonassociative Algebras. — New York: Academic Press, 1967, 1991.
20. *McCrimmon K.* Generically Algebraic Algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1967. — Vol. 127. — Pp. 527–551.
21. *Стражев В. И., Томильчик Л. М.* Электродинамика с магнитным зарядом. — Минск: Наука и техника, 1975. — 336 с.
22. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика в 10 томах. Том IV, Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1989. — 728 с.
23. *Маханьков В. Г., Рыбаков Ю. П., Санюк В. И.* Модель Скирма и сильные взаимодействия (к 30-летию создания модели Скирма) // УФН. — 1992. — Т. 162, № 2. — С. 1–61.
24. *Рыбаков Ю. П., Санюк В. И.* Многомерные солитоны. — М.: Изд-во Российского унив-та дружбы народов, 2001. — 482 с.
25. *Андрианов В. А., Новожилов В. Ю.* Скалярные мезоны в модели Скирма и солитоны с барионным зарядом) // Записки научных семинаров ЛОМИ, Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. — 1988. — Т. 169, № 8. — С. 3–11.

UDC 537.812, 539.12.01, 512.552

On Some Aspects of Applying Polynorms on the Algebras in Physics

A. A. Eliovich, V. I. Sanyuk

Department of Theoretical Physics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

In this article it is considered some opportunities of using in physics the pseudo-norms of degree above 2 (polynorms) on the hypercomplex algebras, first of all on the example of the biquaternion algebra. Due to above a new point of view on the number of the known questions appears. In particular it is shown that the 4-norm consideration in the field theory makes natural the transition from the Maxwell's electrodynamics to the Born-Infeld's nonlinear electrodynamics. Besides the algebraic approach shows naturalness of the addition the nonlinear term into the mezon Lagrangian of the nuclear forces offered by T. Skyrme what supposedly can improve some properties of the model. Thus the algebraic consideration allows to clear some intuitive findings in the nonlinear field theories, and also to bring in them some additional elements of rigidity.

Key words and phrases: hypercomplex algebras, biquaternions, multiplicative polynorms, nonlinear field theory, Born–Infeld electrodynamics, Skyrme model.