

УДК 004.021, 517.938, 519.2, 519.62

Математическая модель динамики поведения параметров систем типа RED

А. В. Королькова, Д. С. Кулябов

*Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198*

В статье построена математическая модель процесса передачи трафика с регулируемой алгоритмом типа Random Early Detection (RED) динамической интенсивностью потока. Предложен метод определения области значений параметров RED, при которых возникают автоколебания динамических переменных модели. Проведён качественный анализ параметрических и фазовых портретов для систем с алгоритмами RED, GRED, DSRED и ARED.

Ключевые слова: алгоритм случайного раннего обнаружения (RED), фазовый портрет, параметрический портрет, автоколебания, положение равновесия, стохастическое дифференциальное уравнение, система обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Введение

Во многих задачах возникают математические модели в виде автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметров. Такие уравнения описывают зависимость скорости изменения некоторых величин, называемых фазовыми, или динамическими переменными, от значений самих этих величин. Фазовые переменные имеют самый разный смысл, определяемый природой изучаемого явления. Параметры модели, определяемые внешними условиями или внутренними свойствами моделируемой системы, как правило входят в правые части уравнений.

В данной статье построена математическая модель процесса передачи трафика с регулируемой алгоритмом типа Random Early Detection (RED) динамической интенсивностью потока. Математическое описание динамических переменных модели получено в виде автономной системы трёх обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметров алгоритма активного управления очередями типа RED¹ [2, 3]. В качестве динамических переменных выступают усреднённые по времени размер TCP Reno-окна перегрузки w , мгновенное значение длины очереди q и экспоненциально взвешенное скользящее среднее значение длины очереди \hat{q} . Параметрами модели являются функция сброса p , определяемая согласно используемому алгоритму семейства RED, зависящая в свою очередь от пороговых значений q_{\min} и q_{\max} , и функция P_{TO} потери пакетов вследствие возникновения тайм-аута, когда источник не получает информации о доставке / не доставке пакета.

В данной статье интерес представляет задача определения области возникновения автоколебаний динамических переменных построенной модели. При этом изучаются системы с разными алгоритмами семейства RED. Для решения поставленной задачи проведён качественный анализ:

- для фиксированных значений параметров модели построены фазовые портреты, дающие представление об устанавливающихся в системе режимах (наличие / отсутствие автоколебаний);
- определены положения равновесия — особые точки и траектории (циклы), отвечающие стационарному режиму и режиму колебаний системы соответственно;
- определены бифуркационные (критические) значения параметров модели;

Статья поступила в редакцию 1 марта 2010 г.

¹Полученная система без вывода основных уравнений опубликована в [1].

- построен параметрический портрет динамических переменных модели, задающий разбиение фазового пространства на области с качественно различными типами динамического поведения.

2. Модель процесса передачи трафика с регулируемой алгоритмом типа RED динамической интенсивностью потока

Рассматривается система, моделирующая передачу TCP-Reno трафика [4] в узел, работающий по одному из алгоритмов семейства RED [2, 3].

Система представляет собой моносервисную модель с C приборами и очередью конечной ёмкости $R < \infty$. Число C приборов соответствует скорости передачи в канале связи (C пакетов в единицу времени). На систему поступает пуассоновский поток заявок (заявка соответствует TCP-пакету) Π рода с динамической интенсивностью, на которую оказывают влияние функция сброса p , определяемая согласно алгоритму управления очередью (Active Queue Management, AQM), и функция P_{TO} потери заявки по тайм-ауту. В случае, когда в качестве алгоритма AQM применяется один из алгоритмов семейства RED, функция сброса p зависит от параметра \hat{q} — экспоненциально взвешенного скользящего среднего значения длины очереди, для которого определены пороговые значения q_{\min} и q_{\max} .

Если в момент времени t поступления заявки прибор свободен, то заявка поступает на обслуживание и занимает прибор на всё время обслуживания, которое является случайной величиной с функцией распределения $B(t) = I(t - 1)$, $t \geq 0$ (одна заявка в единицу времени), где $I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ — индикаторная функция.

Если в момент времени t поступления заявки прибор занят и величина \hat{q} удовлетворяет соотношению $0 < \hat{q} \leq q_{\min}$, то заявка занимает одно место в очереди и ожидает доступа к прибору.

Если в момент времени t поступления заявки прибор занят и величина \hat{q} удовлетворяет соотношению $q_{\min} < \hat{q} \leq q_{\max}$, то заявка теряется согласно функции $p(\hat{q})$, $0 < p(\hat{q}) \leq p_{\max}$, вид которой определяется согласно используемому алгоритму семейства RED [2].

Если в момент времени t поступления заявки прибор занят и $\hat{q} > q_{\max}$, то заявка теряется.

Процесс, моделирующий предложенную нагрузку и оказывающий влияние на работу системы, определяется случайным процессом $\{w(t)\} \equiv \{w(t), t \geq 0\}$ с пространством состояний $\mathscr{W} = \{1, \dots, w_{\max}\}$ и начальным условием $w(0) = 1$ для некоторого $w_{\max} < \infty$, где $w(t)$ соответствует размеру окна перегрузки TCP-Reno в момент времени $t \geq 0$. Число заявок в очереди в момент времени t , $t \geq 0$ моделируется случайным процессом $\{q(t)\} = \{q(t), t \geq 0\}$. Таким образом, можно определить двумерный марковский процесс $\{w(t), q(t)\} \equiv \{w(t), q(t), t \geq 0\}$ с пространством состояний $\mathscr{L} = \mathscr{W} \times [0, R]$.

Для рассматриваемой в данной работе модели необходимо получить математическое описание динамических переменных $w(t)$, $q(t)$ и $\hat{q}(t)$.

В работе [5, 6] предложено для моделирования взаимодействия множества TCP-потоков и маршрутизаторов AQM использовать задание скачкообразного процесса передачи трафика с помощью стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), которые могут быть преобразованы в набор обыкновенных дифференциальных уравнений и решены численно². СДУ представляет собой уравнение

²В отличие от модели из [5, 6] в данной работе в уравнении для TCP-окна при анализе учитывается возникновение потерь пакетов по тайм-ауту, в уравнении для мгновенной длины очереди учитывается возникновение сброса пакетов вследствие функционирования управляющего алгоритма семейства RED.

вида:

$$d\psi(t) = f(\psi, t)dt + \sum_{i=1}^m g_i(\psi, t)dN_i(t),$$

где $\psi(t)$ — исходная функция, $f(\psi, t)$ — изменение функции $\psi(t)$, не зависящее от случайного воздействия, $g_i(\psi, t)$ — изменение функции $\psi(t)$ под действием случайного процесса $N_i(t)$.

Согласно [4] окно TCP-Reno формируется с учётом фазы медленного старта³, фазы избежания перегрузок и алгоритма избежания перегрузок, определяющего потери по тайм-ауту (Timed Out, ТО) и потери по получению задублированных АСК-пакетов (Triple Duplicate, TD). На фазе избежания перегрузок размер окна увеличивается на $1/w$ при получении каждого подтверждения, в случае TD-потери размер окна сокращается вдвое, а при ТО-потере становится равным 1. Таким образом, в терминах СДУ имеем:

$$dw(t) = \frac{dt}{T(t)} + \left(-\frac{w(t)}{2}\right) dN_{TD}(t) + (1 - w(t))dN_{TO}(t), \quad (1)$$

где $N_{TD}(t)$ — случайный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda_{TD}(t)$ потерь по получению задублированных АСК-пакетов, $N_{TO}(t)$ — случайный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda_{TO}(t)$ потерь по тайм-ауту. Время $T(t)$ вычисляется по следующей формуле

$$T(t) = \begin{cases} T_b + \frac{q(t)}{C(t)}, & q(t) > 0, \\ T_b, & q(t) = 0, \end{cases}, \quad C(t) = \begin{cases} C, & q(t) > C, \\ q(t), & q(t) \leq C. \end{cases}$$

где T_b — время на передачу и подтверждение приёма (Round Trip Time, RTT) одного пакета, $q(t)$ — значение мгновенной длины очереди в момент времени t , $t \geq 0$, $C(t)$ — интенсивность обслуженной нагрузки.

Для решения СДУ осуществляется переход к ОДУ путём усреднения по времени всех членов, входящих в СДУ. Для некоторой функции $x(t)$ под усреднением по времени понимается $E[x(t)] = \frac{1}{t} \int_0^t x(t')dt'$.

С учётом того, что $E[dN_{TD}(t)] + E[dN_{TO}(t)] = \lambda_{TD}(t)dt + \lambda_{TO}(t)dt$, и ограничения на размер TCP-окна преобразуем уравнение (1) следующим образом:

$$E \left[\frac{dw(t)}{dt} \right] = I(w_{\max} - E[w(t)]) \frac{1}{E[T(t)]} + \\ + I(w(t) - 1) \left[\left(-\frac{E[w(t)]}{2}\right) \lambda_{TD}(t) + (1 - E[w(t)])\lambda_{TO}(t) \right].$$

Интенсивность сброса пакетов $\lambda(t) = \lambda_{TD}(t) + \lambda_{TO}(t)$ имеет вид:

$$\lambda(t) = \frac{E[w(t)]}{E[T(t)]} E[p(\hat{q}(t))], \quad (2)$$

причём функция сброса пакетов $p(\hat{q}(t))$ представляет собой совокупность функции $p_m(\hat{q}(t))$ маркировки пакета на сброс и собственно функции $p_d(\hat{q}(t))$ сброса пакета [3].

³В предположении длинных сессий и установившегося режима фазой медленного старта можно пренебречь.

Поскольку в уравнении (2) необходимо учесть время $\tau \geq 0$ оповещения источника о потере пакета, то

$$\lambda(t) = \frac{E[w(t-\tau)]}{E[T(t-\tau)]} [E[p_m(\hat{q}(t-\tau))] + E[p_d(\hat{q}(t-\tau))]].$$

Кроме того,

$$\lambda_{TD}(t) + \lambda_{TO}(t) = (1 - E[P_{TO}(w(t-\tau))] + E[P_{TO}(w(t-\tau))]) \lambda(t),$$

где $P_{TO}(w(t-\tau))$ — функция сброса пакетов по тайм-ауту.

Таким образом, получим уравнение, описывающее изменение $E[w(t)]$:

$$\begin{aligned} \frac{dE[w(t)]}{dt} = & \frac{I(w_{\max} - E[w(t)])}{E[T(t)]} + I(w(t) - 1) \left(-\frac{E[w(t)]}{2} \right) (1 - E[P_{TO}(w(t-\tau))]) \times \\ & \times \frac{E[w(t-\tau)]}{E[T(t-\tau)]} (E[p_m(\hat{q}(t-\tau))] + E[p_d(\hat{q}(t-\tau))]) + \\ & + I(w(t) - 1) (1 - E[w(t)]) E[P_{TO}(w(t-\tau))] \frac{E[w(t-\tau)]}{E[T(t-\tau)]} E[p_d(\hat{q}(t-\tau))]. \end{aligned} \quad (3)$$

Для описания поведения функции мгновенной длины очереди $q(t)$ воспользуемся дифференциальным аналогом интегрального уравнения Линдли [7]:

$$\frac{dq(t)}{dt} = -C(t) + I(R - q(t)) \frac{Nw(t)}{T(t)} (1 - p_d(\hat{q}(t))), \quad (4)$$

где N — число поступающих в очередь потоков.

Напомним, что функция $p(\hat{q}(t))$ зависит от экспоненциально взвешенной скользящей средней длины очереди $\hat{q}(t)$, которая в случае дискретного времени имеет вид [2, 3]:

$$\hat{q}_{k+1} = (1 - w_q)\hat{q}_k + w_q q_k \equiv \hat{q}(t_{k+1}) = (1 - w_q)\hat{q}(t_k) + w_q q(t_k), \quad t_k = t_0 + k\delta, \quad (5)$$

где δ — время между поступлениями пакетов в систему, а w_q — параметр (весовой коэффициент) экспоненциально взвешенного скользящего среднего (Exponentially Weighted Moving-Average, EWMA) [8]: $w_q = 1 - e^{-1/C}$, где C — скорость передачи в канале связи.

Для того, чтобы перейти к непрерывному времени, необходимо найти решение уравнения (5) в виде $\frac{d\hat{q}(t)}{dt} = A\hat{q}(t) + Bq(t)$. Константы A и B находятся из соотношения:

$$\hat{q}(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)} \hat{q}(t_k) + q(t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-t'_k)} B dt'_k,$$

откуда $e^{A\delta} = (1 - w_q)$, $\delta = t_{k+1} - t_k = 1/C$ и, следовательно, $A = \ln(1 - w_q)/\delta$, $B = -\ln(1 - w_q)/\delta$.

Таким образом,

$$\frac{d\hat{q}(t)}{dt} = \frac{\ln(1 - w_q)}{\delta} \hat{q}(t) - \frac{\ln(1 - w_q)}{\delta} q(t). \quad (6)$$

Поскольку уравнение (3) записано для усреднённых переменных $w(t)$, $q(t)$ и $\hat{q}(t)$, то и в уравнениях (4) и (6) необходимо провести процедуру усреднения.

Таким образом, получаем автономную систему трёх обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE[w(t)]}{dt} = \frac{I(w_{\max} - E[w(t)])}{E[T(t)]} + I(w(t) - 1) \left[\left(-\frac{E[w(t)]}{2} \right) \times \right. \\ \times (1 - E[P_{TO}(w(t - \tau))]) \frac{E[w(t - \tau)]}{E[T(t - \tau)]} \times \\ \times (E[p_m(\hat{q}(t - \tau))] + E[p_d(\hat{q}(t - \tau))]) + \\ \left. + (1 - E[w(t)]) E[P_{TO}(w(t - \tau))] \frac{E[w(t - \tau)]}{E[T(t - \tau)]} E[p_d(\hat{q}(t - \tau))] \right], \\ \frac{dE[q(t)]}{dt} = I(R - E[q(t)]) \frac{NE[w(t)]}{E[T(t)]} (1 - E[p_d(\hat{q}(t))]) - E[C(t)], \\ \frac{dE[\hat{q}(t)]}{dt} = \frac{\ln(1 - w_q)}{\delta} E[\hat{q}(t)] - \frac{\ln(1 - w_q)}{\delta} E[q(t)], \end{array} \right. \quad (7)$$

описывающую моделируемую систему.

3. Стационарное распределение двумерного марковского процесса $\{w(t), q(t), t \geq 0\}$

Для нахождения стационарного распределения двумерного марковского процесса $\{w(t), q(t), t \geq 0\}$ построенной модели можно применить подход, предложенный в [9, 10], где рассмотрена так называемая «стандартная жидкостная модель», описывающая общий подход к моделированию потоков. При этом предлагается использовать аппарат цепей Маркова (ЦМ).

Система рассматривается в моменты τ_n , $n = 1, 2, \dots$ сразу после начала передачи первого сегмента из n -ой группы сегментов. Размер группы передаваемых сегментов $w(\tau_n)$ соответствует текущему значению окна перегрузки TSP-Reno. Тогда последовательность $\{X_n = w(\tau_n), n \geq 0\}$ с начальным условием $X_0 = 1$ на пространстве состояний \mathscr{W} является цепью Маркова для случайного процесса $\{w(t), t \geq 0\}$, вложенной по моментам сразу после начала передачи первого сегмента из n -ой группы сегментов. Стационарные вероятности по ЦМ $p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n = i\}$, $i \in \mathscr{W}$, соответствуют стационарным вероятностям по процессу $\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{w(t) = i\}$.

Переходные вероятности $p_{ij} = P\{X_n = j, X_{n-1} = i\}$, $i, j \in \mathscr{W}$, $n \geq 1$ ЦМ $\{X_n, n \geq 0\}$ в данном случае определяются в соответствии с принципами функционирования протокола TSP-Reno:

$$p_{ij} = \begin{cases} p_{11} = p_d(1 - P_{TO}) + P_{TO}, \\ p_{i, i+1} = (1 - p_d)(1 - P_{TO}), & i = \overline{1, w_{\max} - 1}, \\ p_{2,1} = p_d(1 - P_{TO}) + P_{TO}, \\ p_{i,1} = P_{TO}, & i = \overline{3, w_{\max}}, \\ p_{i, [\frac{i}{2}]+1} = p_d(1 - P_{TO}), & i = \overline{3, w_{\max}}, \\ p_{w_{\max}, w_{\max}} = (1 - p_d)(1 - P_{TO}). \end{cases} \quad (8)$$

Здесь на фазе избежания перегрузок размер окна увеличивается на $1/w$ при получении каждого подтверждения, что соответствует переходу из i в состояние $i + 1$. В случае TD-потери, определяемой функцией p_d , размер окна сокращается

вдвое, что соответствует переходу из i в состояние $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor + 1$. При возникновении потери по тайм-ауту, определяемой функцией P_{TO} , размер окна становится равным 1, что соответствует переходу из i в состояние 1.

По эргодической теореме для конечной цепи Маркова стационарные вероятности цепи Маркова $p_i, i \in \mathcal{W}$, определяются как единственное решение системы уравнений равновесия $p_i = \sum_{j \in \mathcal{W}} p_j p_{ji}, i \in \mathcal{W}$, с условием нормировки $\sum_{i \in \mathcal{W}} p_i = 1$.

Замечание 1. Средний размер окна перегрузки может быть вычислен по формуле:

$$E[w] = \sum_{i=1}^{w_{\max}} i p_i. \quad (9)$$

Процесс $\{q(t)\} = \{q(t), t \geq 0\}$, определяющий изменение содержимого очереди системы, удовлетворяет с учётом (4) дифференциальному уравнению

$$\frac{dq(t)}{dt} = \begin{cases} \max\{s_i, 0\}, & q(t) = 0, \\ s_i, & 0 < q(t) \leq R, \end{cases} \quad (10)$$

где функция дрейфа $s : i \mapsto s_i := s(i)$ имеет вид⁴:

$$s_i = \begin{cases} -C(t) + \frac{Nw(t)}{T(t)}, & q(t) = 0, \\ -C(t) + \frac{I(R - q(t))Nw(t)}{T(t)} (1 - p_d(\hat{q}(t))), & 0 < q(t) \leq R. \end{cases} \quad (11)$$

Замечание 2. При конкретном значении $q(t)$ величины $\hat{q}(t), C(t), T(t)$ принимают конкретные числовые значения. Следовательно, правая часть (11) не зависит явно от времени t , а s_i — скаляр, зависящий только от $w(t) = i, i = 1, \dots, w_{\max}$.

Для рассматриваемого двумерного марковского процесса $\{w(t), q(t), t \geq 0\}$ с пространством состояний $\mathcal{L} = \mathcal{W} \times [0, R]$ распределение задаётся функциями

$$F_i(y, t) = P\{w(t) = i, q(t) \leq y | w(0), q(0)\}, \quad (i, y) \in \mathcal{L}, \quad t \geq 0, \quad (12)$$

причём $F_i(0, t) = 0$ для $i \in \mathcal{W}_+$ и $P\{w(t) \in \mathcal{W}_-, q(t) = R\} = 0, F_i(R-, t) \equiv \pi_i(t)$, если $i \in \mathcal{W}_-, t > 0, \mathcal{W}_- = \{i \in \mathcal{W} | s_i < 0\}, \mathcal{W}_+ = \{i \in \mathcal{W} | s_i > 0\}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Стационарные вероятности $F_i(y)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d\mathbf{F}(y)}{dy} \mathbf{S} = \mathbf{F}(y) \mathbf{A},$$

с граничными условиями $F_i(0) \equiv 0$, если $i \in \mathcal{W}_+$, $F_i(R-) = p_i$, если $i \in \mathcal{W}_-$, решение которого имеет вид

$$\mathbf{F}(y) = \mathbf{F}(0) e^{\mathbf{A}\mathbf{S}^{-1}y},$$

где $\mathbf{S} = \text{diag}(s_1, \dots, s_{w_{\max}})$, $s_i \neq 0$ для всех $i = \overline{1, w_{\max}}$, $\mathbf{A} = (a_{ij}), i, j \in \mathcal{W}$, — матрица интенсивностей случайного процесса $\{w(t), t \geq 0\}$, $a_{ij} = a_i \tilde{p}_{ij} > 0$ при $i \neq j$, $a_{ii} := -a_i = -\sum_{j \in \mathcal{W} \setminus \{i\}} a_{ij} < \infty$, $\tilde{p}_{ij} = \begin{cases} p_{ij}(1 - p_{ii})^{-1}, & i \neq j, \\ 0, & i = j, \end{cases}$ p_{ij} определяются из (8).

⁴Функция дрейфа $s : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ задаёт процесс, определяющий разность интенсивностей входящего и исходящего потоков.

Утверждение теоремы следует из результатов, полученных в [9, 10] для стандартной жидкостной модели, с конкретизацией вида функции s_i для рассматриваемой здесь модели и определения интенсивностей переходов для случайного процесса $\{w(t), t \geq 0\}$ через переходные вероятности (8).

Замечание 3. Средняя длина очереди может быть вычислена по формуле:

$$E[q] = \sum_{y=0}^R y \sum_{i=1}^{w_{\max}} F_i(y). \quad (13)$$

4. Определение области возникновения автоколебаний динамических переменных модели

Система (7) определяет разбиение фазового пространства на траектории. Качественная структура фазового портрета модели определяется типом и взаимным расположением положений равновесия модели. Положение равновесия, отвечающее стационарному режиму, — это точка \hat{q}_s фазовой плоскости, в которой обращаются в ноль правые части системы (7).

Для рассматриваемой модели возникновение автоколебаний обусловлено видом функции сброса $p(\hat{q})$ (наличие разрывов первого рода) процесса регулирования состояния потока трафика, зависящей от пороговые значения q_{\min} и q_{\max} и параметра максимального сброса p_{\max} . При определённых значениях q_{\max} и q_{\min} формальное решение системы нелинейных уравнений на интервале (q_{\min}, q_{\max}) находится за его пределами, т.е. в области «быстрых движений», $\hat{q}_s > q_{\max}$. Это приводит к возникновению предельного цикла.

При изменении параметров модели её фазовый портрет также претерпевает изменения, но его топологическая структура в некотором диапазоне значений параметров будет постоянна. При достижении критических значений параметров происходит бифуркация — изменение структуры фазового портрета в некоторой окрестности носителя бифуркации (положения равновесия или предельного цикла) в фазовом пространстве. Множество бифуркационных значений параметров, разбивающее пространство параметров на области с различными типами фазовых портретов, представляет собой параметрический портрет системы.

Предлагается следующий метод определения области возникновения автоколебаний динамических переменных модели (7):

- зафиксировать n параметров процесса регулирования состояния потока трафика;
- вычислить значения стационарной точки \hat{q}_s для свободных параметров;
- построить параметрический портрет системы в предположении, что участок безусловного сброса ($p(\hat{q}(t)) = 1$) отсутствует;
- построить граничную поверхность (переход к области $p(\hat{q}(t)) = 1$), разделяющую фазовое пространство на области с топологически разными фазовыми портретами.

Особые точки и циклы представляют собой стационарные решения. Это означает, что если начальные условия совпадают с особой точкой или расположены на предельном цикле, то система (теоретически) будет сколь угодно долго там оставаться. На практике так будет лишь в случае устойчивости, когда при начальных условиях из малой окрестности решений система возвращается к исходному стационарному режиму. Предлагается рассматривать устойчивость по первому приближению.

Поскольку качественное поведение исходной системы (7) и линеаризованной совпадает, будем исследовать линеаризованную систему, записанную в матричной

форме (для упрощения записи знак E усреднения опущен, $\dot{x} := dx/dt$):

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\hat{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} & \frac{\partial \dot{w}}{\partial q} & \frac{\partial \dot{w}}{\partial \hat{q}} \\ \frac{\partial \dot{q}}{\partial w} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial \hat{q}} \\ \frac{\partial \dot{\hat{q}}}{\partial w} & \frac{\partial \dot{\hat{q}}}{\partial q} & \frac{\partial \dot{\hat{q}}}{\partial \hat{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \\ \hat{q} \end{bmatrix}, \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\mathbf{x}, \quad (14)$$

а затем приведённую к жордановой форме: $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}\mathbf{y}$, $\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{M}$, где матрица \mathbf{M} — действительная, неособая. Собственные значения ϑ матрицы \mathbf{B} (соответственно \mathbf{J}) удовлетворяют характеристическому уравнению:

$$P_{\mathbf{B}}(\vartheta) = \det(\mathbf{B} - \vartheta\mathbf{E}) = 0, \quad \mathbf{E} = \text{diag}(1, \dots, 1). \quad (15)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Положение равновесия модели (7) асимптотически устойчиво по первому приближению.*

Утверждение теоремы следует из теоремы Ляпунова и того факта, что все корни характеристического уравнения (15) линеаризованной системы (14) имеют отрицательные действительные части.

Для проведения качественного анализа построенной модели был разработан комплекс программ, с помощью которого в рассмотренном далее численном примере построены и проанализированы параметрические ⁵ и фазовые портреты для систем с алгоритмами RED, GRED, DSRED, ARED [3, 8, 11, 12]⁶.

Пример. Положим $w_{\max} = 32$ пак., $R = 100$ пак., $T_b = 0,01$ сек., $w_q = 0,0007$ сек., $C = 1400$ пак./сек., $\delta = 1/C$ сек. Решение системы (7) было получено численно посредством метода Рунге–Кутты 4-го порядка, при упрощающих предположениях $\tau = 0$, $N = 1$, $p_m(\hat{q}(t)) = 0$, $P_{\text{ГО}}(w(t)) = \min\left\{1, \frac{3}{w(t)}\right\}$ [13]. Для численного решения системы нелинейных уравнений, определяющей положение равновесия модели, использовался метод Ньютона. Изменяя q_{\min} в пределах $[1, R]$ и q_{\max} в пределах $[q_{\min}, R]$, получим параметрический портрет для различных алгоритмов управления очередь (рис. 1–4).

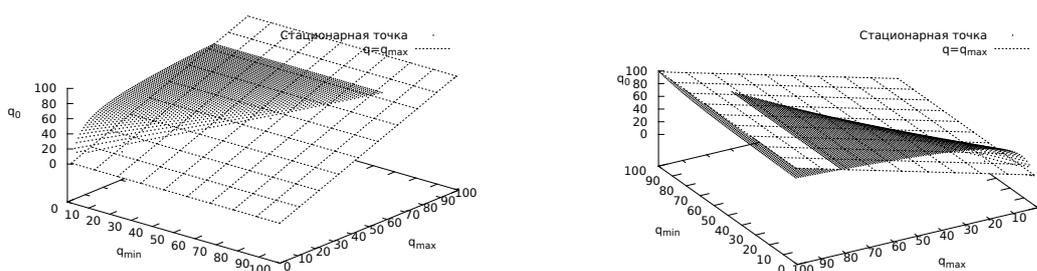


Рис. 1. Параметрический портрет для системы с RED

Для систем с алгоритмами RED, ARED параметрический портрет (рис. 1, 2) показывает наличие изменения структуры фазового портрета (рис. 5, 6).

⁵В работе [1] приведена проекция параметрического портрета для системы с RED.

⁶В работе [2] допущен ряд неточностей: на иллюстрации для алгоритма DSRED должно быть $p_{\max} = 1$ и $q_{\text{mid}} = 0,5(q_{\max} + q_{\min})$; для адаптивных алгоритмов приведены графики p_{\max} , а не p .

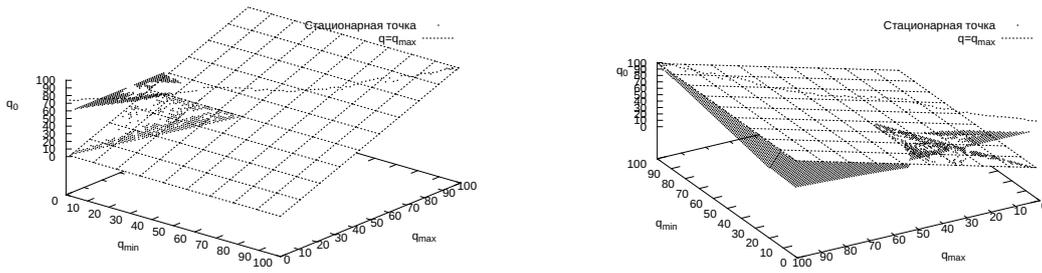


Рис. 2. Параметрический портрет для системы с ARED

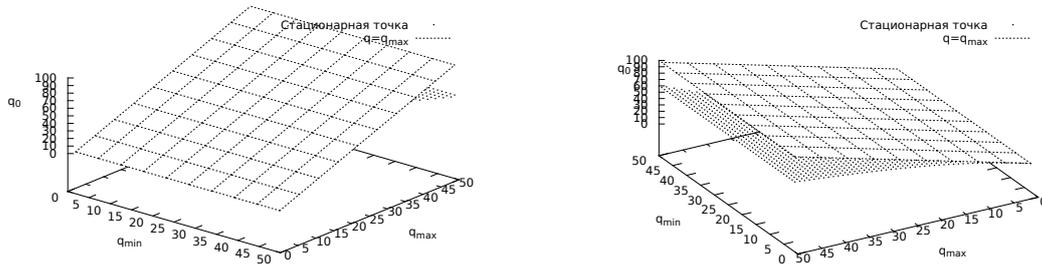


Рис. 3. Параметрический портрет для системы с GRED

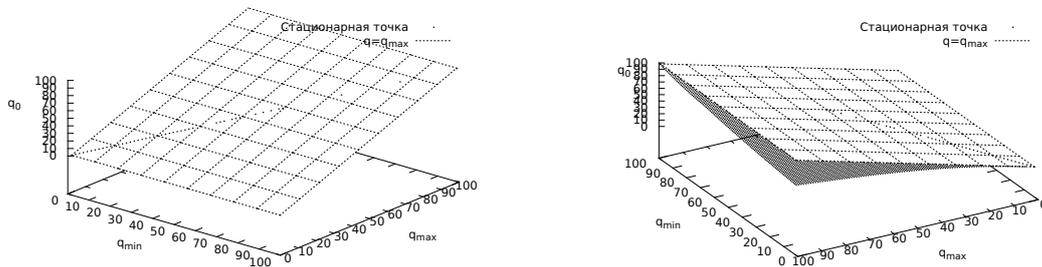


Рис. 4. Параметрический портрет для системы с DSRED

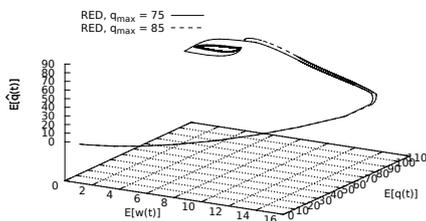


Рис. 5. Фазовый портрет для системы с RED, $q_{\min} = 20$, $q_{\max} = 75, 85$

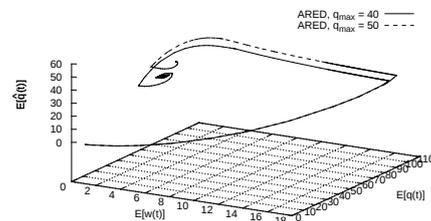


Рис. 6. Фазовый портрет для системы с ARED, $q_{\min} = 20$, $q_{\max} = 40, 50$

На рис. 5, 6 видно, что устойчивый фокус переходит в устойчивый предельный цикл, т.е. имеет место бифуркация Андронова–Хопфа, что подтверждается наличием для систем с рассматриваемыми алгоритмами как стационарного поведения $E[q]$, так и релаксационных автоколебаний (рис. 7, 8).

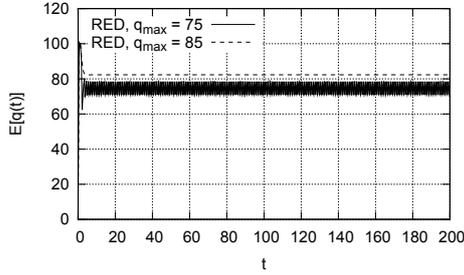


Рис. 7. Поведение $E[q(t)]$ для системы с RED, $q_{\min} = 20$, $q_{\max} = 75, 85$

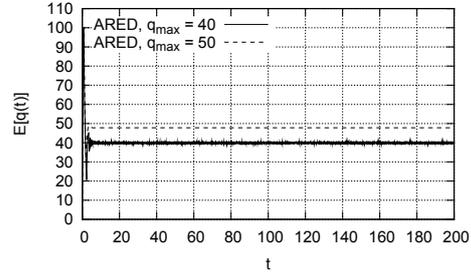


Рис. 8. Поведение $E[q(t)]$ для системы с ARED, $q_{\min} = 20$, $q_{\max} = 40, 50$

Для рассматриваемой системы возникновение автоколебаний обусловлено характером разрывов функции сброса $p(\hat{q})$, которая имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы: $\lim_{\hat{q} \rightarrow q_{\max} - 0} p(\hat{q}) \neq \lim_{\hat{q} \rightarrow q_{\max} + 0} p(\hat{q})$, т.е. имеет место разрыв 1-го рода. Автоколебания возникают, когда значение стационарной точки \hat{q}_s , вычисленное на рабочем интервале (q_{\min}, q_{\max}) , попадает на участок безусловного сброса ($p(\hat{q}) = 1$).

Заметим, что системы с алгоритмами GRED и DSRED устойчивы и не имеют бифуркаций (рис. 3, 4). Такое поведение объясняется отсутствием разрывов 1-го рода в их функциях сброса и подтверждается поведением $E[q]$ (рис. 11, 12).

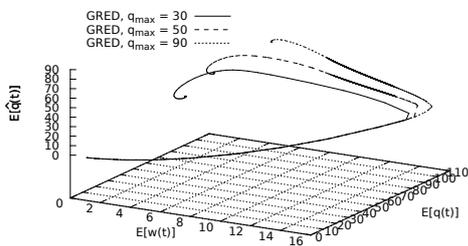


Рис. 9. Фазовый портрет для системы с GRED, $q_{\min} = 20$, $q_{\max} = 30, 50, 90$

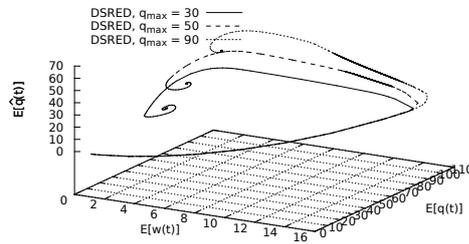


Рис. 10. Фазовый портрет для системы с DSRED, $q_{\min} = 20$, $q_{\max} = 30, 50, 90$

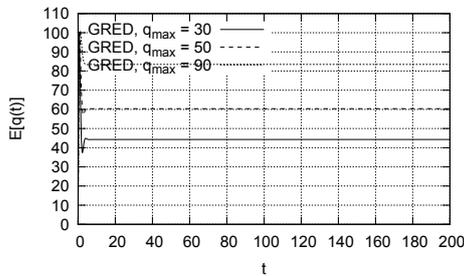


Рис. 11. Поведение $E[q(t)]$ для системы с GRED, $q_{\min} = 20$, $q_{\max} = 30, 50, 90$

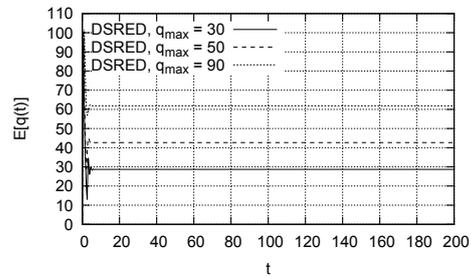


Рис. 12. Поведение $E[q(t)]$ для системы с DSRED, $q_{\min} = 20$, $q_{\max} = 30, 50, 90$

Литература

1. Королькова А. В. Определение области возникновения автоколебаний в системах типа RED // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2010. — № 1. — С. 103–105.
2. Королькова А. В., Кулябов Д. С., Черноуцанов А. И. К вопросу о классификации алгоритмов RED // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2009. — № 3. — С. 34–46.
3. Floyd S., Jacobson V. Random Early Detection Gateways for Congestion Avoidance // IEEE/ACM Transactions on Networking. — 1993. — No 1(4). — Pp. 397–413. — <http://www.icir.org/floyd/papers/red/red.html>.
4. Allman M., Paxson V., Stevens W. RFC2581-TCP Congestion Control // IETF. — 1999.
5. Misra V., Gong W.-B., Towsley D. Stochastic Differential Equation Modeling and Analysis of TCP-Window Size Behavior. — 1999.
6. Misra V., Gong W.-B., Towsley D. Fluid-Based Analysis of a Network of AQM Routers Supporting TCP Flows with an Application to RED // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. — 2000. — Vol. 30, issue 4. — Pp. 151–160.
7. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / под ред. В. И. Неймана. — М.: Машиностроение, 1979.
8. Floyd S., Gummadi R., Shenker S. Adaptive RED: An Algorithm for Increasing the Robustness of RED's Active Queue Management. — 2001. — <http://www.icir.org/floyd/papers/adaptiveRed.pdf>.
9. Kulkarni V. G. Fluid Models for Single Buffer Systems // Frontiers in Queueing. Models and Applications in Science and Engineering / Ed. by J. H. Dshalalow. — CRC Press, 1997. — Pp. 321–338.
10. van Foreest N. D. Queues with Congestion-Dependent Feedback: Ph.D. thesis. — Enschede: University of Twente, 2004. — <http://doc.utwente.nl/50783/>.
11. Iannaccone G., May M., Diot C. Aggregate Traffic Performance with Active Queue Management and Drop From Tail // SIGCOMM Comput. Commun. Rev. — 2001. — Vol. 31, No 3. — Pp. 4–13. — ISSN 0146-4833.
12. Zheng B., Atiquzzaman M. DSRED: A New Queue Management Scheme for the Next Generation Internet // IEICE TRANS. COMMUN. — 2006. — Vol. E89-B, No 3.
13. Modeling TCP Throughput: A Simple Model and its Empirical Validation: Techrep / J. Padhye, V. Firoiu, D. Towsley, J. Kurose. — Amherst, MA, USA, 1998. — http://www.ncstr1.org:8900/ncstr1/servlet/search?formname=detail&id=oai%3Ancstr1h%3Aumass_cs%3Ancstr1.umassa_cs%2F%2FUM-CS-1998-008.

UDC 004.021, 517.938, 519.2, 519.62

Mathematical Model of the Dynamic Behavior of RED-Like System Parameters

A. V. Korolkova, D. S. Kulyabov

*Telecommunication Systems Department
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, Russia, 117198*

In this paper a mathematical model of an autonomous system of three ordinary differential equations depending on parameters algorithm for active queue management such as Random Early Detection (RED) is constructed. The method for self-oscillation area evaluation and critical (stationary) point selection is introduced. The parametric and phase portraits for systems with algorithms RED, GRED, DSRED and ARED are analyzed.

Key words and phrases: Random Early Detection (RED), phase portrait, parametric portrait, bifurcation, self-oscillation, location of stability, stochastic differential equation, system ordinary differential equations.