Математика

УДК 517.955.8

Асимптотики решений двух задач динамики экспоненциально стратифицированной жидкости

А. В. Глушко, Е. Н. Свиридова

Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей
Воронежский государственный университет
Университетская пл., д.1, г. Воронеж, 394006, Россия

Работа посвящена изучению компонент решений двух задач динамики, описывающих малые колебания экспоненциально стратифицированной и равномерно вращающейся жидкости в декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3), жёстко связанной с вращающейся жидкостью. Жидкость стратифицирована вдоль оси Ox_3, совпадающей с осью вращения: $\rho_0(x_3) = A\exp(-2\beta x_3)$, где $\beta > 0$ — параметр стратификации. Построены асимптотики при $t \to +\infty$ компонент решения обеих задач.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, системы, переменные коэффициенты, существование решения, асимптотическое поведение.

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются две задачи, описывающие двумерное движение стратифицированной жидкости, т.е. такое, при котором компоненты решения не зависят от одной из пространственных переменных, x_1 или x_2 (для определённости — от x_2).

В первой задаче движение жидкости изучается в рамках модели, принадлежащей А.Г. Свешникову, Ю.Д. Плетнер, Л.В. Перовой. В работе [1] этих авторов была доказана стабилизация решения при большом времени. Нами, при несколько других требованиях на функцию из граничных условий, выписаны точные асимптотики компонент решения. Рассматриваемая система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial t} - \alpha V_2 + \dfrac{1}{\rho_0(x_3)} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial t} + \alpha V_1 = 0, \\ \dfrac{\partial^2 V_3}{\partial t^2} + \omega_0^2 V_3 + \dfrac{1}{\rho_0(x_3)} \cdot \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial p}{\partial x_3}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $x_1 \in \mathbb{R},\ x_3 > 0,\ t > 0$; $\overline{\alpha} = (0, 0, \alpha)$ — вектор Кориолиса; $\omega_0^2 = 2\beta g$ — квадрат частоты Вейсяля–Брента, p — динамическое давление, $\rho_0(x_3)$ — плотность жидкости в невозмущённом состоянии.

С помощью замены

$$\sigma = p\rho_0^{-1}(x_3) = A^{-1} p e^{2\beta x_3} \tag{2}$$

Статья поступила в редакцию 13 октября 2009 г.

приходим к системе уравнений

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial V_1}{\partial t} - \alpha V_2 + \dfrac{\partial \sigma}{\partial x_1} = 0, \\
\dfrac{\partial V_2}{\partial t} + \alpha V_1 = 0, \\
\dfrac{\partial^2 V_3}{\partial t^2} + \omega_0^2 V_3 + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \sigma}{\partial x_3} - 2\beta\sigma\right) = 0, \\
\dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0.
\end{cases}
\tag{3}
$$

Дополним систему (3) следующими начальными и граничными условиями:

$$
\begin{gathered}
V_k(x,0) = 0,\ k = 1,2,3,\ \frac{\partial V_3}{\partial t}(x,0) = 0,\ \sigma(x,0) = 0, \\
V_3(x_1,x_3,t)|_{x_3=0} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1,t).
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Замечание. В силу условия соленоидальности, задаваемого четвёртым уравнением системы, с компонентами V_1, V_3 вектора скорости $\overline{V} = \{V_1, V_2, V_3\}$ можно связать функцию тока $\Psi = \Psi(x_1, x_3, t)$ следующим соотношением: $\{V_1, V_3\} = \left\{\dfrac{\partial \Psi}{\partial x_3}, -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x_1}\right\}$. Этим соотношением обусловлено граничное условие.

В рассматриваемой модели А.Г. Свешников, Ю.Д. Плетнер, Л.В. Перова предполагали, что учёт переменного коэффициента плотности $\rho_0(x_3)$ в уравнении неразрывности не является необходимым, обосновывая это экспериментальными соображениями. Мы решили посмотреть, как с математической точки зрения этот эффект учитывается не только в уравнениях Эйлера, но и в уравнении неразрывности. С этой целью изучена вторая задача.

Во второй задаче четвёртое уравнение системы (1) рассматривается в общем виде

$$
\operatorname{div}\left(\rho_0(x_3)\,\overline{V}\right) = 0 \tag{5}
$$

или

$$
\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} - 2\beta V_3 = 0.
$$

Полученную таким образом систему преобразуем с помощью замены (2), как и в первой модели. Начальные условия из (3) для новой системы сохраняются, а граничное условие имеет вид

$$
V_3(x_1,x_3,t)|_{x_3=0} = -\frac{1}{\rho_0(0)} \cdot \frac{\partial \psi(x_1,t)}{\partial x_1}. \tag{6}
$$

Для этой модели также выписаны точные асимптотики компонент решения.

Обобщённое решение обеих задач строится с помощью преобразований Фурье и Лапласа. С помощью них же доказывается существование решения. Получение асимптотических представлений компонент решения задач основано на изучении свойств фазовых функций в интегралах, образующихся при вычислении обратных преобразований Лапласа и Фурье, и применении метода стационарной фазы (см. [2]).

Приведём краткий обзор доказанных результатов для обеих моделей.

Предполагается, что функция $\psi(x_1,t)$ удовлетворяет следующим условиям

Условие 1. Функция $\psi(x_1,t)$ равномерно по $(x_1,t) \in \mathbb{R}^2_+$ ограничена:

$$
|\psi(x_1,t)| \leqslant c.
$$

Условие 2. В $L_1(\mathbb{R}\times(0;\infty))$ существуют следующие производные функции $\psi(x_1,t)$:

$$\chi_n(x_1,t)=\left(1-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)^n\psi(x_1,t)\,,\quad n=2,3,4.$$

Условие 3. Имеет место оценка

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+|x_1|)\left|\left(1-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)^n\psi(x_1,t)\right|dx_1<\infty,\quad n=2,4.$$

Условие 4. Функция $\psi(x_1,t)$ финитна: $\psi(x_1,t)=0$ при $t>N$.

Замечание. Из условий 1 и 4 следует, что существует $\delta>0$ такое, что справедлива оценка $|\psi(x_1,t)|\leqslant c\exp(-\delta t)$, $(x_1,t)\in\mathbb{R}_+^2$.

Введём нормы

$$\langle\langle f\rangle\rangle_\rho=\left\{\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty\left(1+t^2\right)|F_{x_1\to s_1}[f(x_1,t)]|\left(1+s_1^{2\rho}\right)\mathrm{d}s_1\mathrm{d}t\right\}^{1/2},$$

$$|||g(x,t)|||^2_{L_2(\mathbb{R}^2\times(0;\infty))}=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left|e^{-\beta x_3}g(x,t)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\tag{7}$$

$$\langle\langle\langle g(x,t)\rangle\rangle\rangle^2_{L_2(\mathbb{R}^2\times(0;\infty))}=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left|e^{-2\beta x_3}g(x,t)\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Через $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}$, $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R}^2_+)}$, $\|\cdot\|_{L_2(W_2^\rho(\mathbb{R})\times(0,\infty))}$ будем обозначать стандартные нормы в соответствующих пространствах $L_2(\mathbb{R}^3)$, $L_2(\mathbb{R}^2_+)$, $L_2(W_2^\rho(\mathbb{R})\times(0,\infty))$, где $W_2^\rho(\mathbb{R})$ — пространство Соболева–Слободецкого с индексом ρ на $\mathbb{R}$.

2. Задача 1. «Модель Свешникова»

В работе [3] доказано существование решения задачи, получены оценки для норм компонент решения и их производных, входящих в систему, в пространствах $L_2(\mathbb{R}^2_+)$, $L_2(W_2^\rho(\mathbb{R})\times(0,\infty))$, выполнена проверка начальных и граничных условий. Приведём результаты для компонент вектора скорости.

$$|||V_1(x_1,x_3,t)|||_{L_2(\mathbb{R}^2_+\times(0;\infty))}\leqslant$$
$$\leqslant c\left\{\|\psi(x_1,t)\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0;\infty))}+\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0;\infty))}+\langle\langle\psi\rangle\rangle_{-1/2}+\langle\langle\psi\rangle\rangle_{1/2}\right\},$$

$$|||V_2(x_1,x_3,t)|||_{L_2(\mathbb{R}^2_+\times(0;\infty))}\leqslant$$
$$\leqslant c\left\{\left\|\frac{\partial}{\partial t}\psi(x_1,t)\right\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0;\infty))}+\left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial x_1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0;\infty))}+\langle\langle\psi\rangle\rangle_{-1/2}+\langle\langle\psi\rangle\rangle_{1/2}\right\},$$

$$|||V_3(x_1,x_3,t)|||_{L_2(\mathbb{R}^2_+\times(0;\infty))}\leqslant\|\psi(x_1,t)\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0;\infty))}+c\,\langle\langle\psi\rangle\rangle_{1/2}\,.$$

В работе [4] исследовано асимптотическое поведение компонент решения при $t\to+\infty$. Доказана следующая теорема

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1, 2, 3, 4. Тогда при $t \to +\infty$ для компонент решения задачи (3), (4) справедливы следующие асимптотические представления*

$$V_1(x,t) = a(x_3)\, t^{-1.5} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)^4 \psi(y_1,\tau)\, \mathrm{d}\tau \mathrm{d}y_1 +$$
$$+ (1+|x_1|)\left(x_3^{-1} + x_3^{-2}\right) O\left(t^{-2}\right) \left(\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|z|)\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^4 \psi(z,\tau)\, \mathrm{d}z\mathrm{d}\tau\right),$$

$$V_2(x,t) = \alpha\beta \exp(\beta x_3)\, F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\widehat{\psi}(s_1,0)\exp\left(-x_3\sqrt{s_1^2+\beta^2}\right)\right] -$$
$$- \alpha \exp(\beta x_3)\, \frac{\partial}{\partial x_3} F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\widehat{\psi}(s_1,0)\exp\left(-x_3\sqrt{s_1^2+\beta^2}\right)\right] +$$
$$+ b(x_3)\, t^{-1.5} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)^4 \psi(z,\tau)\, \mathrm{d}\tau \mathrm{d}y_1 +$$
$$+ (1+|x_1|)\left(x_3^{-1} + x_3^{-2}\right) O\left(t^{-2}\right) \left(\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|z|)\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^4 \psi(z,\tau)\, \mathrm{d}z\mathrm{d}\tau\right),$$

$$V_3(x,t) = k(x_3)\, t^{-\frac{5}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} (x_1 - y_1)\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)^4 \psi(y_1,\tau)\, \mathrm{d}\tau \mathrm{d}y_1 +$$
$$+ (1+|x_1|)\, x_3^{-3} O\left(t^{-3}\right) \left(\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|z|)\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^4 \psi(z,\tau)\, \mathrm{d}z\mathrm{d}\tau\right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_1}(x,t) = \rho_0(x_3)\, c(x_3)\, t^{-1.5} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)^4 \psi(y_1,\tau)\, \mathrm{d}\tau \mathrm{d}y_1 +$$
$$+ (1+|x_1|)\left(x_3^{-1} + x_3^{-2}\right) O\left(t^{-2}\right) \left(\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|z|)\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^4 \psi(z,\tau)\, \mathrm{d}z\mathrm{d}\tau\right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3}(x,t) = -\rho_0(x_3) \exp(\beta x_3)\, \frac{\partial}{\partial x_1} F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\widehat{\psi}(s_1,0)\exp\left(-x_3\sqrt{s_1^2+\beta^2}\right)\right] +$$
$$+ \mathrm{d}(x_3)\, \rho_0(x_3)\, t^{-\frac{5}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} (x_1 - y_1)\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)^4 \psi(y_1,\tau)\, \mathrm{d}\tau \mathrm{d}y_1 +$$
$$+ (1+|x_1|)\, x_3^{-3} O\left(t^{-3}\right) \left(\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|z|)\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^4 \psi(z,\tau)\, \mathrm{d}z\mathrm{d}\tau\right).$$

Здесь $O\left(t^{-2}\right)$ *и* $O\left(t^{-3}\right)$ *есть функции переменных* $t > 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$, *равномерно по* $t \geqslant t_0 > 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$, *удовлетворяющие соответственно оценкам:* $\left|O\left(t^{-2}\right)\right| \leqslant ct^{-2}$, $\left|O\left(t^{-3}\right)\right| \leqslant ct^{-3}$; *коэффициенты* $k\left(x_3\right)$, $a\left(x_3\right)$, $b\left(x_3\right)$, $c\left(x_3\right)$, $\mathrm{d}\left(x_3\right)$ *равномерно по* $x_3 : \quad 0 < \varepsilon < x_3 < N < \infty$ *ограничены и выписаны в явном виде в работе [4].*

3. Задача 2. «Наша модель»

Аналогично первой задаче проведено полное исследование всех компонент решения системы и оценка их норм в шкале пространств Соболева–Слободецкого. Приведём результаты для компонент вектора скорости $V = (V_1, V_2, V_3)$. Справедливы следующие оценки

$$\langle\langle\langle V_1(x_1, x_3, t)\rangle\rangle\rangle_{L_2(\mathbb{R}^2_+\times(0;\infty))} \leqslant$$
$$\leqslant c\left\{\|\psi(x_1,t)\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0;\infty))} + \left\|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0;\infty))} + \langle\langle\psi\rangle\rangle_{-1/2} + \langle\langle\psi\rangle\rangle_{1/2}\right\},$$

$$\langle\langle\langle V_2(x_1, x_3, t)\rangle\rangle\rangle_{L_2(\mathbb{R}^2_+\times(0;\infty))} \leqslant$$
$$\leqslant c\left\{\left\|\frac{\partial}{\partial t}\psi(x_1,t)\right\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0;\infty))} + \left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial x_1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0;\infty))} + \langle\langle\psi\rangle\rangle_{-1/2} + \langle\langle\psi\rangle\rangle_{1/2}\right\},$$

$$\langle\langle\langle V_3(x_1, x_3, t)\rangle\rangle\rangle_{L_2(\mathbb{R}^2_+\times(0;\infty))} \leqslant \|\psi(x_1,t)\|_{L_2(\mathbb{R}\times(0;\infty))} + c\,\langle\langle\psi\rangle\rangle_{1/2}\,.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1, 3, 4, условие 2 при* $n = 2$. *Тогда при* $t \to +\infty$ *для компонент вектора скорости решения второй задачи справедливы следующие асимптотические представления*

$$V_1\left(x,t\right) = m_1\left(x\right)t^{-3/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\left(1-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)^2\psi\left(y_1,\tau\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}y_1 +$$
$$+\left(1+|x_1|\right)x_3^{-2}O\left(t^{-2}\right)\left(\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1+|z|\right)\left(1-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2\psi\left(z,\tau\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau\right),$$

$$m_1\left(x\right) = \frac{\sqrt{2}\exp\left(2\beta x_3\right)}{\pi^{3/2}x_3^2\rho_0\left(0\right)}\cdot\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha^2-\omega_0^2}}\cdot\sin\left(t\alpha-\frac{3\pi}{4}\right);$$

$$V_2\left(x,t\right) = \frac{\alpha\exp\left(2\beta x_3\right)}{\rho_0\left(0\right)\pi}\cdot\frac{x_1^2-x_3^2}{\left(x_1^2+x_3^2\right)^2}*\psi\left(x_1,0\right) +$$
$$+ m_2\left(x\right)t^{-3/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\left(1-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)^2\psi\left(y_1,\tau\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}y_1 +$$
$$+\left(1+|x_1|\right)x_3^{-2}O\left(t^{-2}\right)\left(\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1+|z|\right)\left(1-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2\psi\left(z,\tau\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau\right),$$

$$m_2\left(x\right) = \frac{\sqrt{2}\exp\left(2\beta x_3\right)}{\pi^{3/2}x_3^2\rho_0\left(0\right)}\cdot\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha^2-\omega_0^2}}\cdot\cos\left(t\alpha-\frac{3\pi}{4}\right);$$

$$V_3(x,t) = m_3(x)\,t^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)^2 \psi(y_1,\tau)\,\mathrm{d}\tau \mathrm{d}y_1 +$$

$$+ (1+|x_1|)\,x_3^{-2} O\left(t^{-3/2}\right) \left(\int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|z|) \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 \psi(z,\tau)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau \right),$$

$$m_3(x) = -\frac{2\exp(2\beta x_3)}{\pi^2 \rho_0(0)} \cos(t\omega_0) \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\lambda \cos(\lambda x_1)}{\left(1+\lambda^2\right)^2} \mathrm{d}\lambda.$$

Здесь $O\left(t^{-2}\right)$ *и* $O\left(t^{-3/2}\right)$ *есть функции переменных* $t > 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$, *равномерно по* $t \geqslant t_0 > 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$, *удовлетворяющие соответственно оценкам:* $\left|O\left(t^{-2}\right)\right| \leqslant ct^{-2}$, $\left|O\left(t^{-3/2}\right)\right| \leqslant ct^{-3/2}$.

4. Заключение

Итак, нами построены точные асимптотики компонент решения двух задач динамики, описывающих малые колебания экспоненциально стратифицированной и равномерно вращающейся жидкости.

Литература

1. *Перова Л. В., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г.* О колебаниях в стратифицированной и вращающейся жидкости, возбуждаемой плоской, бегущей по дну волной // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2000. — № 1. — С. 136–143.
2. *Федорюк М. В.* Метод перевала. — М.: Наука, 1977.
3. *Глушко А. В., Свиридова Е. Н.* Оценка поведения при $t \to +\infty$ решения задачи о малых колебаниях вращающейся стратифицированной жидкости в полупространстве // Труды математического факультета ВГУ. — 2007. — № 11. — С. 35–48.
4. *Свиридова Е. Н.* Асимптотика при $t \to +\infty$ компонент решения задачи о малых колебаниях вращающейся стратифицированной жидкости в полупространстве. Часть 1. // Вестник ВГУ, серия «Физика, математика». — 2009. — № 1. — С. 150–158.

UDC 517.955.8

The Asymptotic Behavior of Solutions of Two Problems of Dynamic of Exponentially Stratified Fluid

A. V. Glushko, E. N. Sviridova

Department of Partial Differential Equations and Probability Theory
Voronezh State University
University square, 1, Voronezh, Russia 394006

This article is devoted to studying the components of solutions of two problems of dynamics. The problems describe the small fluctuations of the exponentially stratified and uniformly rotating fluid in the Cartesian system of coordinates (x_1, x_2, x_3) rigidly connected with the rotating fluid. The fluid is stratified along the axis Ox_3 coinciding with the axis of rotation: $\rho_0(x_3) = A\exp(-2\beta x_3)$, where $\beta > 0$ is a parameter of stratification. The asymptotics of the components of solution are constructed for both problems.

Key words and phrases: differential equations, systems of differential equations, variable coefficients, existence of solution, asymptotic behavior.