УДК 517.925; 62.50

Устойчивость программного многообразия одноконтурных систем

С. С. Жуматов

Лаборатория динамических систем
Институт математики
ул. Пушкина, 125, Алматы, Казахстан 050010

Рассматриваются одноконтурные системы, обладающие заданным программным многообразием. Получены необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости программного многообразия относительно вектор-функции ω, когда матрица состояния имеет специальную структуру.

Ключевые слова: одноконтурные системы, программное многообразие, нелинейность, абсолютная устойчивость, функция Ляпунова.

1. Введение

Задача построения всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую, впервые была сформулирована в [1] Н.П. Еругиным, где был дан метод её решения. Этот метод получил дальнейшее развитие в исследованиях А.С. Галиуллина, И.А. Мухаметзянова, Р.Г. Мухарлямова и их учеников. Подробный обзор приведён в [2]. Эти исследования посвящены постановке и решению различных обратных задач динамики, проблем построения систем программного движения. Заметим, что в процессе решения указанных задач построение устойчивых систем по заданному многообразию превратилось в самостоятельную теорию. В работах [3–7] решались задачи о построении дифференциальных уравнений устойчивого и оптимального движений, о стабилизации движения механических систем и приведения уравнения динамики к заданной структуре. В [8, 9] исследовались вопросы динамики экономических объектов и проблемы их управления с помощью методов моделирования механических систем. Построению систем автоматического управления по заданному многообразию посвящены работы [10–12], где системы управления строились для случая, когда нелинейная функция $\varphi(\sigma)$ является скалярной, и установлены достаточные условия абсолютной устойчивости. В [13, 14] решены задачи построения систем автоматического управления, когда нелинейная функция является векторной и удовлетворяет условиям локальной квадратичной связи.

Целью данной работы является построение одноконтурных систем по заданному многообразию.

Для решения этой задачи воспользуемся подходом предложенной в работе [3].

Пусть дифференциальное уравнение

$$\dot{\eta} = -Q\eta, \tag{1}$$

где η — n-мерный вектор, $Q(n\times n)$ — некоторая матрица, обладает $(n-s)$-мерным гладким многообразием $\Omega(t)$, заданным линейным векторным уравнением

$$\omega(t,\eta) \equiv H_1\eta + g(t) = 0, \tag{2}$$

где $\omega - s$ — n-мерный вектор, $H_1(s\times n)$ — заданная постоянная матрица, $g(t)$ — s-мерная заданная вектор-функция.

На основании критерия, что $\Omega(t)$ является интегральным для системы (1), имеем

$$\dot{\omega} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial\eta}\dot{\eta} = F(t,\eta,\omega). \tag{3}$$

Здесь $F(t,\eta,\omega) \equiv 0$ функция Еругина, обладающая свойством $F(t,\eta,\omega) \equiv 0$.

Следует отметить, что при построении систем, кроме условия (3), одним из основных требований является условие устойчивости многообразия $\Omega(t)$ относительно некоторой заданной функции.

Вместе с уравнением (1) рассмотрим систему вида

$$\dot{\eta} = -Q\eta - \kappa f(\sigma), \quad \dot{\sigma} = l^T P^T \omega - \rho_{n+1}\sigma, \tag{4}$$

где $\eta,\ \kappa,\ l$ — n-мерные векторы-столбцы:

$$\eta^T = \|\eta_1, \dots, \eta_n\|, \quad \sigma = \eta_{n+1}, \quad \kappa^T = \|\alpha_1, 0, \dots, 0\|, \quad l^T = \|0, \dots, 0, \alpha_{n+1}\|,$$

а $P(s \times n)$, $Q(n \times n)$ — постоянные матрицы

$$Q = \begin{Vmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\alpha_2 & \rho_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_3 & \rho_3 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_n & \rho_n \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Нелинейная характеристика $f(\sigma)$ непрерывна по σ и удовлетворяет условиям

$$f(0) = 0 \wedge k_1\sigma^2 \leqslant f(\sigma)\sigma \leqslant k_2\sigma^2 \quad \forall\ \sigma \neq 0, \tag{6}$$

где k_1 и k_2 — положительные постоянные.

Известно, что функция $f(\sigma)$ по существу является функцией управления по отклонению от программы и при $\omega = \sigma = 0$, в силу условий (6), система (4) принимает вид (1). Следовательно многообразие $\Omega(t)$ является интегральным и для системы (4).

Если положим

$$x_i = \eta_i, \quad \sigma = x_{n+1}, \quad \rho_i = T_i^{-1} > 0 \wedge \alpha_i = \gamma_i T_i^{-1} = \gamma_i \rho_i > 0 \quad \forall\ i_1^{n+1}, \tag{7}$$

то получим одноконтурную систему, состоящую из $n+1$ апериодических звеньев, замкнутую нелинейной обратной связью. Апериодическими звеньями могут служит двигатели разных типов (электрические, гидравлические, пневматические и т.д.), электрический генератор постоянного тока, резервуар с газом и т.д. [15]. Обычно процессы в такой системе описываются следующими уравнениями [16]:

$$(T_1 p + 1)x_1 = -\gamma_1 f(x_n), \quad (T_i p + 1)x_i = -\gamma_i x_{i-1}, \quad \forall i_2^{n+1}, \tag{8}$$

где $p = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, $T_i,\ \gamma_i$ — положительные постоянные:

$$T_i > 0 \wedge \gamma_i > 0 \quad \forall\ i_1^{n+1}. \tag{9}$$

Предположим, что $F = -A\omega,\ (-A(s \times s))$ — гурвицева матрица, тогда, дифференцируя многообразие (2) по времени t, в силу системы (4) получим

$$\dot{\omega} = -A\omega - \frac{\partial\omega}{\partial\eta}\kappa f(\sigma), \quad \dot{\sigma} = l^T P^T \omega - \rho_{n+1}\sigma. \tag{10}$$

Определение 1. Программное многообразие $\Omega(t)$ называется абсолютно устойчивым относительно вектор-функции ω, если оно асимптотически устойчиво в целом на решениях системы (10) при любых $\omega(t_0, \eta_0)$ и функции $f(\sigma)$, удовлетворяющей условиям (6).

Рассмотрим линеаризованную систему

$$\dot{\omega} = -A\omega - bh\sigma, \quad \dot{\sigma} = c^T\omega - \rho_{n+1}\sigma, \tag{11}$$

которая получена из (10) при $f(\sigma) = h\sigma,\ b = \dfrac{\partial\omega}{\partial\eta}\kappa, c = Pl$. Предположим, что она асимптотически устойчива при $\forall\ h$:

$$k_1 - \varepsilon \leqslant h \leqslant k_2 + \varepsilon, \tag{12}$$

Спрашивается, будет ли программное многообразие системы (10) асимптотически устойчиво в целом относительно вектор-функции $\omega\ \forall\ f(\sigma) \in C_{[k_1,k_2]}$?

2. Необходимые условия устойчивости. Определение гурвицева угла

Теорема 1. *Для абсолютной устойчивости программного многообразия* (2) *системы* (10) *относительно вектор-функции* ω *в гурвицевом угле необходимо, чтобы система* (11) *была асимптотически устойчивой при условии* (12).

Характеристическое уравнение системы (11) имеет вид:

$$\Delta(h,\lambda) = \begin{vmatrix} A + \lambda E & hb \\ c^T & \rho_{n+1} + \lambda \end{vmatrix} = \sum_{m=0}^{s+1} a_m(h)\lambda^{s+1-m} = 0. \tag{13}$$

Составляем из коэффициентов характеристического уравнения матрицу Гурвица

$$\Gamma_m(h) = \begin{Vmatrix} a_1(h) & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3(h) & a_2(h) & a_1(h) & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m-1}(h) & a_{m-2}(h) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_m(h) \end{Vmatrix} \quad \forall\ m_1^{s+1} \tag{14}$$

Введём следующие обозначения:

$$\xi_m = \inf_h \xi_m(h) \quad \forall m_1^{s+1}, \tag{15}$$

$$\xi_m(h) = \det\Gamma_m(h) \quad \forall m_1^{s+1}, \tag{16}$$

тогда в силу теоремы Гурвица для асимптотической устойчивости в целом необходимо выполнение неравенства

$$\xi_m > 0 \quad \forall m_1^{s+1}. \tag{17}$$

При этом гурвицев угол определяется как пересечение на прямой

$$[k_1 - \varepsilon, k_2 + \varepsilon] = \bigcap_{m=1}^{s+1} \xi_m(h) > 0 \quad \forall\ h. \tag{18}$$

3. Алгебраический критерий устойчивости

Для системы (10) строим функцию Ляпунова вида

$$V = \omega^T L\omega + \beta \int_0^{\sigma} f(\sigma)\mathrm{d}\sigma, \tag{19}$$

где $L = L^T$, β — параметр. Дифференцируя функцию (19), в силу системы (10), находим

$$-\dot{V} = \omega^T C\omega + 2\omega^T gf + \beta\rho_{n+1}\sigma f, \tag{20}$$

где C — симметрическая матрица

$$C = A^T L + LA,\ g = Lb - (\beta/2)c^T. \tag{21}$$

Полагая $h(\sigma) = f(\sigma)/\sigma$ из (20), получим

$$-\dot{V} = \omega^T C\omega + 2\omega^T gh(\sigma) + \beta\rho_{n+1}h(\sigma)\sigma^2. \tag{22}$$

Чтобы $-\dot{V} > 0$, необходимо и достаточно выполнение усиленного неравенства Сильвестра:

$$G[h(\sigma)] = \left\| \begin{matrix} C & gh(\sigma) \\ g^T h(\sigma) & \beta\rho_{n+1}h(\sigma) \end{matrix} \right\| \geqslant \varepsilon > 0, \tag{23}$$

где ε — достаточно малое положительное число. Как известно, если $(-A)$ гурвицева матрица, $L = L^T > 0$, тогда $C > 0$, следовательно, для установления справедливости условия (23) достаточно потребовать выполнения неравенства

$$\beta\rho_{n+1} - hg^T C^{-1} g \geqslant \varepsilon \tag{24}$$

при условии $h(\sigma) > \varepsilon$. Зададим матрицу $C = \|c_{ij}\|_1^s > 0$ таким образом, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\det \|c_{ij}\|_1^m = g_m \quad \forall\ m_1^s. \tag{25}$$

Тогда достаточные условия абсолютной устойчивости $C > 0$ эквивалентны необходимым s условиям (17). Теперь положим, что

$$\inf_h (\beta\rho_{n+1} - hg^T C^{-1} g) = g_s. \tag{26}$$

Таким образом, если выполняется соотношение $L = L^T > 0 \wedge \beta > 0$, при условии (25), (26), то на основании метода кажущейся линеаризации Зубова верна

Теорема 2. *Если матрица $-A$ — гурвицева, существует $L = L^T > 0 \wedge \beta > 0$ и выполняется равенство* (26), *то абсолютная устойчивость программного многообразия* (2) *системы* (10) *относительно вектор-функции ω в угле* (18) *следует из асимптотической устойчивости системы* (11) *в том же угле.*

Параметр β определяется из условия (26). Подставляя значение g в (26), получим относительно этого параметра квадратное уравнение

$$\tau_1\beta^2 - 2\tau_2\beta + \tau_3 = 0, \tag{27}$$

где

$$\tau_1 = h/4(c^T C^{-1} c) > 0,\ \tau_2 = 1/2(Lc^T C^{-1} b + \rho_{n+1}). \tag{28}$$

Чтобы существовало $\beta > 0$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\tau_2 > 0 \wedge \tau_2^2 - \tau_1\tau_3 > 0. \qquad (29)$$

Предположим, что $L = \mathrm{diag} \parallel L_1, \ldots, L_s \parallel$,

$$A = \begin{Vmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\alpha_2 & \rho_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_3 & \rho_3 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\alpha_s & \rho_s \end{Vmatrix}, \qquad (30)$$

тогда имеем

$$C = A^T L + LA = \begin{Vmatrix} c_{11} & -c_{21} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -c_{21} & c_{22} & -c_{32} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -c_{32} & c_{33} & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{s-1,s-1} & -c_{s,s-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -c_{s,s-1} & c_{s,s} \end{Vmatrix}.$$

Здесь

$$c_{ii} = 2\rho_i L_i, \quad c_{ij} = \alpha_i L_j. \qquad (31)$$

Положим

$$c_{11} = 2\rho_1 L_1, \quad |c_{ij}|_1^2 = \begin{vmatrix} g_1 & -\alpha_2 L_1 \\ -\alpha_2 L_1 & 2\rho_2 L_2 \end{vmatrix} = g_2;$$

$$|c_{ij}|_1^3 = \begin{vmatrix} g_1 & -\alpha_2 L_1 & 0 \\ -\alpha_2 L_1 & 2\rho_2 L_2 & -\alpha_3 L_2 \\ 0 & -\alpha_3 L_2 & 2\alpha_3 L_3 \end{vmatrix} = g_3, \ldots, |c_{ij}|_1^s = g_s. \qquad (32)$$

Отсюда легко устанавливается рекуррентная формула для коэффициентов матрицы

$$L_i = (g_i + g_{i-2}\alpha_i^2 L_{i-1}^2)/2\rho_i g_{i-1} \quad \forall\ i_1^s \ \ (g_{-1} = 0,\ g_0 = 1), \qquad (33)$$

где g_i определяется формулой (15). Вычисляя вектор g из (21) в силу (5), имеем

$$g^T = \left\| \alpha_1 \frac{\partial\omega_1}{\partial\eta_1} L_1 - (1/2)\alpha_{n+1}\beta p_{1n}, \ldots, \alpha_1 \frac{\partial\omega_1}{\partial\eta_1} - (1/2)\alpha_{n+1}\beta p_{sn} \right\|.$$

Теорема 3. *Пусть в* (19) L *является диагональной, а матрица* A *имеет структуру* (30) *и выполняется условие* (29). *Тогда матрица* C *определяется из* (31), (32), *и программное многообразие* (2) *системы* (10) *абсолютно устойчиво относительно вектор-функции* ω *в угле* (18).

4. Частотный критерий устойчивости

На основании леммы Якубовича–Калмана [17] справедлива следующая

Теорема 4. *Программное многообразие* (2) *системы* (10) *абсолютно устойчиво относительно вектор-функции* ω *в угле* (18), *если выполняется следующее частотное неравенство*

$$\Pi(\varpi) = \beta h + \mathrm{Re}\, \mathrm{c}^T (A + j\varpi E)^{-1} b \geqslant \varepsilon > 0 \quad \forall\ \varpi \in [0, \infty]. \qquad (34)$$

Неравенство (34) эквивалентно условию (24).

Пусть в (19) L является диагональной, а матрица A имеет структуру (30). Тогда

$$\det \|A + j\varpi E\| = \prod_{i=1}^{s}(\rho_i + j\varpi),$$

$$c^T(A + j\varpi E)^{-1}b = \prod_{i=1}^{s+1}\alpha_i \Big/ \prod_{i=1}^{s}(\rho_i + j\varpi) = \alpha\frac{\Psi(j\varpi)}{\Phi(\mu)},$$

$$\mu = \varpi^2, \quad \alpha = \prod_{i=1}^{s+1}\alpha_i, \quad \Psi(j\varpi) = \prod_{i=1}^{s}(\rho_i - j\varpi), \quad \Phi(\mu) = \prod_{i=1}^{s}(\rho_i^2 + \mu).$$

Предположим, что $\Psi(j\varpi) = X(\mu) - j\varpi Y(\mu)$. Тогда из условия (34) следует неравенство

$$\Pi(\mu) = 1 - k_1\frac{\alpha X(\mu)}{\rho_{n+1}\Phi(\mu)} \geqslant \varepsilon > 0. \tag{35}$$

Теорема 5. *Пусть в* (19) L *является диагональной, а матрица* A *имеет структуру* (30) *и выполняется условие*

$$1 - k_1\frac{\alpha X(\mu)}{\rho_{n+1}\Phi(\mu)} \geqslant g_s, \tag{36}$$

Тогда для абсолютной устойчивости программного многообразия (2) *системы* (10) *относительно вектор-функции* ω *необходимо и достаточно выполнение неравенства* (35).

5. Заключение

Построены одноконтурные системы, программные многообразия которых обладает свойством абсолютной устойчивости относительно вектор-функции ω. Такие системы широко применяются в электротехнике. Заметим, что многоконтурные системы управления со стационарной частью и выделенным нелинейным элементом также можно свести к одноконтурной системе вида (8).

Найдены необходимые, а также достаточные аналитические условия абсолютной устойчивости программного многообразия одноконтурных систем. Для получения достаточных условий построена функция Ляпунова «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности». Частотный критерий абсолютной устойчивости установлен с помощью леммы Якубовича-Калмана для случая, когда матрица Ляпунова является диагональной и матрица состояния имеет специальную структуру.

Литература

1. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, заданную интегральную кривую // Прикл. мат. и мех. — 1952. — Т. 16, № 6. — С. 653–670.
2. *Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.* Обзор исследований по аналитическому построению систем программного движения // Вестник Российского ун-та Дружбы народов. — 1994. — № 1. — С. 5–21.
3. *Мухарлямов Р. Г.* О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т. 5, № 4. — С. 688–699.

4. *Мухарлямов Р. Г.* О построении множества систем дифференциальных уравнений оптимального движения по заданному многообразию // Дифференц. уравнения. — 1971. — Т. 7, № 10. — С. 1825–1834.
5. *Мухарлямов Р. Г.* О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 3. — С. 343–353.
6. *Мухарлямов Р. Г.* Стабилизация движений механических систем на заданных многообразиях фазового пространства // Прикл. мат. и мех. — 2006. — Т. 70, № 2. — С. 236–249.
7. *Мухарлямов Р. Г.* Приведение к заданной структуре уравнений динамики систем со связями // Прикл. мат. и мех. — 2007. — Т. 71, № 3. — С. 401–410.
8. *Мухарлямов Р. Г.* Моделирование динамики простейших экономических объектов как систем с программными связями // Вестник РУДН, серия «физ.-мат.науки». — 2007. — № 3. — С. 25–34.
9. *Ахметов А. А., Мухарлямов Р. Г.* Применение методов моделирования механических систем для управления экономическими объектами // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. — 2008. — № 23. — С. 81–84.
10. *Мухаметзянов И. А.* Об устойчивости программного многообразия. I // Дифференц. уравнения. — 1973. — Т. 9, № 5. — С. 846–856.
11. *Мухаметзянов И. А.* Об устойчивости программного многообразия. II // Дифференц. уравнения. — 1973. — Т. 9, № 6. — С. 1037–1048.
12. *Мухаметзянов И. А., Саакян А. О.* Некоторые достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных интегральных многообрази // Проблемы механики управляемого движения. — 1979. — С. 137–144.
13. *Майгарин Б. Ж.* Устойчивость и качество процессов нелинейных систем автоматического управления. — Алма-Ата: Наука, 1980.
14. *Жуматов С. С., Крементуло В. В., Майгарин Б. Ж.* Второй метод Ляпунова в задачах устойчивости и управления движеием. — Алматы: Наука, 1999.
15. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1975.
16. *Труха Н. М.* Об одноконтурных систем абсолютно устойчивых в гурвицевом угле // А. и Т. — 1968. — № 11. — С. 5–8.
17. *Якубович В. А.* Частотные условия абсолютной устойчмвости систем управления с нелинейными и линейными нестационарными блоками // А. и Т. — 1967. — № 6. — С. 5–30.

UDC 517.925; 62.50

Stability of Program Manifold Single-Tuned System

S. S. Zhumatov

Laboratory of Dynamic Systems
Institute of Mathematics
Pushkin str.,125, 050010 Almaty, Kazakhstan

The single-tuned systems possessing by given program manifold are considered. The necessary and sufficient conditions of the programm manifold's absolute stability with respect to vector-function ω are obtained when the matrix of state has special structure.

Key words and phrases: single-tuned systems, program manifold, nonlinearity, absolute stability, Lyapunov's function.