Прикладная математика

УДК 519.21

Анализ времени пребывания заявок в многоканальной экспоненциальной системе обслуживания с ограниченным накопителем и буфером переупорядочивания

С. И. Матюшенко, Д. А. Пяткина, В. Н. Калениченко

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Рассматривается многоканальная система массового обслуживания с накопителем ограниченной ёмкости, на которую поступает пуассоновский поток заявок. Заявка, застающая все места в накопителе занятыми, теряется и в дальнейшем не оказывает влияния на функционирование системы. Длительности обслуживания заявок случайны, независимы между собой и имеют экспоненциальное распределение. При этом интенсивности обслуживания на приборах различны. Заявка, имеющая возможность выбора прибора, выбирает из всех свободных приборов тот, который имеет наибольшую интенсивность обслуживания. На выходе из системы располагается буфер, в котором происходит переупорядочивание заявок в соответствии с порядком их поступления.

Функционирование системы описывается однородным марковским процессом. В предположении, что интенсивности потока и обслуживания заявок конечны, финальные вероятности состояний марковского процесса существуют, строго положительны, не зависят от начального распределения и совпадают со стационарными вероятностями.

В предыдущей работе нами был разработан алгоритм для расчёта стационарных вероятностей состояний рассматриваемой системы. Основная задача данной работы состоит в том, чтобы, опираясь на результаты предыдущей работы, получить стационарные показатели производительности системы. В результате нами была получена функция распределения времени пребывания заявок в буфере переупорядочивания и проведён численный анализ зависимости средней задержки переупорядочивания от загрузки системы и от количества приборов.

Ключевые слова: система массового обслуживания, переупорядочивание заявок, стационарное распределение, функция распределения задержки переупорядочивания, начальные моменты задержки переупорядочивания.

1. Описание системы

Рассматривается многоканальная система массового обслуживания (СМО) с m обслуживающими приборами, $2 \leqslant m < \infty$, и общим накопителем ограниченной ёмкости. На систему поступает пуассоновский поток заявок с параметром λ. Времена обслуживания на приборе j независимы между собой, а также не зависят от времени обслуживания на других приборах и распределены по экспоненциальному закону с параметром μ_j, $j = \overline{1, m}$.

Накопитель системы имеет r мест для ожидания, $r < \infty$. Заявка, поступающая на систему, когда в ней находится $m+r$ заявок, теряется и в дальнейшем не влияет на её функционирование.

Далее, без ограничения общности, примем, что $\mu_1 \geqslant \dots \geqslant \mu_m$, т. е интенсивность обслуживания заявок с возрастанием номера прибора не возрастает. Примем также, что заявка, имеющая возможность выбора прибора, выбирает из всех свободных приборов тот, который имеет наименьший порядковый номер. Заявки выбираются из очереди на обслуживание в порядке их прибытия в систему, т. е. согласно дисциплине FCFS.

Предполагается, что всем заявкам в момент поступления в систему присваивается порядковый номер. При этом если в момент окончания обслуживания заявки

Статья поступила в редакцию 27 ноября 2015 г.

с номером n (заявки n) продолжается обслуживание хотя бы одной заявки с номером, меньшим n, то заявка n помещается в буфер переупорядочивания (БП). В противном случае заявка n сразу покидает систему, и вслед за ней из БП уходят все заявки с номерами, отличающимися друг от друга на единицу, начиная с номера $n+1$ (если таковые в этом буфере имеются). Последнее предположение позволяет моделировать механизм сохранения порядка заявок на выходе из системы, в соответствии с которым заявки поступают в неё.

В соответствии с обозначениями Кендалла рассматриваемую СМО будем кодировать как $M/M/m/r/res$, где буквы res являются сокращением от английского *resequence* — переупорядочивание.

Предположим, что в любой момент времени заявки, находящиеся в системе (в накопителе и на приборах), пронумерованы в порядке их поступления, начиная с единицы. Тогда стохастическое поведение рассматриваемой СМО можно описать однородным марковским процессом (МП) $X(t)$, $t \geqslant 0$, над пространством состояний

$$x^m = \bigcup_{k=0}^{m+r} x_k^m\,,$$

$$x_k^m = \Big\{(k, i_1, \ldots, i_m), \quad i_j = \overline{0,k}, \quad \sum_{j=1}^{m} u(i_j) = k,$$

$$\text{при этом, если } i_j i_s > 0, \text{ то } i_j \neq i_s,\ j,s = \overline{1,m}\Big\}, \quad k = \overline{0, m-1},$$

$$x_k^m = \Big\{(k, i_1, \ldots, i_m), \quad i_j = \overline{0,m}, \quad i_j \neq i_s, \quad j,s = \overline{1,m}\Big\}, \quad k = \overline{m, m+r},$$

где $u(x)$ — функция Хевисайда.

Здесь для некоторого момента времени t: $X(t) = (k, i_1, \ldots, i_m)$, если в системе находится k заявок, $k = \overline{0, m+r}$, $i_j = 0$ означает, что прибор j пуст, в противном случае i_j есть номер заявки, обслуживаемой прибором j, $j = \overline{1,m}$.

В работе [1] был разработан алгоритм расчёта стационарных вероятностей состояний МП $X(t)$. Теперь наша задача состоит в том, чтобы на основе этого распределения получить стационарные характеристики времени пребывания заявок в системе.

2. Стационарная функция распределения задержки переупорядочивания

Обозначим через $F_{\mathrm{res}}(t)$ стационарную ФР времени пребывания заявок в БП. В дальнейшем время пребывания заявок в БП будем называть задержкой переупорядочивания.

Перейдём к нахождению $F_{\mathrm{res}}(t)$. Для этого рассмотрим условную стационарную ФР задержки переупорядочивания заявки, обслуженной на приборе j, при условии, что в момент $\tau - 0$ окончания обслуживания этой заявки система находилась в состоянии $(k, i_1, \ldots, i_m)$ и обозначим её через $F_{(k,i_1,\ldots,i_m),j}(t)$, $j = \overline{1,m}$, $(k, i_1, \ldots, i_m) \in x^m$.

Ясно, что если непосредственно перед окончанием обслуживания заявки на приборе j система находилась в состоянии $(k, i_1, \ldots, i_m)$, то задержка переупорядочивания этой заявки будет равна максимуму из времён дообслуживания заявок, пришедших в СМО раньше данной заявки, т. е. заявок, обслуживаемых на приборах с номерами из множества

$$y_{(k,i_1,\ldots,i_m)} = \{s_n :\ 0 < i_{s_n} < i_j\}, \quad j = \overline{1,m}, \quad (k, i_1, \ldots, i_m) \in x^m.$$

Так как обслуживание заявки на приборе j распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_j, $j=\overline{1,m}$, то

$$F_{(k,i_1,\dots,i_m),j}(t)=\prod_{s_n\in y_{(k,i_1,\dots,i_m),j}}\left(1-e^{-\mu_{s_n}t}\right),\quad j=\overline{1,m},\quad (k,i_1,\dots,i_m)\in x^m. \tag{1}$$

При этом $F_{(k,i_1,\dots,i_m),j}(t)=1$, если $Y_{(k,i_1,\dots,i_m),j}=\varnothing$, так как заявка в этом случае не будет задержана.

Теперь обозначим через $\Pi^-_{D,j}(k,i_1,\dots,i_m)$ стационарную вероятность состояния $(k,i_1,\dots,i_m)$ в момент $\tau-0$ окончания обслуживания заявки на приборе j, а через $\lambda_{D,j}$ — интенсивность выхода заявок, обслуженных прибором j, $j=\overline{1,m}$. Нетрудно видеть, что

$$\lambda_{D,j}=\sum_{(k,i_1,\dots,i_m)\in x^m}p(k,i_1,\dots,i_m)u(i_j)\mu_j,\quad j=\overline{1,m}.$$

Тогда, на основании результатов [2], получаем

$$\Pi^-_{D,j}(k,i_1,\dots,i_m)=\frac{1}{\lambda_{D,j}}p(k,i_1,\dots,i_m)u(i_j),\mu_j\,.$$

Далее заметим, что вероятность выхода заявки с прибора j равна $\lambda_{D,j}/\lambda_D$, где $\lambda_D=\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_{D,j}$.

Подытоживая теперь все предыдущие рассуждения и применяя формулу полной вероятности, приходим к искомому результату, который сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Функция распределения $F_{res}(t)$ задержки переупорядочивания в СМО $M/M/m/r/res$ в стационарном режиме её работы определяется выражением*

$$F_{res}(t)=\frac{1}{\lambda_D}\sum_{(k,i_1,\dots,i_m)\in x^m}p(k,i_1,\dots,i_m)\sum_{j=1}^{m}u(i_j)\mu_j,\prod_{s_n\in y_{(k,i_1,\dots,i_m),j}}\left(1-e^{-\mu_{s_n}t}\right).$$

Обозначим через $\delta_{(k,i_1,\dots,i_m),j,\nu}$ условные начальные моменты порядка ν, $\nu=1$, 2, 3, ..., задержки переупорядочивания заявки, обслуженной на приборе j при условии, что в момент $\tau-0$ окончания её обслуживания система находилась в состоянии $(k,i_1,\dots,i_m)$, т. е. положим

$$\delta_{(k,i_1,\dots,i_m),j,\nu}=\int\limits_0^\infty t^\nu \mathrm{d}F_{(k,i_1,\dots,i_m),j}(t),\quad j=\overline{1,m},\quad (k,i_1,\dots,i_m)\in x^m. \tag{2}$$

Тогда из (2) с учётом (1) путём несложных вычислений приходим к следующему результату:

$$\delta_{(k,i_1,\dots,i_m),j,\nu}=\nu!\Bigg[\sum_{n_1=1}^{l}\frac{1}{\mu^\nu_{s_{n_1}}}-\sum_{\substack{n_1,n_2=1\\ n_1\neq n_2}}\frac{1}{(\mu_{s_{n_1}}+\mu_{s_{n_2}})^\nu}+\dots+$$
$$+(-1)^{l+1}\frac{1}{(\mu_{s_{n_1}}+\dots+\mu_{s_{n_l}})^\nu}\Bigg], \tag{3}$$

где $s_n \in y_{(k,i_1,\ldots,i_m),j}$, $i = \overline{1,l}$, $l = |y_{(k,i_1,\ldots,i_m),j}|$.

Получив соотношение для моментов $\delta_{(k,i_1,\ldots,i_m),j,\nu}$, $(k, i_1, \ldots, i_m) \in x^m$, $j = \overline{1,m}$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, можем сформулировать очевидное следствие из теоремы.

Следствие. Начальный момент δ_ν порядка ν задержки переупорядочивания в СМО $M/M/m/r/res$ в стационарном режиме её работы определяется выражением

$$\delta_\nu = \frac{1}{\lambda_D} \sum_{(k,i_1,\ldots,i_m)\in x^m} p(k, i_1, \ldots, i_m) \sum_{j=1}^{m} u(i_j)\mu_j \delta_{(k,i_1,\ldots,i_m),j,\nu}, \quad \nu \geqslant 1.$$

3. Примеры численного исследования

Численное исследование показывает, что задержка переупорядочивания во многом зависит не только от суммарной интенсивности μ обслуживания заявок, но и от соотношения интенсивностей обслуживания μ_j, $j = \overline{1,m}$, между собой. Поясним это высказывание следующим примером.

Рассмотрим трёхканальную экспоненциальную систему обслуживания ёмкости $r = 10$. Будем считать, что на систему поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Далее рассмотрим три варианта параметров μ_j, $j = \overline{1,3}$. В первом случае возьмём $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1{,}0$, во втором — $\mu_1 = 1{,}715$, $\mu_2 = 0{,}855$, $\mu_3 = 0{,}430$, а в третьем — $\mu_1 = 2{,}08$, $\mu_2 = 0{,}69$, $\mu_3 = 0{,}23$. Заметим, что суммарная интенсивность обслуживания μ во всех трёх случаях равна трём. Однако в первом случае $\mu_1/\mu_2 = \mu_2/\mu_3 = 1$, во втором — $\mu_1/\mu_2 \approx \mu_2/\mu_3 \approx 2$, а в третьем — $\mu_1/\mu_2 \approx \mu_2/\mu_3 \approx 3$. Проанализируем во всех трёх случаях зависимость средней задержки переупорядочивания δ_1 от загрузки ρ, изменение которой будем достигать за счёт изменения λ.

Характер полученной зависимости отражён на рис. 1. Мы видим, что с ростом ρ наблюдается рост с последующей стабилизацией величины δ_1. Однако в первом случае средняя задержка переупорядочивания значительно меньше, чем во втором, а тем более в третьем. Таким образом, рассмотренный пример позволяет сделать предположение о том, что чем меньше в системе различие между интенсивностями обслуживания μ_j, $j = \overline{1,m}$, тем меньше в такой системе средняя задержка переупорядочивания.

Рассмотрим ещё один пример, который показывает, как влияет на задержку переупорядочивания количество приборов в системе. Для этого предположим, что в m-канальной системе с накопителем ёмкости $r = 10$ все приборы одинаковы, а длительность обслуживания на j-ом приборе распределена по экспоненциальному закону с параметром $\mu_j = 1$, $j = \overline{1,m}$.

Проанализируем зависимость средней задержки переупорядочивания от загрузки ρ в системах с перечисленным выше фиксированным набором параметров, но с различным количеством приборов m, $m = 2, 3, 4, 5, 6$. Характер полученной зависимости отражён на рис. 2. Как видно из рисунка, при одинаковой загрузке имеется существенное различие между значениями средней задержки переупорядочивания. При этом чем больше приборов в системе, тем больше времени затрачивается на переупорядочивание заявок.

Таким образом, рассмотренные примеры позволяют сделать предположение о том, что наименьшая задержка переупорядочивания присутствует в системах с одинаковыми приборами. В двухканальных системах затраты времени на переупорядочивание заявок минимальны. Данное предположение пока не получило аналитического подтверждения и, по-видимому, может служить объектом дальнейших исследований.

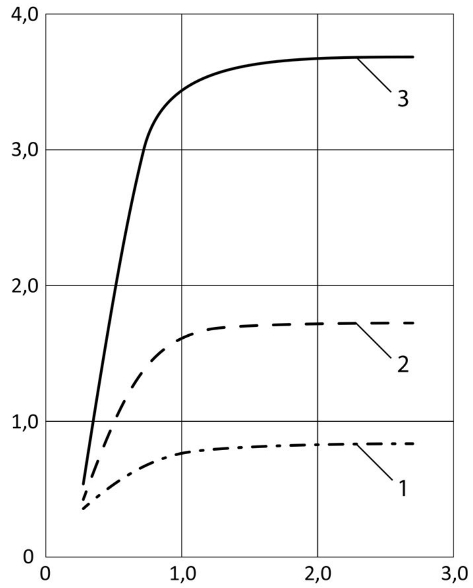

Рис. 1. Зависимость средней задержки переупорядочивания от загрузки системы при различных соотношениях интенсивностей обслуживания: кривая 1: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$**; кривая 2:** $\mu_1 = 1{,}715$**,** $\mu_2 = 0{,}855$**,** $\mu_3 = 0{,}430$**; кривая 3:** $\mu_1 = 2{,}08$**,** $\mu_2 = 0{,}69$**,** $\mu_3 = 0{,}23$

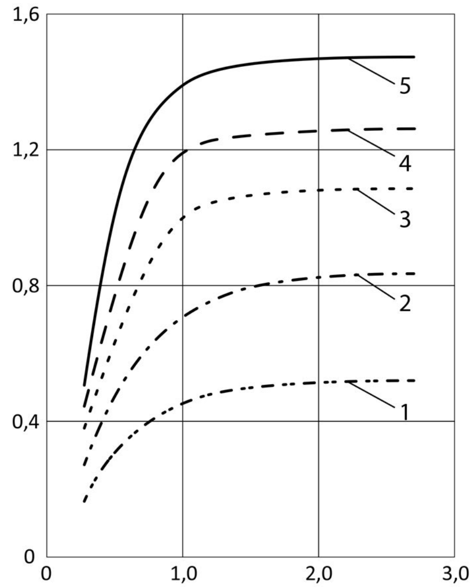

Рис. 2. Зависимость средней задержки переупорядочивания от загрузки в системах с различным количеством приборов m**: кривая 1:** $m = 2$**; кривая 2:** $m = 3$**; кривая 3:** $m = 4$**; кривая 4:** $m = 5$**; кривая 5:** $m = 6$

Литература

1. *Матюшенко С. И.* Анализ многоканальной системы обслуживания с ограниченным накопителем и переупорядочиванием заявок // Вестник Тверского госуниверситета, серия «Прикладная математика». — 2010. — Т. 4, № 37. — С. 55–70.
2. *Наумов В. А.* О предельных вероятностях полумарковского процесса // Современные задачи в точных науках. — М.: УДН, 1975. — 1. — С. 35–39.

UDC 519.21

Analysis of the Multichannel Exponential System of Service with the Limited Store and Resequence of Requests

S. I. Matyushenko, D. A. Pyatkina, V. N. Kalenichenko

Department of Applied Probability and Informatics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

The multi-channel finite-capacity queuing system with Poisson flow is considered. The customer caught all the places in the queue employed, is lost and will not affect the functioning of the system. The service times are random, independent and have exponential distribution. Intensities of service are different. The customer with the possibility of selecting a device, choosing from available devices one, that has the highest intensity of service. On leaving the system there is a buffer in which there is a resequence of customers according to order of their receipt.

Functioning of the system is described by uniform Markov process. In the assumption that intensities of the flow and service of customers are finite the final probabilities of statuses of Markov process exist, are strictly positive, don't depend on initial distribution and match the stationary probabilities.

An algorithm to calculate the stationary probabilities of the state of the system we developed in previous work. The main objective of this work is to obtain the stationary performance of the system based on the results of previous work. The distribution function of the resequence time was obtained. The numerical analysis of dependence of the average resequence time from the system load and number of devices was considered.

Key words and phrases: queuing system, resequence of requests, stationary distributing, distribution function of the resequence time, initial moments of the resequence time.

References

1. S. I. Matyushenko, Analysis of Multi-Channel Queueing System with Limited Storage and Resequence Customers, Vestnik of Tver State University, Series "Applied Mathematics" 4 (37) (2010) 55–70, in Russian.
2. V. A. Naumov, About the Limiting Probabilities of the Semi-Markov Process, in: Modern Problems in the Exact Sciences, no. 1, UDN, Moscow, 1975, pp. 35–39, in Russian.