Физика

УДК 531.31

Исследование неголономности некоторых гамильтоновых полей

И. Е. Каспирович, В. А. Попова, В. И. Санюк

Кафедра теоретической физики и механики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

В классической механике понятие неголономности применяется, как правило, лишь к связям, наложенным на систему. При этом динамической системе с наложенной кинетической неголономной связью можно сопоставить векторное поле. Одной из характеристик такого поля является степень неголономности, которая определяет свойства геометрии данного поля. Однако использование этой характеристики в геометрии векторных полей ограничивалось полями в евклидовом пространстве. В данной статье предложено обобщение понятия степени неголономности на поля, определённые в неевклидовых пространствах. Для этого степень неголономности рассматривается как трёхлинейная форма. Коэффициенты этой формы, очевидно, связаны с компонентами метрического тензора пространства, в котором определено векторное поле. Соответственно, обобщение метрического тензора на случай неевклидового пространства порождает обобщения коэффициентов трёхлинейной формы, которые, в свою очередь, обобщают понятие степени неголономности. В качестве примера в данной статье проводится анализ неголономности гамильтоновых векторных полей. Также ставится вопрос о возможности применения данного метода и о существовании механической трактовки полученных результатов.

Ключевые слова: степень неголономности, неголономные связи, гамильтоново поле, интегрируемость дифференциальных форм, форма Пфаффа, ковариант Фробениуса.

1. Степень неголономности в неевклидовом пространстве

В геометрии векторных полей поле $\vec{\xi}$ называется голономным, если существует семейство поверхностей, ортогональных данному полю:

$$\vec{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} \in \mathbb{R}^3, \quad \xi_1 \mathrm{d}x_1 + \xi_2 \mathrm{d}x_2 + \xi_3 \mathrm{d}x_3 = 0. \tag{1}$$

Иными словами, поле голономно, если соответствующее ему уравнение Пфаффа (1) интегрируемо, то есть представляет собой полный дифференциал некоторой функции. Последним определением удобнее воспользоваться для обобщения на многомерный случай. Имеет место некоторый критерий голономности: согласно теореме Якоби [1], поле голономно только тогда, когда оно ортогонально своему ротору, что позволяет ввести некоторую величину, характеризующую голономность поля

$$\rho = (\vec{\xi}, \mathrm{rot}(\vec{\xi})). \tag{2}$$

Эту величину иногда называют степенью неголономности. Формула (2) применима для векторного поля в трёхмерном евклидовом пространстве, однако она редко находит применение в работах по неголономной механике в силу отсутствия содержательных примеров с одной кинематической связью.

Для начала необходимо обобщить определение степени неголономности для векторных полей в многомерном евклидовом пространстве. Для этого потребуется исследовать интегрируемость линейных дифференциальных форм в многомерном случае. Рассмотрим форму следующего вида, которую будем называть в

Статья поступила в редакцию 9 апреля 2015 г.

дальнейшем пфаффовой или формой Пфаффа

$$\omega = \xi_1 \mathrm{d}x_1 + \xi_2 \mathrm{d}x_2 + \cdots + \xi_n \mathrm{d}x_n. \tag{3}$$

Уравнение $\omega = 0$, соответственно, называется уравнением Пфаффа. Для его интегрируемости, как показал Фробениус, необходимо чтобы все коэффициенты соответствующей билинейной формы Φ были равны нулю, то есть

$$\Phi = \mathrm{d}\omega(\delta) - \delta\omega(d) = \frac{1}{2} F_{ji} (\mathrm{d}x_i \delta x_j - \delta x_i \mathrm{d}x_j). \tag{4}$$

Здесь коэффициенты $F_{ji} = \dfrac{\partial \xi_j}{\partial x_i} - \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_j}$ образуют 2-валентный кососимметричный тензор, а форма Φ называется билинейным ковариантом Фробениуса. Таким образом, чтобы система (3) была вполне интегрируема, все F_{ji} должны быть равны нулю. Это утверждение носит название теоремы Фробениуса. Для перехода от внешних форм к векторным полям необходимо рассмотреть некоторое обобщённое условие (4), которое будет являться критерием неголономности.

Действительно, рассмотрим следующее выражение, состоящее из коэффициентов коварианта Фробениуса:

$$\Omega_{ijk} = \xi_i F_{kj} + \xi_j F_{ik} + \xi_k F_{ji}. \tag{5}$$

Как легко показать, оно преобразуется по тензорному закону, и, если в явном виде расписать все коэффициенты, то будет видно, что для трёхмерного случая это выражение будет в точности совпадать с формулой для степени неголономности (2). Запишем (5) в следующем виде:

$$\Omega_{ijk} = \xi_{\lceil i} \partial_j \xi_{k \rfloor}, \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

где квадратные скобки означают альтернирование, то есть сумму по всем перестановкам индексов с учётом чётности перестановок. Этот тензор называется объектом неголономности, а равенство нулю всех его компонент и есть необходимое и достаточное условие неголономности векторного поля в многомерном евклидовом пространстве.

Далее рассмотрим обобщение формул (1), (2), (5) на случай полей в неевклидовых пространствах. Начнём с трёхмерного случая. Формально, в формуле (2) для степени голономности стоит скалярное произведение поля на свой ротор, поэтому, на первый взгляд, для обобщения достаточно вместо евклидовой метрики использовать, например, риманову. Но при замене координат получившаяся формула будет вести себя странно, так как обычный, полярный вектор $\vec{n}$ умножается на псевдовектор. Обойти это можно следующим образом: для удобства запишем формулу (2) в виде трёхлинейной формы, получим:

$$\rho = \omega_{ijk} \xi_i \partial_j \xi_k. \tag{7}$$

Задача сводится к выявлению связи между коэффициентами формы (7) и компонентами метрического тензора. К слову, эти коэффициенты изменяются по трёхковариантному закону, то есть являются тензором. Также видно, что при $\omega_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ наша формула для степени неголономности переходит в обычный вид (2) для евклидова пространства. Стоит отметить, что предполагаемое обобщение не потребует замены частных производных на ковариантные [2], так как кососимметричные коэффициенты F_{ij} взаимно аннулируют все неевклидовы дополнения, оставляя лишь евклидовы частные производные. Теперь запишем формулу (2) в виде скалярного произведения $\rho = g_{ij} \xi_i r_j$, где $r_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \xi_k$.

Сравнивая коэффициенты при соответствующих членах, получим следующее выражение для трёхиндексных коэффициентов в (7):

$$\omega_{ijk} = g_{il}\varepsilon_{ljk}. \tag{8}$$

Теперь распишем в виде трёхлинейной формы формулу для неголономности полей в многомерном пространстве:

$$\begin{aligned}\Omega_{ijk} = \omega_{iii}\xi_i\partial_i\xi_i + \omega_{iij}\xi_i\partial_i\xi_j + \omega_{iik}\xi_i\partial_i\xi_k + \dots +\\ + \dots + \omega_{iji}\xi_i\partial_j\xi_i + \omega_{ijj}\xi_i\partial_j\xi_j + \omega_{ijk}\xi_i\partial_j\xi_k + \dots +\\ + \dots + \omega_{kki}\xi_k\partial_k\xi_i + \omega_{kkj}\xi_k\partial_k\xi_j + \omega_{kkk}\xi_k\partial_k\xi_k.\end{aligned} \tag{9}$$

Заметим, что объект неголономности, определённый таким образом, не всегда преобразуется по тензорному закону, он является тензором, только если векторное поле определено в евклидовом пространстве с декартовыми координатами. Таким образом, если поле является голономным в одной системе координат, то оно голономно и в другой системе координат. Элементы с повторяющимися индексами, которые были тождественно равны нулю в евклидовом случае, могут стать ненулевыми. Таким образом, для анализа неголономности полей, заданных в неевклидовом пространстве, необходимо учитывать все компоненты объекта неголономности.

2. Применение в механике и некоторые свойства

Для начала укажем некоторые свойства объекта неголономности.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{a}(x)$ *и* $\mathbf{b}(x)$ *векторные поля в n-мерном евклидовом пространстве, причём* $a_i = f(x)b_i$. *Здесь* $x = (x_1, \dots, x_n)$, *а* f *— произвольная гладкая функция. Тогда объекты неголономности этих векторных полей связаны нелинейным соотношением:*

$$\Omega_{ijk}(\mathbf{a}) = f^2(x)\Omega_{ijk}(\mathbf{b}).$$

Доказательство. Для доказательства распишем объект неголономности в явном виде:

$$\begin{aligned}\Omega_{ijk}(\mathbf{a}) = a_i\left(\frac{\partial a_k}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_k}\right) + a_j\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right) + a_k\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right) =\\ = f(x)b_i\left(f(x)\frac{\partial b_k}{\partial x_j} - f(x)\frac{\partial b_j}{\partial x_k} + b_k\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} - b_j\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right) + \dots +\\ + f(x)b_k\left(f(x)\frac{\partial b_j}{\partial x_i} - f(x)\frac{\partial b_i}{\partial x_j} + b_j\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - b_i\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right).\end{aligned}$$

Все слагаемые, содержащие производные типа $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, взаимно уничтожаются, поэтому в формуле остаётся лишь объект неголономности поля b, умноженный на квадрат функции $f(x)$. □

В частном случае, когда $f(x) = 1/\sqrt{(\mathbf{b}, \mathbf{b})}$, $\mathbf{a}$ является просто нормированным полем. Тогда, применяя полученное выше утверждение, получим:

$$\Omega_{ijk}(\mathbf{a}) = \frac{1}{(\mathbf{b}, \mathbf{b})}\Omega_{ijk}(\mathbf{b}).$$

Таким образом, теорему Якоби можно обобщить на любое ненормированное векторное поле, поделив степень неголономности на квадрат модуля векторного поля.

Теперь рассмотрим объект неголономности от суммы двух полей.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{a}(x)$ *и* $\mathbf{b}(x)$ *— векторные поля в* n*-мерном евклидовом пространстве, здесь* $x = (x_1, \ldots, x_n)$*, тогда объект неголономности суммы векторных полей определяется по формуле:*

$$\Omega_{ijk}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \Omega_{ijk}(\mathbf{a}) + \Omega_{ijk}(\mathbf{b}) + a_{\lceil i}\partial_j b_{k\rfloor} + b_{\lceil i}\partial_j a_{k\rfloor}.$$

В трёхмерном случае формула приобретает вид:

$$\Omega_{ijk}(\vec{a}+\vec{b}) = \Omega_{ijk}(\vec{a}) + \Omega_{ijk}(\vec{b}) + (\vec{a}, \mathrm{rot}\vec{b}) + (\vec{b}, \mathrm{rot}\vec{a}).$$

Доказательство. Для доказательства распишем объект неголономности в явном виде:

$$\Omega_{ijk}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (a_i + b_i)\left(\frac{\partial a_k}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_k} + \frac{\partial b_k}{\partial x_j} - \frac{\partial b_j}{\partial x_k}\right) +$$
$$+ (a_j + b_j)\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} + \frac{\partial b_i}{\partial x_k} - \frac{\partial b_k}{\partial x_i}\right) + (a_k + b_k)\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - \frac{\partial b_i}{\partial x_j}\right).$$

Раскрывая скобки и группируя слагаемые, получим в точности формулу для неголономности суммы полей. Таким образом, утверждение доказано. □

Понятие неголономности встречается в аналитической механике при рассмотрении свойств связей, наложенных на динамическую систему. Если связь выражена неинтегрируемым дифференциальным выражением, то она называется неголономной. В случае, если связь является линейной формой по скоростям, то критерий неголономности такой связи совпадает с критерием неголономности векторного поля, соответствующего связи. Одним из методов решения задач неголономной механики является переход к квазикоординатам. Уравнение Лагранжа в квазиикоординатах π_k, как известно [3], имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\pi}_k} - \frac{\partial L^*}{\partial \pi_k} + \gamma_{kij}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\pi}_i}\dot{\pi}_j = 0,$$

где L^* — лагранжиан, зависящий уже от квазикоординат, а γ_{kij} — трёхиндексные символы Больцмана–Гамеля, определяемые следующим образом:

$$\gamma_{kij} = b_{sk}b_{lj}\left(\frac{\partial a_{is}}{\partial q_l} - \frac{\partial a_{il}}{\partial q_s}\right).$$

Здесь b_{sk} компоненты обратной матрицы к a_{ik}. Видно, что символы Больцмана–Гамеля можно переписать через введённые ранее коэффициенты билинейной формы Фробениуса F_{ij}, тем самым можно проследить некоторую связь с объектом неголономности.

3. Вычисление объектов неголономности для гамильтоновых полей

Как известно [4], гамильтоново поле определяется как поле изменения координат фазового пространства во времени. Оно имеют следующий вид: $\xi = \{\dot{z}_1, \dot{z}_2, \ldots, \dot{z}_{2n}\}$, где z_i — координаты фазового пространства, а производные определяются симплектической структурой следующим образом:

$$\xi_i = \dot{z}_i = \{z_i, H\} = J_{ij}\frac{\partial H}{\partial z_j},$$

где H — гамильтониан системы.

Известно [5], что гамильтоново векторное поле является объектом симплектической геометрии. Фазовое пространство четырёхмерно, поэтому воспользуемся обобщённой формулой (9). Сначала вычислим компоненты ω_{ijk}, воспользовавшись формулой (8), в которой g_{ij} определим как метрические коэффициенты симплектической формы в четырёхмерном случае. Следовательно, ненулевыми коэффициентами будут, например, ω_{112}, ω_{121}, ω_{323}, $\omega_{332}, \ldots$. Заметим, что в этом случае объект неголономности не всегда кососимметричен, однако ввиду того, что слагаемые в каждом элементе с перестановкой индекса меняют знак, нам достаточно выписать лишь по одному элементу из всевозможных перестановок.

$$\begin{aligned}
\Omega_{123} &= \xi_1\left(\frac{\partial\xi_2}{\partial\zeta_1}-\frac{\partial\xi_1}{\partial\zeta_2}\right)-\xi_3\left(\frac{\partial\xi_3}{\partial\zeta_2}-\frac{\partial\xi_2}{\partial\zeta_3}\right),\\
\Omega_{124} &= -\xi_4\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial\zeta_4}-\frac{\partial\xi_4}{\partial\zeta_1}\right)+\xi_2\left(\frac{\partial\xi_2}{\partial\zeta_1}-\frac{\partial\xi_1}{\partial\zeta_2}\right),\\
\Omega_{134} &= -\xi_3\left(\frac{\partial\xi_4}{\partial\zeta_3}-\frac{\partial\xi_3}{\partial\zeta_4}\right)+\xi_1\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial\zeta_4}-\frac{\partial\xi_4}{\partial\zeta_1}\right),\\
\Omega_{234} &= -\xi_4\left(\frac{\partial\xi_4}{\partial\zeta_3}-\frac{\partial\xi_3}{\partial\zeta_4}\right)+\xi_2\left(\frac{\partial\xi_3}{\partial\zeta_2}-\frac{\partial\xi_2}{\partial\zeta_3}\right).
\end{aligned} \tag{10}$$

Подставляя в формулу определение гамильтонова поля через канонические уравнения, получим следующие формулы:

$$\begin{aligned}
\Omega_{123} &= \frac{\partial H}{\partial p_1}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_2\partial q_1}-\frac{\partial^2 H}{\partial p_1\partial q_2}\right)-\frac{\partial H}{\partial q_1}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_1\partial p_2}+\frac{\partial^2 H}{\partial q_1\partial q_2}\right),\\
\Omega_{124} &= \frac{\partial H}{\partial p_2}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_2\partial q_1}-\frac{\partial^2 H}{\partial p_1\partial q_2}\right)+\frac{\partial H}{\partial q_2}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_1\partial p_2}+\frac{\partial^2 H}{\partial q_1\partial q_2}\right),\\
\Omega_{234} &= -\frac{\partial H}{\partial p_2}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_1\partial p_2}+\frac{\partial^2 H}{\partial q_1\partial q_2}\right)-\frac{\partial H}{\partial q_2}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_2\partial q_1}-\frac{\partial^2 H}{\partial p_1\partial q_2}\right),\\
\Omega_{134} &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_2\partial q_1}-\frac{\partial^2 H}{\partial p_1\partial q_2}\right)+\frac{\partial H}{\partial p_1}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_1\partial p_2}+\frac{\partial^2 H}{\partial q_1\partial q_2}\right).
\end{aligned} \tag{11}$$

Выше были рассмотрены только компоненты с неповторяющимися индексами. Однако, как отмечалось ранее, для полноценного анализа необходимо учесть все ненулевые элементы объекта неголономности, так как в них будут встречаться все коэффициенты F_{ij}, следовательно, необходимым и достаточным условием для голономности гамильтонова поля будет равенство нулю всех этих коэффициентов, т.е.

$$F_{ij} = 0, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Заметим, что для произвольного негамильтонова векторного поля в симплектическом пространстве это не так. Гамильтонианы, как правило, квадратичны по обобщённым импульсам, следовательно, в формулах для объекта неголономности будут появляться линейные, квадратичные и формы третьей степени по импульсам. Тогда равенство нулю всех коэффициентов F_{ij} автоматически означает равенство нулю всех компонент объекта неголономности. Выпишем их в явном виде:

$$\begin{gathered}
F_{12} = F_{34} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_1\partial q_2}-\frac{\partial^2 H}{\partial p_2\partial q_1}, \quad F_{14} = F_{23} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_1\partial p_2}+\frac{\partial^2 H}{\partial q_1\partial q_2},\\
F_{24} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial q_2^2}, \quad F_{13} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial q_1^2}.
\end{gathered} \tag{13}$$

4. Заключение

Анализируя получившийся результат, приходим к выводу о том, что даже на первый взгляд, поля простых динамических систем, таких как свободное движение на плоскости, будут неголономны. Одно из немногих голономных гамильтоновых полей будет поле порождаемое гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 - q_1^2 - q_2^2\right).$$

Приведённые выше соображения могут рассматриваться как некоторое подтверждение высказывания одного из пионеров неголономной динамики Воронца о неголономности гамильтоновых динамических систем [6].

Литература

1. *Аминов Ю. А.* Геометрия векторного поля. — М.: Наука, 1990. — 215 с.
2. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. — М.: Наука, 1986. — 760 с.
3. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. — М.: Наука, 1967. — 521 с.
4. *Трещев Д. В.* Гамильтонова механика // Лекционные курсы НОЦ. — 2006. — № 4. — С. 64.
5. *Татаринов Я. В.* Лекции по классической динамике. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. — 296 с.
6. *Сумбатов А. С.* Интегралы, линейные относительно скоростей. Обобщения теоремы Якоби // Итоги науки и техники. Общая механика. — 1979. — Т. 5. — С. 3–57.

UDC 531.31

Analysis of Nonholonomicity Value of Some Hamiltonian Fields

I. E. Kaspirovich, V. A. Popova, V. I. Sanyuk

Department of Theoretical Physics and Mechanics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

In classical mechanics such notion as nonholonomicity is applied only to constraints put on a dynamical system. Besides, Pfaffian nonholonomic constraints might be associated with vector fields. The Nonholonomicity value is one of the principal characteristics of such fields, which determines properties of geometry of these vector fields. However, the application of this characteristic to the geometry of vector fields was restricted only to fields in Euclidean spaces. Some generalization of nonholonomicity value of vector fields in non-Euclidean spaces is proposed in this paper. For this purpose the nonholonomicity value is considered as a trilinear form. It is obvious that the coefficients of this form are connected with the components of the metric tensor of the space, where a vector field is defined. So generalization of metric tensor to non-Euclidean spaces generates the generalization of the coefficients of trilinear form, which in its turn generates the generalization of nonholonomicity value. As an example, the nonholonomicity values of Hamiltonian vector fields in sympletic spaces are analyzed in this article. Also it is important to find out whether a mechanical interpretation of the obtained results exists and can we actually apply this method to Hamiltonian fields.

Key words and phrases: nonholonomicity value, nonholonomic constraints, Hamiltonian vector field, integrability of differential forms, Pfaffian form, Frobenius theorem.

References

1. Y. A. Aminov, Geomerty of Vector Fields, Nauka, Moscow, 1990, in Russian.
2. B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, A. T. Fomenko, Modern Geometry: Methods and Applications, Nauka, Moscow, 1986, in Russian.
3. Y. I. Neymark, N. A. Fufaev, Dynamics of Nonholonomic Systems, Nauka, Moscow, 1967, in Russian.
4. D. V. Tretschev, Hamiltonian mechanics, Lectures of the Educational Center of Steklov Mathematical Institute (4), in Russian.
5. Y. V. Tatarinov, Lectures on Classical Dynamics, Moscow University Publishing, Moscow, 1984, in Russian.
6. A. S. Sumbatov, Linear by Velocities Integrals. The Generalizations of Jacobi's Theorem, The Results of Science and Technology. General Mechanics 5 (1979) 3–57, in Russian.