Вестник РУДН Серия *Математика. Информатика. Физика.* № 2 (1). 2010. С. 11–25

УДК 519.175.4

Ослабленный закон «нуля или единицы» для случайных дистанционных графов

М. Е. Жуковский

Кафедра теории вероятностей
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Ленинские горы, д.1, корп. А, ГСП-1, Москва, Россия 119991

В этой работе изучается ослабленный j-закон нуля или единицы. Для случайных дистанционных графов получены результаты, схожие с утверждениями, касающимися закона нуля или единицы для случайных графов.

Ключевые слова: закон нуля или единицы, дистанционные графы, игра Эренфойхта.

1. Введение и история задачи

В работе речь пойдёт об одной известной задаче, которая лежит на стыке теории случайных графов, логики и комбинаторной геометрии. Прежде всего введём основные объекты.

1.1. Формулы первого порядка и игра Эренфойхта

Пусть U — конечное множество. Функция $R:\ U\times U\times\ldots\times U\to\{0,1\}$ от a аргументов называется *предикатом*, величина a — *арность* предиката R. *Сигнатура* S — это конечное множество предикатных символов $R_1,\ldots,R_s$, каждый с фиксированной арностью a_i (см. [1]). *Конечная S-структура* $\mathcal{A}=(U^{\mathcal{A}},R_1^{\mathcal{A}},\ldots,R_s^{\mathcal{A}}$, $c_1^{\mathcal{A}},\ldots,c_t^{\mathcal{A}})$ состоит из:

– конечного пространства $U^{\mathcal{A}}$;
– предикатов $R_i^{\mathcal{A}}$ арности a_i над $U^{\mathcal{A}}$;
– элементов $c_i^{\mathcal{A}}$ множества $U^{\mathcal{A}}$.

Формулы первого порядка над сигнатурой S строятся индуктивно с помощью

– символов из S;
– символа отношения $=$;
– логических связок $\neg,\Rightarrow,\Leftrightarrow,\vee,\wedge$;
– переменных $x,y,x_1\ldots$;
– кванторов $\forall,\exists$.

Опишем построение формул подробнее (см. [2]). Для начала заметим, что *свободной* называется переменная, от которой может зависеть истинность формулы. В противном случае переменная называется *связанной*. Кроме того, введём понятие *атома*. Это объект, который либо имеет вид $R_i(x_1,\ldots,x_{a_i})$, либо имеет вид $x=y$, где $x,y,x_1,\ldots,x_{a_i}$ — переменные. Атом является формулой. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторая S-структура. Рассмотрим произвольный набор элементов $c_{j_1}^{\mathcal{A}},\ldots,c_{j_{a_i}}^{\mathcal{A}}$. Если $R_i^{\mathcal{A}}(c_{j_1}^{\mathcal{A}},\ldots,c_{j_{a_i}}^{\mathcal{A}})=1$, то будем говорить, что формула $R_i(x_1,\ldots,x_{a_i})$ *истинна* на структуре $\mathcal{A}$ на наборе $(c_{j_1}^{\mathcal{A}},\ldots,c_{j_{a_i}}^{\mathcal{A}})$. В противном случае будем говорить, что формула *ложна*. Формула $x=y$ истинна только на наборах, состоящих из двух одинаковых элементов структуры, т.е. на наборах (c_j,c_j). Каждая из переменных $x,y,x_1,\ldots,x_{a_i}$ является свободной. Пусть $\varphi,\varphi_1,\varphi_2$ — формулы, X,X_1,X_2 и Y,Y_1,Y_2 — соответствующие множества свободных и связанных переменных, переменная x принадлежит X. Пусть также $X_1\cap Y_2=\emptyset$, $X_2\cap Y_1=\emptyset$. Конструкции $\neg\varphi$, $\varphi_1\vee\varphi_2$, $\varphi_1\wedge\varphi_2$, $\varphi_1\Rightarrow\varphi_2$, $\varphi_1\Leftrightarrow\varphi_2$, $\forall x\,\varphi$, $\exists x\,\varphi$ являются формулами. При

Статья поступила в редакцию 26 сентября 2009 г.
Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ N 09-01-00294.

этом $X \setminus \{x\}$ — множество свободных переменных формул $\forall x\,\varphi$, $\exists x\,\varphi$, а $Y \cup \{x\}$ — множество связанных. Так же, как и в случае атома, формула является истинной на некотором наборе элементов, если предикат, выражаемый этой формулой, принимает значение 1 на этом наборе. *Замкнутыми* называются формулы, не содержащие свободных переменных. Замкнутая формула либо всегда истинна на структуре $\mathcal{A}$, либо всегда ложна.

Если замкнутая формула φ первого порядка истинна на структуре $\mathcal{A}$, то будем говорить, что структура $\mathcal{A}$ *удовлетворяет* этой формуле, и писать $\mathcal{A} \vDash \varphi$. Формула φ *определяет класс* $\mathcal{C}$ конечных S-структур, если $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} \vDash \varphi$. В этом случае будем также говорить, что на сигнатуре S задано *свойство* L *первого порядка*, которое определяет класс $\mathcal{C}$, и что это свойство определено формулой φ.

Две формулы φ и φ' называются *эквивалентными*, если для любой S-структуры $\mathcal{A}$ выполнено $\mathcal{A} \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi'$.

Говорят, что формула находится в *предварённой нормальной форме*, если все кванторы у неё вынесены налево. Известно, что всякая формула эквивалентна некоторой формуле в предварённой нормальной форме.

Пусть на сигнатуре S задана некоторая структура $\mathcal{A}$. Пусть, кроме того, $W \subseteq U^{\mathcal{A}}$. Тогда *индуцированной подструктурой* $\mathcal{A} \downarrow W$ будем называть S-структуру, состоящую из множества W, элементов этого множества и предикатов $R_i^{\mathcal{A}\downarrow W}$, определённых на $W \times W \times \ldots \times W$, если выполнено

$$\forall i \quad \forall j_1, \ldots, j_{a_i} \quad \Big(c_{j_1}, \ldots, c_{j_{a_i}} \in W \Rightarrow R_i^{\mathcal{A}\downarrow W}(c_{j_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, c_{j_{a_i}}^{\mathcal{A}}) = R_i^{\mathcal{A}}(c_{j_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, c_{j_{a_i}}^{\mathcal{A}})\Big).$$

Две S-структуры $\mathcal{A} = (U^{\mathcal{A}}, R_1^{\mathcal{A}}, \ldots, R_s^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \ldots, c_t^{\mathcal{A}})$ и $\mathcal{B} = (U^{\mathcal{B}}, R_1^{\mathcal{B}}, \ldots, R_s^{\mathcal{B}}, c_1^{\mathcal{B}}, \ldots, c_t^{\mathcal{B}})$ называются *изоморфными* (пишем $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$), если выполнено условие

$$\forall i \quad \forall j_1, \ldots, j_{a_i} \quad R_i^{\mathcal{A}}(c_{j_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, c_{j_{a_i}}^{\mathcal{A}}) = R_i^{\mathcal{B}}(c_{j_1}^{\mathcal{B}}, \ldots, c_{j_{a_i}}^{\mathcal{B}}).$$

Определим игру $\mathrm{EHR}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)$ на двух S-структурах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ с двумя игроками, Новатором и Консерватором, и с фиксированным числом раундов k. Она носит название *игры Эренфойхта* (см. [2,3]). На ν-ом ходу ($1 \leqslant \nu \leqslant k$) Новатор выбирает элемент в любой из структур (он выбирает либо $c_{j_\nu}^{\mathcal{A}}$, либо $c_{j'_\nu}^{\mathcal{B}}$). Затем Консерватор выбирает элемент из другой оставшейся структуры. Если Новатор выбирает на μ-ом ходу, скажем, элемент $c_{j_\mu}^{\mathcal{A}}$, $j_\mu = j_\nu$ ($\nu < \mu$), то Консерватор должен выбрать $c_{j'_\nu}^{\mathcal{B}}$. Если же на этом ходу Новатор выбирает, скажем, элемент $c_{j_\mu}^{\mathcal{A}}$, $j_\mu \notin \{j_1, \ldots, j_{\mu-1}\}$, то и Консерватор должен выбрать такой элемент $c_{j'_\mu}^{\mathcal{B}}$, что $j'_\mu \notin \{j'_1, \ldots, j'_{\mu-1}\}$. Если он не может этого сделать, то игру выигрывает Новатор. К концу игры выбраны элементы $c_{j_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, c_{j_k}^{\mathcal{A}}$ структуры $\mathcal{A}$, а также элементы $c_{j'_1}^{\mathcal{B}}, \ldots, c_{j'_k}^{\mathcal{B}}$ структуры $\mathcal{B}$. Некоторые из этих элементов могут совпадать. Выберем из них только различные: $c_{h_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, c_{h_l}^{\mathcal{A}}$; $c_{h'_1}^{\mathcal{B}}, \ldots, c_{h'_l}^{\mathcal{B}}$, $l \leqslant k$. Консерватор побеждает тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{A} \downarrow \{c_{h_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, c_{h_l}^{\mathcal{A}}\} \cong \mathcal{B} \downarrow \{c_{h'_1}^{\mathcal{B}}, \ldots, c_{h'_l}^{\mathcal{B}}\}.$$

В 1960 году А. Эренфойхт (см. [3]) сформулировал и доказал следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{C}$ — класс структур над некоторой сигнатурой S, определяемый замкнутой формулой φ первого порядка. Существует такое k, что если $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ и $\mathcal{B} \notin \mathcal{C}$, то у Новатора есть выигрышная стратегия в игре* $\mathrm{EHR}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)$.

1.2. Случайные графы и законы «нуля или единицы»

Пусть N является натуральным числом, $0 \leqslant p \leqslant 1$. Рассмотрим множество $\Omega_N = \{G = (V, E)\}$ всех неориентированных графов без петель и кратных рёбер с множеством вершин $V = \{1, \dots, N\}$. Назовём *случайным графом* вероятностное пространство $G(N, p) = (\Omega_N, \mathcal{F}_N, \mathcal{P}_{N,p})$, где $\mathcal{F}_N = 2^{\Omega_N}$, $\mathcal{P}_{N,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_N^2 - |E|}$. Иными словами, любые две различные вершины графа в пространстве $G(N, p)$ соединены ребром с вероятностью p независимо от любых двух других (см. [4]). В дальнейшем мы будем рассматривать модели, в которых вероятность p зависит от количества вершин N, причём нас будет интересовать асимптотическое поведение вероятностей свойств случайных графов при $N \to \infty$.

Свойства графов первого порядка (классы $\mathcal{C} \subseteq \Omega_N$) определяются формулами первого порядка, которые строятся описанным выше способом с помощью:
– символов отношения $\sim, =$;
– логических связок $\neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \vee, \wedge$;
– переменных $x, y, x_1 \dots$;
– кванторов $\forall, \exists$.

Рассматриваются, опять же, только замкнутые формулы. Символ отношения $\sim$ арности 2 выражает свойство двух вершин быть связанными ребром. Будем говорить о событии «*граф G обладает свойством L*», понимая под этим элемент $\mathcal{F}_N$, являющийся множеством всех графов из Ω_N, которые обладают свойством L. Будем обозначать это событие $G \vDash L$. Также в дальнейшем, если $\lim\limits_{N\to\infty} \mathcal{P}_{N,p}(G \vDash L) = 1$, то будем говорить, что случайный граф *почти наверное* обладает свойством L.

Случайный граф подчиняется *закону «нуля или единицы»*(см. [5–8]), если для любого свойства L первого порядка выполняется одно из двух условий
1) $\lim_{N\to\infty} \mathcal{P}_{N,p}(G \vDash L) = 0$,
2) $\lim_{N\to\infty} \mathcal{P}_{N,p}(G \vDash L) = 1$.

В 1969 году Ю.В. Глебский, Д.И. Коган, М.И. Легонький и В.А. Таланов (см. [6]) получили следующий закон «нуля или единицы», который в 1976 году был независимо доказан Р. Фагиным (см. [7]).

Теорема 2. *Пусть функция $p = p(N)$ такова, что $pN^\alpha \to \infty$ при $N \to \infty$ и $(1-p)N^\alpha \to \infty$ при $N \to \infty$ для любого $\alpha > 0$, тогда случайный граф подчиняется закону «нуля или единицы».*

Также в статье [8] С. Шелла и Дж. Спенсера описан результат, в котором расширен класс функций, подчиняющихся закону «нуля или единицы».

Теорема 3. *Пусть $p(N) = N^{-\alpha}$, где α — иррациональное, $0 < \alpha < 1$, тогда случайный граф подчиняется закону «нуля или единицы».*

В следующем разделе сформулируем ещё одну задачу подобного типа, которая мотивирована классическими вопросами комбинаторной геометрии (см. [9, 10]) и которой будем заниматься в дальнейшем.

2. Постановка новой задачи

2.1. Формулы с одним квантором и новая игра

Пусть определена некоторая сигнатура $S = (R_1, \dots, R_s)$. Рассмотрим формулы над сигнатурой S, построенные обычным способом с помощью:
– символов из S;
– символа отношения $=$;
– логических связок $\neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \vee, \wedge$;
– переменных $x, y, x_1 \dots$;
– квантора (либо $\forall$, либо $\exists$).

Таким образом, в записи формулы участвует только один квантор (хотя встречаться один и тот же квантор может сколько угодно раз). Примером такой формулы может послужить $\forall x \forall y \left((R_1(x,y) \wedge R_2(x,z)) \Rightarrow R_1(x,z)\right)$. Пусть φ^1 — подобная формула. Пусть X^1 — множество свободных переменных этой формулы, Y^1 — множество связанных переменных. Пусть также $|X^1| = \alpha^1$, $|Y^1| = \beta^1$.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — две S-структуры. Определим *ослабленную игру Эренфойхта* $\mathrm{EHR}^1(\mathcal{A},\mathcal{B},k)$ с двумя игроками, Новатором и Консерватором, и фиксированным числом раундов k. Она будет отличаться от игры $\mathrm{EHR}(\mathcal{A},\mathcal{B},k)$ только тем, что Новатор не имеет права в каждом раунде выбирать структуру, из которой затем он будет выбирать элемент. Он волен выбирать структуру, из которой впоследствии будет выбирать (произвольные) элементы, только в первом раунде. Во всех последующих раундах он обязан выбирать элемент только из выбранной в первом раунде структуры.

2.2. Дистанционные графы и ослабленный закон «нуля или единицы»

Если при определении случайного графа считать, что разные пары вершин соединены независимо друг от друга с *различными* вероятностями, т.е. ребро $\{x_i, x_j\}$, $1 \leqslant i, j \leqslant N$, проведено с вероятностью $p_{ij} \in [0,1]$, то будем обозначать такое вероятностное пространство $G(N, p_{ij})$. Одним из важнейших примеров этого случайного графа является случайный граф $G(\mathcal{G}_N, p)$, где $\mathcal{G}_N = (\mathcal{V}_N, \mathcal{E}_N)$ — неориентированный граф на N вершинах без петель и кратных рёбер, а именно, $G(\mathcal{G}_N, p) = G(N, p_{ij})$, коль скоро

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & \{x_i, x_j\} \in \mathcal{E}_N; \\ 0, & \{x_i, x_j\} \notin \mathcal{E}_N. \end{cases}$$

Иными словами, $G(\mathcal{G}_N, p)$ — это вероятностное пространство

$$G(\mathcal{G}_N, p) = \left(\Omega_{\mathcal{G}_N}, \mathcal{F}_{\mathcal{G}_N}, \mathcal{P}_{\mathcal{G}_N, p}\right),$$

где

$$\Omega_{\mathcal{G}_N} = \{\mathcal{G}_N^0 = (\mathcal{V}_N^0, \mathcal{E}_N^0) : \ \mathcal{V}_N^0 = \mathcal{V}_N, \ \mathcal{E}_N^0 \subseteq \mathcal{E}_N\},$$
$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}_N} = 2^{\Omega_{\mathcal{G}_N}}, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{G}_N,p}(\mathcal{G}_N^0) = p^{|\mathcal{E}_N^0|}(1-p)^{|\mathcal{E}_N| - |\mathcal{E}_N^0|}.$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $n = 4k$. Положим $N = C_n^{n/2}$. Рассмотрим граф $G_N^{\mathrm{dist}} = (V_N^{\mathrm{dist}}, E_N^{\mathrm{dist}})$, в котором $V_N^{\mathrm{dist}} = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : \ x_i \in \{0,1\}, \ x_1 + \ldots + x_n = n/2\}$, $E_N^{\mathrm{dist}} = \left\{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in V_N^{\mathrm{dist}} \times V_N^{\mathrm{dist}} : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = k\right\}$, где $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ — евклидово скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Заметим, что $|V_N^{\mathrm{dist}}| = N$. Рассматриваемые графы называются *дистанционными*, поскольку их ребра отвечают тем парам их вершин, которые отстоят друг от друга на некоторое наперёд заданное расстояние в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрение такого рода графов мотивировано классической задачей комбинаторной геометрии о хроматическом числе пространства (см. [9, 10]).

В настоящей работе будем рассматривать *случайные дистанционные графы* $G(G_N^{\mathrm{dist}}, p)$. В дальнейшем покажем, что аналог теоремы 2 для него не выполнен. Однако получены и положительные результаты. Для их формулировки нам потребуется определение *ослабленного закона «нуля или единицы»*.

Скажем, что *случайный граф $G(G_N^{\mathrm{dist}}, p)$ подчиняется ослабленному закону «нуля или единицы»*, если для любого свойства L^1, определённого замкнутой формулой φ^1 с одним квантором, выполняется одно из двух условий

1) $\lim\limits_{N \to \infty} \mathcal{P}_{G_N^{\mathrm{dist}}, p}(G \models L^1) = 0$,
2) $\lim\limits_{N \to \infty} \mathcal{P}_{G_N^{\mathrm{dist}}, p}(G \models L^1) = 1$.

Вообще, пусть $\{\mathcal{G}_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ — последовательность неориентированных графов без петель и кратных рёбер, $|V(\mathcal{G}_N)| = N$. Будем говорить, что *последовательность случайных графов* $\{G(\mathcal{G}_N, p(N))\}_{N\in\mathbb{N}}$ *подчиняется ослабленному закону «нуля или единицы»*, если для любого свойства L^1, определённого замкнутой формулой φ^1 с одним квантором, выполняется одно из двух условий

1) $\lim\limits_{N\to\infty} \mathcal{P}_{\mathcal{G}_N,p}(\mathcal{G} \vDash L^1) = 0$,
2) $\lim\limits_{N\to\infty} \mathcal{P}_{\mathcal{G}_N,p}(\mathcal{G} \vDash L^1) = 1$.

3. Формулировки результатов

Прежде всего приведём аналог теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{C}$ — класс структур над некоторой сигнатурой S, определяемый замкнутой формулой φ^1 из пункта 2.1. Существует такое k, что если $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ и $\mathcal{B} \notin \mathcal{C}$, то у Новатора есть выигрышная стратегия в игре* $\mathrm{EHR}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)$.

Теперь дадим формулировку теоремы, аналогичной теореме 2.

Теорема 5. *Пусть функция $p = p(N)$ такова, что $pN^\alpha \to \infty$ при $N \to \infty$ и $(1-p)N^\alpha \to \infty$ при $N \to \infty$ для любого $\alpha > 0$, тогда для случайных дистанционных графов $G(G_N^{\mathrm{dist}}, p)$ выполняется ослабленный закон «нуля или единицы».*

Сформулируем, наконец, результат, позволяющий отойти от условия замкнутости формулы, с которой мы работаем.

Теорема 6. *Пусть функция $p = p(N)$ такова, что $pN^\alpha \to \infty$ при $N \to \infty$ и $(1-p)N^\alpha \to \infty$ при $N \to \infty$ для любого $\alpha > 0$. Пусть φ^1 — некоторая незамкнутая формула из пункта 2.1, определяющая свойство L^1. Тогда либо почти наверное существует $\left[\frac{N^{\frac{1}{2^{\alpha^1+\beta^1+4}}}}{2(\alpha^1+\beta^1)}\right]$ индуцированных подграфов графа $G(G_N^{\mathrm{dist}}, p)$ на α^1 вершинах, которые (вершины) можно занумеровать так, что если подставить их вместо свободных переменных в формулу φ^1, то полученные замкнутые формулы $\widetilde{\varphi}^1$ будут выражать свойства графов $\widetilde{L}^1$, для которых будет выполнено $\lim\limits_{N\to\infty} \mathcal{P}_{G_N^{\mathrm{dist}},p}(G \vDash \widetilde{L}^1) = 1$, либо почти наверное существует $\left[\frac{N^{\frac{1}{2^{\alpha^1+\beta^1+4}}}}{2(\alpha^1+\beta^1)}\right]$ индуцированных подграфов на α^1 вершинах, которые (вершины) можно занумеровать так, что если подставить их вместо свободных переменных в формулу φ^1, то полученные замкнутые формулы $\widetilde{\varphi}^1$ будут выражать свойства графов $\widetilde{L}^1$, для которых будет выполнено $\lim\limits_{N\to\infty} \mathcal{P}_{G_N^{\mathrm{dist}},p}(G \vDash \widetilde{L}^1) = 0$.*

Наиболее значимым в теореме является тот факт, что упомянутые в ней индуцированные подграфы не просто существуют, но что количество их стремится к бесконечности с ростом N.

В следующем разделе покажем, почему пришлось ослабить классические законы «нуля или единицы». В разделе 5 приведём доказательства теорем 4–6.

4. Опровержение закона «нуля или единицы» для дистанционных графов

Рассмотрим случайный граф $G(G_N^{\mathrm{dist}}, p)$. Докажем, что для него не выполнен закон «нуля или единицы» ни при каком $p = p(N)$ с условием $pN^\alpha \to \infty$ при любом положительном α, т.е. не выполнена теорема 2. Пусть $G_{N_1}^{\mathrm{dist}}$ — граф на N_1

вершинах, $N_1 = C_{n_1}^{n_1/2}$, $n_1 = 4k_1$ и k_1 — нечётное число. Пусть также количество вершин графа $G_{N_2}^{\rm dist}$ равно N_2, $N_2 = C_{n_2}^{n_2/2}$, $n_2 = 4k_2$ и k_2 — чётное число.

Рассмотрим три вершины графа $G_{N_1}^{\rm dist}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= (1,\ldots,1,\ 1,\ldots,1,\ 0,\ldots,0,\ 0,\ldots,0),\\
\mathbf{x}_2 &= (1,\ldots,1,\ 0,\ldots,0,\ 1,\ldots,1,\ 0,\ldots,0),\\
\mathbf{x}_3 &= (\underbrace{1,\ldots,1}_{k_1},\ \underbrace{0,\ldots,0}_{k_1},\ \underbrace{0,\ldots,0}_{k_1},\ \underbrace{1,\ldots,1}_{k_1}).
\end{aligned}$$

Предположим, что найдётся вершина $\mathbf{x}_4$, соединённая ребром с каждой из $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$. Тогда она должна иметь k_1 единиц как среди первых $2k_1$ координат, так и среди оставшихся. Предположим, что она имеет y единиц среди первых k_1 координат. В силу того, что она соединена с $\mathbf{x}_2$ и $\mathbf{x}_3$, она должна иметь $k_1 - y$ единиц как среди координат с номерами $2k_1+1,\ldots,3k_1$, так и среди координат с номерами $3k_1+1,\ldots,4k_1$. Следовательно, $k_1 = 2(k_1 - y)$. Но число k_1 — нечётное. Получили противоречие. Таким образом, не найдётся вершины, соединённой с каждой из $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.

Пусть теперь $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ — три произвольные вершины графа $G_{N_2}^{\rm dist}$. Перенумеруем их координаты следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= (1,\ldots,1,\ 1,\ldots,1,\ 1,\ldots,1,\ 1,\ldots,1,\ 0,\ldots,0,\ 0,\ldots,0,\ 0,\ldots,0,\ 0,\ldots,0),\\
\mathbf{x}_2 &= (1,\ldots,1,\ 1,\ldots,1,\ 0,\ldots,0,\ 0,\ldots,0,\ 1,\ldots,1,\ 1,\ldots,1,\ 0,\ldots,0,\ 0,\ldots,0),\\
\mathbf{x}_3 &= (\underbrace{1,\ldots,1}_{k_2^1},\ \underbrace{0,\ldots,0}_{k_2^2},\ \underbrace{1,\ldots,1}_{k_2^3},\ \underbrace{0,\ldots,0}_{k_2^4},\ \underbrace{1,\ldots,1}_{k_2^5},\ \underbrace{0,\ldots,0}_{k_2^6},\ \underbrace{1,\ldots,1}_{k_2^7},\ \underbrace{0,\ldots,0}_{k_2^8}).
\end{aligned}$$

Здесь, разумеется, для вектора $\mathbf{k_2} = (k_2^1,\ldots,k_2^8)$ и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

выполнено $\mathbf{k_2}A = (2k_2, 2k_2, 2k_2, 2k_2)$.

Пусть $k_2^i \equiv r_i \pmod 4$, $1 \leqslant i \leqslant 8$, $r_i \in \{0,\ldots,3\}$. Докажем, что найдутся такие $v_i \in \mathbb{Z}_+$, что $v_i \leqslant r_i$ и выполняется равенство

$$2\mathbf{v}A = \mathbf{r}A, \tag{1}$$

где $\mathbf{v} = (v_1,\ldots,v_8)$, $\mathbf{r} = (r_1,\ldots,r_8)$. Заметим, что $\mathbf{r}A = \mathbf{u}$, при этом $\mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_4)$ и $u_i \equiv 0 \pmod 4$, $1 \leqslant i \leqslant 4$.

Предположим, что число $k_2^1 + k_2^2$ — чётное, тогда, как не сложно заметить, числа $k_2^3+k_2^4, k_2^5+k_2^6, k_2^7+k_2^8$ тоже чётные. В силу того, что число $k_2^1+k_2^3+k_2^5+k_2^7$ — чётное, либо каждое из $k_2^1, k_2^3, k_2^5, k_2^7$ нечётное, либо ровно два их них, либо все чётные. Если некоторое k_2^{2j+1} — чётное, то пусть $v_{2j+1} = r_{2j+1}/2$, $v_{2j+2} = r_{2j+2}/2$. Если все нечётные, то пусть $v_1 = (r_1-1)/2$, $v_2 = (r_2+1)/2$, $v_3 = (r_3+1)/2$, $v_4 = (r_4-1)/2$, $v_5 = (r_5-1)/2$, $v_6 = (r_6+1)/2$, $v_7 = (r_7+1)/2$, $v_8 = (r_8-1)/2$. Если, скажем, k_2^1, k_2^3 — нечётные, а k_2^5 и k_2^7 — чётные, то пусть $v_1 = (r_1-1)/2$,

$v_2 = (r_2+1)/2$, $v_3 = (r_3+1)/2$, $v_4 = (r_4-1)/2$. При таких значениях v_i равенство (1) будет выполняться.

Пусть теперь $k_2^1+k_2^2$ — нечётное. Тогда $k_2^3+k_2^4, k_2^5+k_2^6, k_2^7+k_2^8$ — тоже нечётные. Опять же либо каждое из $k_2^1, k_2^3, k_2^5, k_2^7$ нечётное, либо ровно два из них, либо все чётные. Если все чётные, то определяем вектор $\mathbf{v}$ следующим образом:

$$\mathbf{v} = (r_1/2, (r_2-1)/2, r_3/2, (r_4+1)/2, r_5/2, (r_6+1)/2, r_7/2, (r_8-1)/2).$$

В случае, когда все нечётные,

$$\mathbf{v} = ((r_1-1)/2, r_2/2, (r_3+1)/2, r_4/2, (r_5+1)/2, r_6/2, (r_7-1)/2, r_8/2).$$

Осталось рассмотреть три случая (остальные три им аналогичны):

1) k_2^1, k_2^3 — нечётные, а k_2^5, k_2^7 — чётные. Тогда

$$\mathbf{v} = ((r_1-1)/2, r_2/2, (r_3+1)/2, r_4/2, r_5/2, (r_6+1)/2, r_7/2, (r_8-1)/2).$$

2) k_2^1, k_2^5 — нечётные, а k_2^3, k_2^7 — чётные. Тогда

$$\mathbf{v} = ((r_1-1)/2, r_2/2, r_3/2, (r_4+1)/2, (r_5+1)/2, r_6/2, r_7/2, (r_8-1)/2).$$

3) k_2^1, k_2^7 — нечётные, а k_2^5, k_2^3 — чётные. Если $r_2 = r_3 = r_5 = r_8 = 0$, то $r_1 + r_4 = r_1 + r_6 = r_1 + r_7 = r_6 + r_7 = 4$, но такого быть не может. Если же $r_2 = 2$, то

$$\mathbf{v} = ((r_1+1)/2, (r_2-2)/2, r_3/2, (r_4+1)/2, r_5/2, (r_6+1)/2, (r_7-1)/2, r_8/2).$$

Аналогичный подбор осуществляем, если $r_3 = 2$ и т.д.

Итак, всегда найдётся такой вектор $\mathbf{v}$, для которого выполняется (1). Покажем, что можно подобрать такие числа $q_i \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant i \leqslant 8$, что $q_i \leqslant k_2^i$, $\sum\limits_{i=1}^{8} q_i = 2k_2$ и любая вершина, содержащая ровно q_1 единиц среди первых k_2^1 координат,. . . , ровно q_8 единиц среди последних k_2^8 координат, соединена ребром с каждой из $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$. Для этого достаточно положить

$$q_i = \frac{k_2^i - r_i}{2} + v_i, \;\; 1 \leqslant i \leqslant 8. \tag{2}$$

Оценим снизу количество вершин ω_3, соединённых ребром с каждой из $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$. В силу того, что $\sum\limits_{i=1}^{8} k_2^i = n_2$, найдётся такое j, что $k_2^j \geqslant n_2/8$. Заметим, что в силу (2) выполнено неравенство $[(k_2^j - 4)/2] < q_j \leqslant [(k_2^j + 4)/2]$. Следовательно, при достаточно больших n выполнено неравенство: $\omega_3 \geqslant C_{k_2^j}^{q_j} \geqslant C_{n_2/8}^{[n_2/32]}$.

Рассмотрим замкнутую формулу первого порядка

$$\varphi = \forall x_1 \, \forall x_2 \, \forall x_3 \, \exists x_4 \;\; ((x_1 \sim x_4) \wedge (x_2 \sim x_4) \wedge (x_3 \sim x_4)),$$

которая выражает следующее свойство L графов: «для любых трёх вершин найдётся четвёртая, соединённая ребром с каждой из них». Случайные графы $G(G_{N_1}^{\mathrm{dist}}, p)$ с вероятностью 1 не обладают этим свойством. Случайный граф $G(G_{N_2}^{\mathrm{dist}}, p)$ обладает этим свойством с вероятностью $\mathcal{P}_{G_{N_2}^{\mathrm{dist}}, p}(G \models L)$, причём

$$1 - \mathcal{P}_{G_{N_2}^{\mathrm{dist}}, p}(G \models L) \leqslant C_{N_2}^3 \left(1 - p^3\right)^{C_{n_2/8}^{[n_2/32]}}.$$

Применив формулу Стирлинга, получим

$$C_{n_2/8}^{[n_2/32]} \sim \frac{\sqrt{n_2/8}(n_2/8)^{n_2/8}}{\sqrt{2\pi[n_2/32](n_2/8-[n_2/32])}[n_2/32]^{[n_2/32]}(n_2/8-[n_2/32])^{n_2/8-[n_2/32]}}.$$

Следовательно, при достаточно больших n_2 выполнены неравенства:

$$C_{n_2/8}^{[n_2/32]} > \frac{\sqrt{n_2/8}(n_2/8)^{n_2/8}}{\sqrt{2\pi n_2/16(3n_2/32)}(n_2/16)^{n_2/32}(3n_2/32)^{3n_2/32}},$$

$$C_{n_2/8}^{[n_2/32]} > \sqrt{\frac{32}{3\pi n_2}} \cdot \frac{2^{7n_2/32}}{3^{3n_2/32}}.$$

Положим $c = (128/27)^{1/32} > 1$. Тогда $C_{n_2/8}^{[n_2/32]} > (c+\delta_1(n_2))^{n_2}$, где $\delta_1(n_2) \to 0$ при $n_2 \to \infty$. Далее,

$$(1-p^3)^{C_{n_2/8}^{[n_2/32]}} < (1-p^3)^{(c+\delta_1(n_2))^{n_2}} \leqslant \exp\left(-p^3(c+\delta_1(n_2))^{n_2}\right) = \exp\left(-(c+\delta_2(n_2))^{n_2}\right),$$

где $\delta_2(n_2) \to 0$ при $n_2 \to \infty$.

Так как $N_2 \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{n_2}}{\sqrt{n_2}}$, то $(N_2)^3 = (8+o(1))^{n_2}$. Поэтому

$$C_{N_2}^3 = \Theta((N_2)^3) = (8+\delta_3(n_2))^{n_2},$$

где $\delta_3(n_2) \to 0$ при $n_2 \to \infty$. В силу этого при достаточно больших n_2 выполнено неравенство

$$C_{N_2}^3 \left(1-p^3\right)^{C_{n_2/8}^{[n_2/32]}} < \frac{(8+\delta_3(n_2))^{n_2}}{\exp\left((c+\delta_2(n_2))^{n_2}\right)}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty,\, 2|k} \mathcal{P}_{G_N^{\mathrm{dist}},p}(G \models L) = 1$.

Таким образом, не существует предела у последовательности $\{\mathcal{P}_{G_N^{\mathrm{dist}},p}(G \models L)\}_{k\in\mathbb{N}}$, т.е. теорема 2 для случайных дистанционных графов не выполнена.

5. Доказательства теорем

Доказательство (теоремы 4). Сформулируем и докажем лемму, которая понадобится нам для доказательства теоремы 4.

Пусть задана сигнатура $S = (R_1, \ldots, R_s)$. Рассмотрим формулу φ^1, множества X^1, Y^1 и числа α^1, β^1, определённые в пункте 2.1. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — две S-структуры.

Лемма 1. *Если Консерватор побеждает в игре* $\mathrm{EHR}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \alpha^1+\beta^1)$, *то для любых (не обязательно различных) элементов* $c_{j_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, c_{j_{\alpha^1}}^{\mathcal{A}}$ *(элементов* $c_{j_1'}^{\mathcal{B}}, \ldots, c_{j_{\alpha^1}'}^{\mathcal{B}}$*) найдутся такие элементы* $c_{j_1'}^{\mathcal{B}}, \ldots, c_{j_{\alpha^1}'}^{\mathcal{B}}$ *(элементы* $c_{j_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, c_{j_{\alpha^1}}^{\mathcal{A}}$*), что формула* φ^1 *либо одновременно истинна на структуре* $\mathcal{A}$ *на наборе* $c_{j_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, c_{j_{\alpha^1}}^{\mathcal{A}}$ *и на структуре* $\mathcal{B}$ *на наборе* $c_{j_1'}^{\mathcal{B}}, \ldots, c_{j_{\alpha^1}'}^{\mathcal{B}}$, *либо одновременно ложна на этих двух структурах и наборах.*

Доказательство. Предположим, что формула φ^1 содержит только кванторы $\exists$, т.е. имеет вид $\exists x_{\alpha^1+1}\, \exists x_{\alpha^1+2} \ldots \exists x_{\alpha^1+\beta^1}\, \varphi_0^1(x_1, \ldots, x_{\alpha^1}, x_{\alpha^1+1}, \ldots, x_{\alpha^1+\beta^1})$, где φ_0^1 — формула, не содержащая связанных переменных. Пусть φ^1 истинна на структуре $\mathcal{A}$ на наборе $c_{j_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, c_{j_{\alpha^1}}^{\mathcal{A}}$. Тогда найдутся такие $c_{j_{\alpha^1+1}}^{\mathcal{A}}, \ldots, c_{j_{\alpha^1+\beta^1}}^{\mathcal{A}}$, что формула φ_0^1 истинна на наборе $\overline{c_j^{\mathcal{A}}} = c_{j_1}^{\mathcal{A}}, \ldots, c_{j_{\alpha^1}}^{\mathcal{A}}, c_{j_{\alpha^1+1}}^{\mathcal{A}}, \ldots, c_{j_{\alpha^1+\beta^1}}^{\mathcal{A}}$. Пусть Новатор в первом раунде выбирает структуру $\mathcal{A}$ и элемент $c^{\mathcal{A}}_{j_1}$, а в последующих раундах выбирает все оставшиеся элементы набора $\overline{c^{\mathcal{A}}_{j}}$. Тогда Консерватор, в силу условия леммы, сможет выбрать такие элементы $c^{\mathcal{B}}_{j'_1}, \ldots, c^{\mathcal{B}}_{j'_{\alpha^1}}, c^{\mathcal{B}}_{j'_{\alpha^1+1}}, \ldots, c^{\mathcal{B}}_{j'_{\alpha^1+\beta^1}}$ структуры $\mathcal{B}$, образующие набор $\overline{c^{\mathcal{B}}_{j'}}$, что формула φ^1_0 истинна на наборе $\overline{c^{\mathcal{B}}_{j'}}$. Следовательно, формула φ^1 истинна на структуре $\mathcal{B}$ на наборе $c^{\mathcal{B}}_{j'_1}, \ldots, c^{\mathcal{B}}_{j'_{\alpha^1}}$. Если же формула φ^1 ложна на структуре $\mathcal{A}$ на наборе $c^{\mathcal{A}}_{j_1}, \ldots, c^{\mathcal{A}}_{j_{\alpha^1}}$, то в силу определения игры $\mathrm{EHR}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \alpha^1 + \beta^1)$ и эквивалентных структур она будет ложна и на структуре $\mathcal{B}$ на наборе $c^{\mathcal{B}}_{j'_1}, \ldots, c^{\mathcal{B}}_{j'_{\alpha^1}}$.

Если формула φ^1 имеет вид $\forall x_{\alpha^1+1} \forall x_{\alpha^1+2} \ldots \forall x_{\alpha^1+\beta^1}\ \varphi^1_0(x_1, \ldots, x_{\alpha^1}, x_{\alpha^1+1}, \ldots, x_{\alpha^1+\beta^1})$ и, скажем, истинна на структуре $\mathcal{A}$ на наборе $c^{\mathcal{A}}_{j_1}, \ldots, c^{\mathcal{A}}_{j_{\alpha^1}}$, то можно рассмотреть формулу $\neg\varphi^1 = \exists x_{\alpha^1+1} \exists x_{\alpha^1+2} \ldots \exists x_{\alpha^1+\beta^1}\ \neg\varphi^1_0(x_1, \ldots, x_{\alpha^1}, x_{\alpha^1+1}, \ldots, x_{\alpha^1+\beta^1})$, и проделать те же самые рассуждения. Лемма доказана. □

Завершим доказательство теоремы 4. Пусть φ^1 — замкнутая формула, а $\mathcal{C}$ — класс структур, определяемый этой формулой. Будем считать, что выполнено равенство $\varphi^1 = \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_k\, \varphi^1_0(x_1, \ldots, x_k)$, где все переменные формулы φ^1_0 являются свободными (в противном случае можно рассмотреть формулу $\neg\varphi^1$). Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — две S-структуры и, вопреки утверждению теоремы 4, Консерватор побеждает в игре $\mathrm{EHR}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)$. Тогда для формулы φ^1_0 выполнено условие леммы 1 с $\alpha^1 = k$, $\beta^1 = 0$, а следовательно, выполнено свойство $((\mathcal{A} \in \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{B} \in \mathcal{C})) \vee ((\mathcal{A} \notin \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{B} \notin \mathcal{C}))$. Имеем противоречие с условием теоремы 4, которая, тем самым, доказана. □

5.1. Доказательство теоремы 5 и теоремы 6

5.1.1. Вспомогательные леммы и конструкции

Пусть $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — последовательность неориентированных графов без петель и кратных рёбер, $|V(\mathcal{G}_i)| = i$, при этом для любых различных $i, j \in \mathbb{N}$ выполнено $V(\mathcal{G}_i) \cap V(\mathcal{G}_j) = \emptyset$. Пусть задана некоторая функция $p : \mathbb{N} \to [0, 1]$. Рассмотрим вероятностное пространство

$$G(\mathcal{G}_N, p(N)) \times G(\mathcal{G}_M, p(M)) = \left(\Omega_{\mathcal{G}_N} \times \Omega_{\mathcal{G}_M}, \mathcal{F}_{\mathcal{G}_N} \times \mathcal{F}_{\mathcal{G}_M}, \mathcal{P}_{\mathcal{G}_N, \mathcal{G}_M, p}\right),$$

где $\mathcal{P}_{\mathcal{G}_N, \mathcal{G}_M, p}((\mathcal{G}^0_N, \mathcal{G}^0_M)) = \mathcal{P}_{\mathcal{G}_N, p}(\mathcal{G}^0_N) \cdot \mathcal{P}_{\mathcal{G}_M, p}(\mathcal{G}^0_M)$ для любых графов $\mathcal{G}^0_N$ и $\mathcal{G}^0_M$, принадлежащих множествам $\Omega_{\mathcal{G}_N}$ и $\Omega_{\mathcal{G}_M}$ соответственно. Под $X \times Y$ понимается декартово произведение множеств X и Y. Под событием «Консерватор победит в $\mathrm{EHR}(G, H, t)$» будем понимать подмножество в $\Omega_{\mathcal{G}_N} \times \Omega_{\mathcal{G}_M}$ всех пар графов, на которых Консерватор в игре с t раундами побеждает.

Лемма 2. *Если для любого натурального t выполнено*

$$\lim_{N, M \to \infty} \mathcal{P}_{\mathcal{G}_N, \mathcal{G}_M, p}\, (\text{Консерватор победит в } \mathrm{EHR}^1(G, H, t)) = 1,$$

то для случайного графа $G(\mathcal{G}_N, p)$ выполнен ослабленный закон «нуля или единицы».

Доказательство леммы 2 опирается на утверждение теоремы 4 и дословно повторяет доказательство аналогичной леммы для не ослабленного закона «нуля или единицы» (см. [5]).

Определим также свойство графов, которое понадобится для доказательства теоремы 5 и теоремы 6. Граф G обладает *свойством расширения полного уровня s*, если для любых различных вершин $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_a, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_b$ графа G, где $a + b \leqslant s$, найдётся вершина $\mathbf{x}$ такая, что $\{\mathbf{x}, \mathbf{u}_i\} \in E(G),\ 1 \leqslant i \leqslant a$, и $\{\mathbf{x}, \mathbf{v}_j\} \notin E(G),\ 1 \leqslant j \leqslant b$ (см. [5]).

Утверждение 1. Если графы G и H обладают свойством расширения полного уровня $s-1$, то Консерватор победит в $\mathrm{EHR}(G,H,s)$.

Доказательство. Консерватору надо придерживаться следующей простой стратегии. На i-ом раунде, если $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{i-1},\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{i-1}$ уже выбраны, и Новатор выбирает $\mathbf{x}_i$, Консерватор, в силу свойства расширения полного уровня $s-1$, сможет найти вершину $\mathbf{y}_i$, смежную с теми же $\mathbf{y}_j,\ j<i$, что и $\mathbf{x}_i$ — с $\mathbf{x}_j,\ j<i$. □

Сформулируем похожее утверждения для игры $\mathrm{EHR}^1(G,H,s)$.

Утверждение 2. Пусть в некоторых графах G,H мы можем выбрать соответственно такие индуцированные подграфы $\widetilde{G},\widetilde{H}$, для которых выполнено свойство расширения полного уровня $s-1$. Тогда Консерватор победит в игре $\mathrm{EHR}^1(G,H,s)$.

Доказательство. Консерватор сможет на каждом шаге выбрать вершину по алгоритму из утверждения 1, соединённую с нужными ему, выбирая её из множества $V(\widetilde{G})$ (или $V(\widetilde{H})$), т.е. победит. □

Лемма 3. *В графе* G_N^{dist} *найдётся полный индуцированный подграф на* $[\log_2 k]$ *вершинах.*

Прежде чем перейти к доказательству, сделаем замечание.

Замечание 1. На самом деле, существует сколько угодно большое N, для которого в графе G_N^{dist} найдётся полный индуцированный подграф на n вершинах (см. [11]). Наша лемма не является следствием этого утверждения, потому что в ней мы находим полный индуцированный подграф для каждого N.

Перейдём теперь к доказательству леммы.

Доказательство. Определим две вершины, соединённые друг с другом:

$$\mathbf{x}_1=(\underbrace{1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,1}_{2k},\underbrace{0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,0}_{2k}),$$

$$\mathbf{x}_2=(\underbrace{1,\ldots\ldots,1}_{k},\underbrace{0,\ldots\ldots,0}_{k},\underbrace{1,\ldots\ldots,1}_{k},\underbrace{0,\ldots\ldots,0}_{k}),$$

$$\mathbf{x}_3=(\underbrace{1,\ldots,1}_{[\frac{k}{2}]},\underbrace{0,\ldots,0}_{[\frac{k+1}{2}]},\underbrace{1,\ldots,1}_{[\frac{k+1}{2}]},\underbrace{0,\ldots,0}_{[\frac{k}{2}]},\underbrace{1,\ldots,1}_{[\frac{k+1}{2}]},\underbrace{0,\ldots,0}_{[\frac{k}{2}]},\underbrace{1,\ldots,1}_{[\frac{k}{2}]},\underbrace{0,\ldots,0}_{[\frac{k+1}{2}]}).$$

У первой вершины набор координат разбивается на два блока — *блок нулей* и *блок единиц*, у второй — на четыре. В дальнейшем мы определим ещё $[\log_2 k]-3$ вершины, причём у j-ой вершины набор координат будет разбит на 2^j блоков. Если занумеровать блоки в порядке их следования, то у $j+1$-ой вершины суммарное количество координат, стоящих в $2i-1$-ом и в $2i$-ом блоке (для любого i), будет равно количеству координат, стоящих в i-ом блоке j-ой вершины. Можно сказать, что при построении следующей после j-ой вершины каждый блок будет разбиваться на два — блок нулей и блок единиц. Поэтому далее будем писать в каждом блоке только количество единиц.

$$\mathbf{x}_4=\left(\left[\frac{k}{4}\right]\,|\,\left[\frac{k+1}{4}\right]\,|\,\left[\frac{k+2}{4}\right]\,|\,\left[\frac{k+3}{4}\right]\,|\,\left[\frac{k+3}{4}\right]\,|\,\left[\frac{k+2}{4}\right]\,|\,\left[\frac{k+1}{4}\right]\,|\,\left[\frac{k}{4}\right]\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathbf{x}_j=\left(\left[\frac{k}{2^{j-2}}\right]\,|\,\left[\frac{k+1}{2^{j-2}}\right]\,|\ldots|\,\left[\frac{k+2^{j-2}-1}{2^{j-2}}\right]\,|\,\left[\frac{k+2^{j-2}-1}{2^{j-2}}\right]\,|\ldots|\,\left[\frac{k+1}{2^{j-2}}\right]\,|\,\left[\frac{k}{2^{j-2}}\right]\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Очевидно, что все такие вершины будут попарно соединены. Заметим, что неравенство $\left[\frac{k}{2^{j-2}}\right] > 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $k \geqslant 2^{j-2}$, т.е. $j \leqslant \log_2 k + 2$. Таким образом, лемма доказана. □

Пусть $n_0 = 4 \cdot 2^{s+2}$, $N_0 = C_{n_0}^{n_0/2}$.

$$\log_2 f(n,s) = \left[\frac{n}{2^{s+5}}\right]. \tag{3}$$

Лемма 4. *Для любого натурального s в графе G_N^{dist} при $N \geqslant N_0$ найдется такой индуцированный подграф $H^{N,s}$, что для каждого индуцированного подграфа H в $H^{N,s}$ на s вершинах найдется индуцированный подграф F в $H^{N,s}$ на $f = f(n,s)$ вершинах со свойством: любые две вершины $\mathbf{x} \in V(F)$ и $\mathbf{y} \in V(H)$ соединены ребром в G_N^{dist}.*

Доказательство. Пусть s — произвольное натуральное число.

1) $N = N_0$. Тогда в силу леммы 3 найдутся $s+2$ вершины, образующие полный индуцированный подграф в G_N^{dist}. Функция $f(n,s)$ при $n = n_0$ равна $f(n_0,s) = 2^{[1/2]} = 1$. Но среди рассмотренных $s+2$ вершин любая одна будет соединена рёбрами с любыми другими s вершинами. Таким образом, в этом случае утверждение леммы доказано.
2) Пусть теперь $n > n_0$, $N = C_n^{n/2} > N_0$. Определим натуральное число j из неравенства $\left[\frac{k}{2^{j+1}}\right] < 2^{s+2} \leqslant \left[\frac{k}{2^j}\right]$. Разобьём у каждой вершины набор координат на группы: в первой — $4\left[\frac{k}{2^j}\right]$ координат, во второй — $4\left[\frac{k+1}{2^j}\right]$ координат, ..., в последней — $4\left[\frac{k+2^j-1}{2^j}\right]$ координат. Действительно,

$$\left[\frac{k}{2^j}\right] + \left[\frac{k+1}{2^j}\right] + \ldots. + \left[\frac{k+2^j-1}{2^j}\right] = k.$$

Всего таких групп 2^j. Рассмотрим дистанционный граф $G_{N_i}^{\mathrm{dist}}$, где $N_i = C_{n_i}^{n_i/2}$, $n_i = 4\left[\frac{k+i-1}{2^j}\right]$ и его полный индуцированный подграф на $\left[\log_2\left[\frac{k+i-1}{2^j}\right]\right] \geqslant s+2$ вершинах. Пусть $\mathbf{x}_0^i$ — некоторая вершина этого подграфа. Из векторов $\mathbf{x}_0^1 = (x_{0,1}^1, \ldots, x_{0,n_1}^1)$, ..., $\mathbf{x}_0^{2^j} = (x_{0,1}^{2^j}, \ldots, x_{0,n_{2^j}}^{2^j})$ составим вектор $\mathbf{x}_0 = (x_{0,1}^1, \ldots, x_{0,n_1}^1, \ldots, x_{0,1}^{2^j}, \ldots, x_{0,n_{2^j}}^{2^j})$. Таких векторов мы сможем составить не менее, чем $(s+2)^{2^j}$. Докажем, что построенный на выбранных вершинах индуцированный подграф $H^{N,s}$ и есть искомый. Если взять произвольные s вершин, то в каждой группе останется по крайней мере по два набора, а следовательно, мы сможем найти 2^{2^j} вершин, соединённых с каждой из s выбранных. При этом выполнены неравенства:

$$2^{2^j} \geqslant 2^{\frac{k}{2^{s+3}}} \geqslant 2^{\left[\frac{n}{2^{s+5}}\right]}.$$

Лемма доказана. □

Замечание 2. В дальнейшем нас будет интересовать лишь асимптотическое поведение определённой в (3) величины. В силу того, что $N = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2^n}{\sqrt{n}}(1+\delta(n))$, где $\delta(n) \to 0$ при $n \to \infty$, получим

$$f(n,s) \geqslant 2^{\frac{\log_2 N + \log_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{n}}{1+\delta(n)}}{2^{s+5}}} = N^{\gamma(s)}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{n}}{1+\delta(n)}\right)^{\gamma(s)},$$

где $\gamma(s)=\frac{1}{2^{s+5}}$. Следовательно,

$$N^{\gamma(s)}=o(f(n,s)). \tag{4}$$

Доказательство (теоремы 5). Пусть s — произвольное натуральное число. Рассмотрим случайный граф $G(G_N^{\text{dist}},p)$. В силу утверждения 2, леммы 2 и леммы 4 нужно доказать, что для любого натурального s для случайного графа

$$G(H^{N,s},p)=(\Omega_{H^{N,s}},\mathcal{F}_{H^{N,s}},\mathcal{P}_{H^{N,s},\,p})$$

почти наверное выполняется свойство расширения полного уровня s.

Мы знаем, что в графе $H^{N,s}$ для любых s вершин найдется $f(n(N),s)$ вершин, соединённых с каждой из них. При этом $N^{\gamma(s)}=o(f(n,s))$, где $\gamma(s)$ не зависит от n и является положительной величиной. Далее поступаем так же, как и в случае случайных графов $G(N,p)$ (см. [5]).

Для любых различных $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_a,\mathbf{v}_1,\ldots\mathbf{v}_b,\mathbf{x}\in V(H^{N,s})$, где $a+b\leqslant s$, определим событие $E_{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_a,\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_b,\mathbf{x}}$, заключающееся в том, что вершины $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}_i$ соединены ребром, если $1\leqslant i\leqslant a$, а вершины $\mathbf{x}$ и $\mathbf{v}_j$ не соединены ребром, если $1\leqslant j\leqslant b$. Пусть также

$$\varepsilon=\min(p,1-p),$$

$$E_{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_a,\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_b}=\bigwedge_{\mathbf{x}\neq\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_a,\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_b}\overline{E_{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_a,\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_b,\mathbf{x}}},$$

$$E=\bigvee E_{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_a,\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_b},$$

где дизъюнкция берётся по всем различным $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_a,\mathbf{v}_1,\ldots\mathbf{v}_b$.

Наконец, пусть $H_{a+b}^{N,s}$ — индуцированный подграф графа $H^{N,s}$, причём $V(H_{a+b}^{N,s})=\{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_a,\mathbf{v}_1,\ldots\mathbf{v}_b\}$. Мы знаем, что найдется $f(n,s)$ вершин, образующих индуцированный в $H^{N,s}$ подграф $H_f^{N,s}$ такой, что $H_{a+b}^{N,s}$ и $H_f^{N,s}$ образуют полный двудольный подграф в $H^{N,s}$. Отсюда имеем

$$\mathcal{P}_{H^{N,s},\,p}\left(E_{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_a,\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_b}\right)\leqslant(1-\varepsilon^s)^{f(n,s)}\prod_{j\in J}p_j\leqslant(1-\varepsilon^s)^{f(n,s)},$$

где за J обозначено множество индексов вершин, принадлежащих множеству $V(H^{N,s})\backslash\left(V(H_f^{N,s})\cup V(H_{a+b}^{N,s})\right)$, $p_j=\mathcal{P}_{H^{N,s},\,p}(\overline{E_{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_a,\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_b,\mathbf{x}_j}})$.

Тогда

$$\mathcal{P}_{H^{N,s},\,p}(E)\leqslant s^2C^s_{|V(H^{N,s})|}(1-\varepsilon^s)^{f(n,s)}\leqslant s^2C_N^s(1-\varepsilon^s)^{f(n,s)}.$$

В силу (4) и того, что $C_N^s=O\left(N^s\right)$,

$$s^2C_N^s(1-\varepsilon^s)^{f(n,s)}=O\left(\frac{N^s}{\exp\left(\varepsilon^s f(n,s)\right)}\right)=o\left(\frac{N^s}{\exp\left(\varepsilon^s N^{\gamma(s)}\right)}\right),$$

где $\varepsilon N^\alpha\to\infty$ при $N\to\infty$ для любого $\alpha>0$, а следовательно, $\mathcal{P}_{H^{N,s},p}(E)\to 0$. Теорема доказана. □

Доказательство (теоремы 6). Рассмотрим некоторую формулу φ^1, определённую в пункте 2.1. Предположим, что она имеет вид

$$\varphi^1=\exists x_{\alpha^1+1}\,\exists x_{\alpha^1+2}\,\ldots\,\exists x_{\alpha^1+\beta^1}\;\varphi_0^1(x_1,\ldots,x_{\alpha^1},x_{\alpha^1+1},\ldots,x_{\alpha^1+\beta^1}), \tag{5}$$

где φ_0^1 — формула, не содержащая связанных переменных. Если же формула φ^1 не представляется в таком виде, то можно рассмотреть формулу $\neg\varphi^1$. Пусть формула φ^1, представимая в виде (5), выражает некоторое свойство графов L^1, а не содержащая свободных переменных формула $\exists x_1 \ldots \exists x_{\alpha^1} \exists x_{\alpha^1+1} \exists x_{\alpha^1+2} \ldots \exists x_{\alpha^1+\beta^1} \varphi_0^1$ — свойство L_0^1.

По теореме 5 либо $\lim\limits_{N\to\infty} \mathcal{P}_{G_N^{\text{dist}},\,p}\left(G \models L_0^1\right) = 1$, либо $\lim\limits_{N\to\infty} \mathcal{P}_{G_N^{\text{dist}},\,p}\left(G \models L_0^1\right) = 0$. Предположим, что имеет место первый вариант. Пусть $\mathcal{H}_{\alpha^1+\beta^1}$ — некоторый граф на $\alpha^1+\beta^1$ вершинах, $V\left(\mathcal{H}_{\alpha^1+\beta^1}\right) = \{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{\alpha^1+\beta^1}\}$. Пусть также формула φ_0^1 истинна на наборе $\bar{\mathbf{z}} = (\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{\alpha^1+\beta^1})$, а следовательно, граф $\mathcal{H}_{\alpha^1+\beta^1}$ обладает свойством L_0^1.

Всюду далее считаем, что N достаточно велико.

Пусть $\mathbf{x}_{1,1}$ — некоторая вершина графа $\widetilde{H}_1^N := H^{N,\alpha^1+\beta^1}$, определённого в лемме 4. С вероятностью P_1 найдется такая вершина $\mathbf{x}_{1,2}$ случайного графа $G(\widetilde{H}_1^N, p) \subseteq G(G_N^{\text{dist}}, p)$, что выполнено свойство $\mathbf{x}_{1,1} \sim \mathbf{x}_{1,2} \Leftrightarrow \mathbf{z}_1 \sim \mathbf{z}_2$.

С вероятностью P_2 найдется вершина $\mathbf{x}_{1,3}$ случайного графа $G(\widetilde{H}_1^N, p)$, что выполнено свойство $(\mathbf{x}_{1,1} \sim \mathbf{x}_{1,3} \Leftrightarrow \mathbf{z}_1 \sim \mathbf{z}_3) \wedge (\mathbf{x}_{1,2} \sim \mathbf{x}_{1,3} \Leftrightarrow \mathbf{z}_2 \sim \mathbf{z}_3)$.

Аналогично вводятся вероятности P_i, $3 \leqslant i \leqslant \alpha^1+\beta^1-1$. Пусть, кроме того, с вероятностью $P(\mathbf{x}_{1,1})$ в графе $G(\widetilde{H}_1^N, p)$ найдется индуцированный подграф, изоморфный графу $\mathcal{H}_{\alpha^1+\beta^1}$, причём вершине $\mathbf{x}_{1,1}$ при этом изоморфизме ставится в соответствие вершина $\mathbf{z}_1$. Пусть, как и раньше, $\varepsilon = \min(p, 1-p)$. Тогда выполнены неравенства

$$1 - P(\mathbf{x}_{1,1}) \leqslant \sum_{i=1}^{\alpha^1+\beta^1-1} (1 - P_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\alpha^1+\beta^1-1} (1-\varepsilon^i)^{f(n,i)} \leqslant$$
$$\leqslant (\alpha^1+\beta^1-1)\left(1-\varepsilon^{\alpha^1+\beta^1-1}\right)^{f(n,\alpha^1+\beta^1-1)}.$$

Рассмотрим теперь индуцированный подграф $\widetilde{H}_2^N$ графа $H^{N,\alpha^1+\beta^1}$, определённый на множестве вершин $V(\widetilde{H}_2^N) = V(H^{N,\alpha^1+\beta^1}) \backslash \{\mathbf{x}_{1,1}, \mathbf{x}_{1,2}, \ldots, \mathbf{x}_{1,\alpha^1+\beta^1}\}$. Введём для него аналогично вероятность $P(\mathbf{x}_{2,1})$, в результате чего придём к неравенству

$$1 - P(\mathbf{x}_{2,1}) \leqslant (\alpha^1+\beta^1-1)\left(1-\varepsilon^{\alpha^1+\beta^1-1}\right)^{f(n,\alpha^1+\beta^1-1)-(\alpha^1+\beta^1)}.$$

Определим аналогичным образом графы $\widetilde{H}_i^N$, для которых выполнено равенство $V(\widetilde{H}_i^N) = V(H^{N,\alpha^1+\beta^1}) \backslash \{\mathbf{x}_{1,1}, \mathbf{x}_{1,2}, \ldots, \mathbf{x}_{1,\alpha^1+\beta^1}, \ldots, \mathbf{x}_{i-1,1}, \mathbf{x}_{i-1,2}, \ldots, \mathbf{x}_{i-1,\alpha^1+\beta^1}\}$, и вероятности $P_{\mathbf{x}_{i,1}}$, где $3 \leqslant i \leqslant \left[\frac{f(n,\alpha^1+\beta^1-1)}{2(\alpha^1+\beta^1)}\right]$. При $1 \leqslant i \leqslant \left[\frac{f(n,\alpha^1+\beta^1-1)}{2(\alpha^1+\beta^1)}\right]$ выполнено неравенство

$$1 - P(\mathbf{x}_{i,1}) \leqslant (\alpha^1+\beta^1-1)\left(1-\varepsilon^{\alpha^1+\beta^1-1}\right)^{f(n,\alpha^1+\beta^1-1)-(i-1)(\alpha^1+\beta^1)}. \qquad (6)$$

Пусть P^N — вероятность того, что в графе $G(H^{N,\alpha^1+\beta^1}, p)$ найдется $\left[\frac{f(n,\alpha^1+\beta^1-1)}{2(\alpha^1+\beta^1)}\right]$ индуцированных подграфов, изоморфных графу $\mathcal{H}_{\alpha^1+\beta^1}$. Тогда, очевидно, в силу (6) и (4) выполнены неравенства

$$1 - P^N \leqslant \sum_{i=1}^{\left[\frac{f(n,\alpha^1+\beta^1-1)}{2(\alpha^1+\beta^1)}\right]} (1 - P(\mathbf{x}_{i,1})) \leqslant$$

$$\leqslant (\alpha^1+\beta^1-1)\left(1-\varepsilon^{\alpha^1+\beta^1-1}\right)^{f(n,\alpha^1+\beta^1-1)-\left(\left[\frac{f(n,\alpha^1+\beta^1-1)}{2(\alpha^1+\beta^1)}\right]-1\right)(\alpha^1+\beta^1)}\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{\left[\frac{f(n,\alpha^1+\beta^1-1)}{2(\alpha^1+\beta^1)}\right]-1}\left(1-\varepsilon^{\alpha^1+\beta^1-1}\right)^{i(\alpha^1+\beta^1)}\leqslant$$

$$\leqslant (\alpha^1+\beta^1-1)\left(1-\varepsilon^{\alpha^1+\beta^1-1}\right)^{f(n,\alpha^1+\beta^1-1)/2}\cdot\frac{1-\left(1-\varepsilon^{\alpha^1+\beta^1-1}\right)^{f(n,\alpha^1+\beta^1-1)/2}}{1-\left(1-\varepsilon^{\alpha^1+\beta^1-1}\right)^{\alpha^1+\beta^1}}.$$

Найдём $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\varepsilon^{\alpha^1+\beta^1-1}\right)^{f(n,\alpha^1+\beta^1-1)/2}$. Имеем в силу (4)

$$\left(1-\varepsilon^{\alpha^1+\beta^1-1}\right)^{f(n,\alpha^1+\beta^1-1)/2}\sim\exp\left(\frac{-f(n,\alpha^1+\beta^1-1)\varepsilon^{\alpha^1+\beta^1-1}}{2}\right)=$$

$$=o\left(\exp\left(\frac{-N^{\gamma(\alpha^1+\beta^1-1)}\varepsilon^{\alpha^1+\beta^1-1}}{2}\right)\right)=o\left(\exp\left(\frac{-N^{\gamma(\alpha^1+\beta^1-1)/2}}{2}\right)\right).$$

Последнее равенство имеет место в силу того, что при любом $\alpha>0$ выполнено $\lim\limits_{N\to\infty}pN^\alpha=\infty$. Следовательно, искомый предел равен 0.

Пусть

$$\lambda=\frac{\alpha^1+\beta^1-1}{1-\left(1-\varepsilon^{\alpha^1+\beta^1-1}\right)^{\alpha^1+\beta^1}},\quad \rho=\left(1-\varepsilon^{\alpha^1+\beta^1-1}\right)^{f(n,\alpha^1+\beta^1-1)/2}.$$

Тогда

$$1-P^N\leqslant\lambda(\rho-\rho^2).$$

Следовательно, $P^N\to 1$ при $N\to\infty$. Тогда почти наверное существует $\left[\frac{f(n,\alpha^1+\beta^1-1)}{2(\alpha^1+\beta^1)}\right]$ индуцированных подграфов графа $G(G_N^{\mathrm{dist}},p)$ на $\alpha^1+\beta^1$ вершинах, которые (подграфы) удовлетворяют свойству L_0^1. Пусть $G(\mathcal{G},p)$ — такой подграф. Пусть, кроме того, $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$, $\mathcal{V}=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{\alpha^1+\beta^1}\}$, причём эти вершины перечислены в том порядке, в котором они шли в ходе построения, описанного выше. Тогда индуцированный подграф $G(\mathcal{H},p)$ графа $G(\mathcal{G},p)$, где $\mathcal{H}=(\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{\alpha^1}\},\mathcal{E}|_{\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{\alpha^1}\}})$, удовлетворяет условию теоремы 6.

Если же $\lim\limits_{N\to\infty}\mathcal{P}_{G_N^{\mathrm{dist}},p}\left(G\vDash L_0^1\right)=0$, то достаточно рассмотреть граф $\mathcal{H}_{\alpha^1+\beta^1}$, не удовлетворяющий свойству L_0^1, и провести аналогичные рассуждения.

Осталось заметить, что при достаточно больших N в силу (4) выполнено неравенство

$$\left[\frac{f(n,\alpha^1+\beta^1-1)}{2(\alpha^1+\beta^1)}\right]\geqslant\left[\frac{N^{\frac{1}{2^{\alpha^1+\beta^1+4}}}}{2(\alpha^1+\beta^1)}\right].$$

Теорема доказана. □

Литература

1. *Shwentick T.* On Winning Ehrenfeucht Games and Monadic NP // Ann. Pure Appl. Logic. — 1996. — Vol. 79, No 1. — Pp. 61–92.
2. *Верещагин Н. К., Шень А.* Языки и исчисления. — М.: МЦНМО, 2000.

3. *Ehrenfeucht A.* An Application of Games to the Completness Problem for Formalized Theories // Fund. Math. — 1960. — Vol. 49. — Pp. 121–149.
4. *Bollobás B.* Random Graphs. — 2 edition. — Cambridge University Press, 2001.
5. *Алон Н., Спенсер Дж.* Вероятностный метод. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.
6. Range of Degree and Realizability of Formulas in the Restricted Predicate Calculus / Ю. В. Глебский, Д. И. Коган, М. И. Легонький, В. А. Таланов // Cybernetics. — 1972. — Vol. 5. — Pp. 142–154.
7. *Fagin R.* Probabilities in Finite Models // J. Symbolic Logic. — 1976. — Vol. 41. — Pp. 50–58.
8. *Shelah S., Spencer J. H.* Zero-One Laws for Sparse Random Graphs // J.Amer. Math. Soc. — 1988. — Vol. 1. — Pp. 97–115.
9. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи Матем. Наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 107–146.
10. *Райгородский А. М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2007.
11. *Холл М.* Комбинаторика. — М.: Мир, 1970.

UDC 519.175.4

The Weak Zero-One Law for the Random Distance Graphs

M. E. Zhukovskii

Department of Probability Theory
Moscow State University
Leninskie Gory, 1A, Moscow, Russia 119991

In this paper, the weak zero-one j-law is defined. The results for the random distance graphs similar to the statements for the zero-one law and random graphs are obtained.

Key words and phrases: zero-one law, distance graphs, Ehrenfeucht game.