УДК 330.46+538.93, PACS 89.65.Gh

Новый подход к объяснению относительно высокой вероятности кризисов на финансовых рынках

В. П. Семёнов*, **С. В. Копылов**†

* *Кафедра высшей математики*
Российский государственный экономический университет им. Г.В. Плеханова
Стремянной пер., д. 36, Москва, Россия, 115054
† *Кафедра физики*
Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)
ул. Б. Семёновская, д. 38, Москва, Россия, 107023

В статье предлагается модель, в основе которой лежит гипотеза о квантовой природе воздействия информации на финансовые рынки. Показано, что на информационно насыщенных, волатильных финансовых рынках ценовые выбросы реально ожидаемы.

Проблеме исследования причин крахов финансовых рынков и методам их прогнозирования посвящено множество работ, выполненных как финансовыми аналитиками, так и математиками. Сама тема подчас провоцирует на эффектные заявления и выводы, зачастую не имеющие под собой каких-либо убедительных оснований. Однако существует и ряд серьёзных подходов, позволивших получить в последние годы обнадёживающие результаты. Большинство из них так или иначе связаны с эконофизикой — областью экономики, смежной с физикой. В русле данного направления лежат и наши исследования, развивающие неожиданный аспект решения проблемы.

Ключевые слова: финансовые рынки, цены активов, ценовые выбросы, риски, квантовый характер информации, резонансные явления, плотность вероятности, волновая функция, квантовый осциллятор.

1. Введение

Проблеме исследования причин крахов на финансовых рынках и методам их прогнозирования посвящено множество работ, выполненных как финансовыми аналитиками, так и математиками. После работ Фама и Мандельброта [1, 2] популярность получили модели финансовых индексов, основанные на устойчивых распределениях. Из свойств устойчивых распределений следует, что если использовать их в качестве функций плотности вероятности (ФПВ), то не удаётся совместить сразу три требования: сохранения типа распределения при композиции, наличие «тяжёлых хвостов» с индексом $\alpha \in (0, 2)$ и конечность второго момента, а значит дисперсии. К сожалению, до сей поры в финансовой литературе нет единодушного мнения о том, каково же всё-таки истинное значение «хвостового индекса» α для тех или иных обменных курсов, акций и других финансовых инструментов. Резюмируя сказанное, следует признать, что традиционные подходы к объяснению резких ценовых выбросов, далеко выходящих за границы интервала 3σ (σ – стандартное отклонение), которые служат спусковым механизмом к возникновению паники на финансовых рынках, не свободны от противоречий и на сегодня мы не можем с уверенностью опираться на них при прогнозировании предкризисных состояний фондовых рынков. В работе [3] мы в качестве модели, описывающей ценовые колебания активов фондового рынка, предложили использовать известное уравнение колебаний:

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega^2 y = F_0 \cos(\gamma t).$$

Здесь $y(t) = \ln(N_n/N_0)$, где $N_n = N_n(t_0 + \delta t)$ — стоимость актива в момент $n = t_0 + \delta t$ при условии, что в момент t_0 он стоил N_0.

Статья поступила в редакцию 14 января 2015 г.

Статья подготовлена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект № 13-02-00289а).

Существует важный аспект, связанный с представленной здесь моделью. Присутствующие в ней ценовые приращения $y_\Delta(t) = \ln(N(t+\Delta t)) - \ln(N(t))$ являются реализациями случайной функции $y(t) = X\cos(\omega t)$, где X – случайная величина (СВ), имеющая распределение, отличное от нормального. Закон колебаний – это закон, характерный для возбуждённого рынка. Однако известно, что на спокойном эффективно функционирующем финансовом рынке логарифмы ценовых приращений распределены в соответствии с законом Гаусса. И здесь возникает вопрос, каков механизм перехода рынка из состояния нормального функционирования в состояние возбуждения и, возможно, предкризисное состояние?

2. Описание модели

В основу модели перехода рынка в состояние возбуждения, которую мы предлагаем, положены постулаты.

1. Процесс передачи информации является квантовым. Существуют дискретные информационные уровни.
2. Функция плотности вероятности для каждого информационного уровня:

$$P_n(y) = \Psi_n \Psi_n = \Psi_n^2.$$

3. $\Psi_n(y)$ мы определяем как решение уравнения:

$$\frac{\Psi}{y^2} + \frac{2}{h_0^2}\left(E - \frac{\omega^2 y^2}{2}\right)\Psi = 0$$

с определёнными граничными условиями. Здесь $E = \omega^2 B^2/2 = \mathrm{const} > 0$, h_0 квант информации. Ситуация аналогична имеющей место в физике, где существует квант действия h — постоянная Планка. Оценить величину кванта информации мы не можем, но уверенно можно сказать, что это большая величина.

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию стремления к нулю на бесконечности $\lim\limits_{y\to\pm\infty}\Psi(y) = 0$ и условию нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi_n^2(y)\mathrm{d}y = 1$, как известно, имеет вид:

$$\Psi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n! y_0}} e^{-\frac{1}{2}(y/y_0)^2} H_n(y/y_0).$$

Здесь $H_n(y/y_0)$ — полином Эрмита n-й степени; $y_0 = 1/\beta$; $n = 0, 1, 2, \ldots$.

В области малых квантовых чисел $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеем:

$$n = 0; \quad E_0 = h_0\omega/2; \quad \Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}y_0}} e^{-\frac{1}{2}(y/y_0)^2}; \quad P_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(y/\sigma)^2},$$

где $\sigma = y_0/\sqrt{2}$. Таким образом, при $n = 0$ ФПВ имеет нормальное распределение.

$$n = 1;\ E_1 = \frac{3h_0\omega}{2};\ \Psi_1 = \frac{2}{\sqrt{2\sqrt{\pi}y_0}}(y/y_0)e^{-\frac{1}{2}(y/y_0)^2};\ P_1(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}y_0}(y/y_0)^2 e^{-(y/y_0)^2};$$

$$n = 2;\ E_2 = \frac{5h_0\omega}{2};\ \Psi_2 = \frac{(2(y/y_0)^2 - 1)}{\sqrt{2\sqrt{\pi}y_0}} e^{-\frac{1}{2}(y/y_0)^2};\ P_2(y) = \frac{(2(y/y_0)^2 - 1)^2}{\sqrt{\pi}y_0} e^{-(y/y_0)^2}.$$

Математическое ожидание для квантового гармонического осциллятора цен определяется как

$$M(y) = C_n^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y e^{-(y/y_0)^2} H_n^2(y/y_0)\mathrm{d}y.$$

Очевидно, что при любом n, $M(y) = 0$. Дисперсия, как обычно, определяется соотношением:

$$D(y) = \sigma^2(y) = C_n^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-(y/y_0)^2} H_n^2(y/y_0)\mathrm{d}y.$$

Здесь $C_n = (2^n n! \sqrt{\pi} y_0)^{-1/2}$ — нормировочный коэффициент.

В результате вычислений находим:

$$D_n(y_n) = \sigma^2(y_n) = (2n+1)\frac{y_0^2}{2},$$

откуда стандартное отклонение есть $\sigma(y_n) = \sqrt{2n+1}\sigma_{norm}$, где $\sigma_{norm} = y_0/\sqrt{2}$.

Вероятность попадания логарифма ценового приращения в заданный интервал $(y_1; Y_2)$ определяется соотношением

$$P_n\{y_1 < y < y_2\} = \frac{1}{(\sqrt{\pi} 2^n n! y_0)} \int\limits_{y_1}^{y_2} e^{-(y/y_0)^2} H_n^2(y/y_0)\mathrm{d}y.$$

3. Оценки

Положив $y_1 = -\sigma_n; y_2 = \sigma_n$, найдём вероятность того, что значение СВ y отклонится от математического ожидания в ту или иную сторону на величину одного стандартного отклонения.

Случай $n = 0$ (нормальное распределение):

$$P\{-\sigma_0 < y < \sigma_0\} = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) = 0,6826.$$

Здесь $\Phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ — функция Лапласа.

Аналогично $P\{-2\sigma_0 < y < 2\sigma_0\} = 2\Phi(2) = 0,9544$; $P\{-3\sigma_0 < y < 3\sigma_0\} = 2\Phi(3) = 0,9973$, т.е. правило «трёх сигм»: вероятность того, что значение нормально распределённой СВ принадлежит интервалу $(-3\sigma_0; 3\sigma_0)$ практически равна 1.

Случай $n = 1$: $P\{-\sigma_0 < y < \sigma_0\} = 0,1986$; $P\{-2\sigma_0 < y < 2\sigma_0\} = 0,7384$; $P\{-3\sigma_0 < y < 3\sigma_0\} = 0,9706$, т.е. вероятность того, что значение СВ оказывается за пределами интервала $(-3\sigma_0; 3\sigma_0)$ вполне заметная величина $\approx 0,03$.

Правило «трёх нормальных сигм» уже «не работает» и событие, крайне редкое с точки зрения распределения Гаусса, становится достаточно ожидаемым на возбуждённом ценовом уровне. Тем не менее, вероятностная оценка отклонений от математического ожидания становится близкой к привычной, если в качестве меры разброса возьмём стандартное отклонение для уровня $n = 1$: $\sigma_1 = \sqrt{3}\sigma_{norm} = \sqrt{3}\sigma_0$. $P\{-\sigma_0 < y < \sigma_0\} = 0,608$; $P\{-2\sigma_0 < y < 2\sigma_0\} = 0,9960$; $P\{-3\sigma_0 < y < 3\sigma_0\} = 0,9999$, т.е. правило «трёх сигм» работает, но уже не для распределения Гаусса, а распределения уровня $n = 1$.

Случай $n = 2$: $P\{-\sigma_0 < y < \sigma_0\} = 0,1987$; $P\{-2\sigma_0 < y < 2\sigma_0\} = 0,4145$; $P\{-3\sigma_0 < y < 3\sigma_0\} = 0,8682$, т.е. вероятность того, что значение СВ не попадает в интервал $(-3\sigma_0; 3\sigma_0)$, равна $0,138$, и событие, редчайшее для нормального распределения, является здесь вполне ожидаемым [4]. Однако вероятностная оценка отклонений от математического ожидания при $n = 2$ становится близкой к оценке при $n = 0$ (нормальное распределение), если в качестве масштаба разброса мы возьмём стандартное отклонение для уровня $n = 2$: $\sigma_2 = \sqrt{5}\sigma_0$ $P\{-\sigma_2 < y < \sigma_2\} = 0,3705$; $P\{-2\sigma_2 < y < 2\sigma_2\} = 0,9785$; $P\{-3\sigma_2 < y < 3\sigma_2\} = 0,9999998$.

В финансовом мире Башелье–Самуэльсона, в котором приращения логарифмов цен распределены по закону Гаусса, все события масштабированы по фундаментальной единице измерения — стандартному отклонению σ_0. В связи с этим становится ясно, что является «нормальным», а что – «аномально» согласно гауссовой модели, например, падение цен на американском фондовом рынке 19.10.1987 г. на 22,6% и отскок 21.10.1987 г. на 9,7% согласно Гауссу — события, которые не должны происходить. Они, по существу, невозможны.

4. Обсуждение

В основе предлагаемой модели лежит предположение о квантовой природе воздействия информации на финансовые рынки. Как следствие, стоимости активов, изменяясь, последовательно переходят с одного дискретного уровня на другой, причём каждый из них соответствует определённой величине информационной обеспеченности $E_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$. При этом нормальное распределение имеет место только при $n = 0$. Для всех других $n = 1, 2, 3, \ldots$ ФПВ — отличны от гауссовых. Как следствие, вероятность попадания логарифма ценового приращения в заданный интервал при росте n все больше отличается от таковой, вычисленной в предположении справедливости для данного уровня нормального распределения. Т.е. масштаб измерения риска на «ценовой линейке», определяющееся стандартным отклонением $\sigma(y_n) = \sqrt{2n+1}\sigma_{norm}$ ($\sigma \approx \sqrt{2n}\sigma_{norm}$ в области больших квантовых чисел).

Функция плотности вероятности $P_n(y) = \Psi_n^2$, где $\Psi_n(y)$ — решение предлагаемого уравнения, обладает рядом привлекательных свойств.

Во-первых, это распределение обладает всеми моментами

$$M(y^k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^k P_n(y)\mathrm{d}y \quad (k = 1, 2, 3, 4, \ldots),$$

т.е. дисперсия случайной величины Y конечна.

Во-вторых, распределение $P_n(y)$ при фиксированном n является устойчивым, с индексом устойчивости $\alpha = 2$ (таким же как у нормального распределения) определяющим поведение СВ $Y = \{\ldots y_{t_k} \ldots\}$ на бесконечности. Правда, значение хвостового индекса $\alpha = 2$, такого же, как и у нормального распределения, казалось бы, указывает на отсутствие «тяжёлых хвостов». Однако это не так, ибо с ростом n (ростом информационного насыщения рынка) масштаб измерения рисков на ценовой шкале меняется (растёт), $\sigma(y_n) \approx \sqrt{2n}$ и отсутствие тяжёлых хвостов для информационного возбуждённого уровня $n = 2$ в масштабе уровня $n = 0$ означает их появление на асимптотике.

В-третьих, конечность и отличие от нуля четвёртого момента $M(Y^4)$ предопределяет наличие значительного эксцесса, растущего с увеличением n, что также указывает на появление тяжёлых хвостов на асимптотике в масштабе нормального распределения.

В-четвёртых, равенство нулю третьего момента $M(Y^3) = 0$ свидетельствует об отсутствии асимметрии (скошенности) в распределении $P_n(y) = \Psi_n^2$, что вроде бы не подтверждается графиками эмпирических плотностей распределений (гистограммами).

5. Заключение

Поскольку скошенность реального распределения имеет место, то в уравнении необходимо учесть наличие асимметричности, конечно, с сохранением идеи квантового характера информации.

Литература

1. *Fama E. F.* The Behavior of Stock Market Prices. — 1965. — Vol. 34. — Pp. 420–429.
2. *Mandelbroot B. B.* Statistical Methodology for Non-Periodic Cycles: from the Covariance to R/S Analvsuis. — 1972. — Vol. 1, No 3. — Pp. 259–290.
3. *Семенов В. П., Соловьев Ю. П.* Резонансные явления на финансовых рынках. — 2011. — № 41 (473).
4. *Семенов В. П., Соловьев Ю. П.* Вероятность катастрофических ценовых выбросов на финансовых рынках. — 2013. — № 1. — С. 30.

UDC 330.46+538.93, PACS 89.65.Gh

A New Approach to the Relatively High Probability of a Crisis In the Financial Markets Explanation

V. P. Semenov*, S. V. Kopylov†

* *Department of Mathematics*
Russian State University of Economics. G.V. Plekhanov
36, Stremyannaya lane., Moscow, Russia, 115054
† *Department of Physics*
MAMI Moscow State Engineering University
38, Str. B. Semenovskaya, Moscow, Russia, 107023

In this paper we propose a model, which is based on the hypothesis of a quantum nature of the impact of information on the financial markets. It is shown that pricing emissions are expected to be real in the information-rich, volatile financial markets.

Numerous works carried out by financial analysts as well as mathematicians were devoted to the problem of research of causes of financial markets crashes and the methods of this crashes predictions. The topic itself sometimes provokes spectacular statements and conclusions, often without any convincing reason. However, in recent years there were a number of serious approaches that allowed to obtain encouraging results. Most of them, in one way or the other are connected with econophysics – economics, related to physics. Our research, developing surprising aspect of the problem, belongs to this trend.

Key words and phrases: financial markets, asset prices, price emissions, risks, quantum nature of information; resonance phenomena, probability density of wave function, quantum oscillator.

References

1. E. F. Fama, The Behavior of Stock Market Prices 34 (1965) 420–429.
2. B. B. Mandelbroot, Statistical Methodology for Non-Periodic Cycles: from the Covariance to R/S Analvsuis I (3) (1972) 259–290.
3. V. P. Semenov, Y. P. Soloviev, Resonance Phenomena on Financial Markets (41) (2011) 473, in Russian.
4. V. P. Semenov, Y. P. Soloviev, The Probability of Catastrophic Price of Emissions in the Financial Markets (1) (2013) 30, in Russian.