Математические модели и методы в экономике

УДК 330.46+538.93, PACS 89.65.Gh

Становление эконофизики

В. П. Семёнов[*], **С. В. Копылов**[†]

[*] *Кафедра высшей математики*
Российский государственный экономический университет им. Г.В. Плеханова
Стремянной пер., д. 36, Москва, Россия, 115054
[†] *Кафедра физики*
Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)
ул. Б. Семёновская, д. 38, Москва, Россия, 107023

В статье прослеживается эволюция гипотезы свободного блуждания, играющей выдающуюся роль во многих областях человеческого знания: в математике, молекулярной физике, гидро- и газодинамике, космологии, химии, биологии. Эта гипотеза является фундаментом, на котором в настоящее время базируется концепция эффективного рынка, источники многих современных теорий, а также методы анализа и прогнозирования финансовых рынков. Развитие гипотезы свободного блуждания привело в конце 90-х гг. прошлого века к появлению новой области знаний — эконофизики, научной дисциплины, возникшей на стыке экономики, физики и математики. Обсуждаются перспективные направления развития этой науки.

Ключевые слова: эффективный рынок, цены активов, случайная величина, свободные блуждания, диффузия, корреляция, эконофизика.

1. Введение

Существует проблема, которая фактически игнорировалась традиционными подходами в экономике и финансах, а именно: то обстоятельство, что нет доказательств существования саморегуляции рынков. Они ведут себя иначе, чем гипотетически должны были бы в соответствии с классическими моделями, демонстрируя ярко выраженную неустойчивость. Традиционная экономическая теория базируется на идее относительного равновесия, тогда как эмпирические данные финансовых рынков скорее укладываются в модели неравновесной стохастической динамики.

Одним из начальных этапов развития недавно сложившейся на стыке физики и экономики дисциплины, названной эконофизикой, было использование концепций статистической физики при исследовании финансовых рынков. Однако очень скоро симбиоз на первый взгляд столь далёких областей науки пополнился множеством взаимовыгодных аспектов, позволившим говорить о возникновении новой области человеческого знания [1]. Физики нашли здесь применение физических идей к экономическим системам. Экономисты, особенно те, кто работает в области финансов, ощутили полезность методов эмпирического анализа и удачно сформулированного теоретического инструментария, эффективного при описании объектов, состоящих из огромного числа взаимодействующих подсистем. В рамках такого подхода начался анализ экономической информации, который был просто невозможен методами классической экономики. Были развиты новые разделы теории вероятностей, не привлекавшие ранее внимания экономистов, но которые оказались весьма актуальными при исследовании стоящих перед экономикой проблем.

Статья поступила в редакцию 14 января 2015 г.

Статья подготовлена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект № 13-02-00289).

2. Из истории анализа рынков

В тридцатых годах XX века появилось несколько работ, в которых проводился эмпирический анализ финансовых характеристик с целью получить ответ на вопрос: предсказуемо ли движение цен? Это работы статистиков А. Каулеса, Г. Воркинга и Г. Джонса.

Каулес и Джонс оперировали данными рынка акций, Воркинг — ценами товаров. Статьи содержали неожиданный вывод, что скорее всего приращения $y_m = \ln(N_m/N_{m-1})$ логарифмов цен $N_m (m = 1, 2, \ldots)$ являются независимыми случайными величинами. Однако ни экономисты, ни практики не обратили на этот результат должного внимания. Кроме того, вывод этих работ, что последовательность носит характер «случайного блуждания», расходился с бытующим среди практиков мнением, что цены следуют некоторым ритмам, циклам, трендам, выявление которых могло бы дать возможность предсказания движения цен.

В 1953 г. появилась работа М. Кендалла [2], с которой начался современный этап исследования эволюции финансовых характеристик. Оказалось, что логарифмы цен ведут себя как случайное блуждание, т.е. если $y_m = \ln(N_m) - \ln(N_{m-1})$, то

$$N_m = N_0 \ \exp(H_m), \tag{1}$$

где H_m — сумма независимых случайных величин y_m.

После работы М. Кендалла увеличился интерес к изучению динамики финансовых показателей и построению вероятностных моделей, объясняющих наблюдаемые эффекты, такие, например, как кластерность. Отметим две работы конца 1950-х гг., Г. Робертса и М. Осборна. Не будучи знакомыми с работой М. Кендалла, они, по существу, пришли к тем же самым выводам. Эти же мысли получили блестящее развитие в работе П. Самуэльсона [3] (Нобелевская премия по экономике 1970 г.), введшего в финансовую теорию и практику геометрическое (или, как он предпочитал, — экономическое) броуновское движение.

Самуэльсон сформулировал гипотезу «эффективного рынка», показав математически, что цены меняются случайным образом. Используя предположение о рациональном поведении трейдеров, он продемонстрировал, что ожидаемая цена актива в момент $t+1$ связана с предшествующими величинами цен $N_0, N_1, \ldots N_t$ посредством соотношения: $E = \{N_{t+1}/N_0, N_1, \ldots N_t\} = N_t$ (левая часть равенства — условное математическое ожидание). Статистические процессы, подчиняющиеся этому вероятностному условию, называются мартингалами [4].

Мартингал есть интуитивно вероятностная модель «справедливой игры». В применении к ценовым изменениям на финансовом рынке справедливая игра означает, что не существует способа получения прибыли на актив посредством использования истории ценовых флуктуаций, т.е. ценовые изменения невозможно прогнозировать по историческому временному ряду этих цен за прошлые периоды времени. Эффективность рынка ассоциируется с отсутствием арбитражных возможностей. На «справедливом рынке» не может быть выигрыша у одних и проигрыша у других. Выигрыш равен нулю.

Нельзя сказать, что гипотеза случайного блуждания для описания эволюции цен была сразу принята экономистами, но именно она привела к классической концепции рационально функционирующего (эффективного) рынка. Цель концепции и состояла в том, чтобы найти аргументацию в защиту применения вероятностной идеологии и в её рамках к естественности гипотезы случайного блуждания и более общей гипотезы мартингальности.

Концепция, что ценовые изменения фактически непредсказуемы, была в дальнейшем углублена и расширена многими экономистами. Следуя Самуэльсону, они показали, что даже для лучших инвесторов сложно установить факт их успешности на длительном интервале времени по сравнению с доходностью, которую демонстрируют рыночные индексы, например $S\&P500$, или даже больше, чем просто при сравнении со случайным выбором портфеля акций со сравнимой волатильностью. Из чего, по-видимому, следует, что относительные изменения цены практически неотличимы от последовательности случайных чисел, основанной на компьютерном моделировании подбрасывания монеты или движения рулетки. Предполагается, что эта случайность возникает вследствие активных действий множества инвесторов, ожидающих увеличения вложенных инвестиций. Это сообщество активно анализирует всю информацию относительно собственных позиций и формирует инвестиционные решения на этой основе. Какая-либо преимущественная информация, могущая привести к получению прибыли, быстро исчезнет из-за обратной связи, которую вызывают действия инвесторов.

Точка зрения Самуэльсона и его последователей — то, что ценовые изменения во времени не являются независимыми от действий трейдеров, а наоборот, есть результат их действий. Если такие обратные действия возникают мгновенно (в приближении идеального рынка — отсутствие затрат на торговлю, абсолютная ликвидность), то цены должны отражать всю доступную информацию и, даже обладая ей, невозможно извлечь прибыль, поскольку прибыль уже учтена в ценах. Эта фундаментальная концепция называется сегодня «гипотезой эффективного рынка» и имеет как сторонников, так и противников. Говоря иначе, чем «более» эффективен рынок, тем более интеллектуальной и трудной становится работа инвесторов и все ближе к случайной становится последовательность изменений цен, порождаемых таким рынком. «Наиболее» эффективный рынок — тот, в котором ценовые изменения непредсказуемы [5].

Описание эффективного рынка в терминах мартингала достаточно формально. Более наглядное объяснение, почему временной ряд доходностей является случайным, возможно в терминах алгоритмической теории сложности (АТС). АТС была разработана независимо А. Колмогоровым и Г. Чейтином [6, 7] в середине 1960-х гг.

В АТС сложность объекта, кодируемого n-значной двоичной последовательностью, задаётся кратчайшей компьютерной программой длиной $K(n)$ битов, которая может напечатать данную символическую последовательность. Колмогоров показал, что такой алгоритм существует. Например, для того чтобы передать информацию о научных достижениях человечества, включим в число передаваемых информационных блоков величину числа π, выраженную как 125000-значное десятичное число, а также временной ряд дневных котировок индекса Доу–Джонса с 1898 по 1961 г.г. (год полёта Гагарина) (тоже примерное 125000 знаков). Чтобы минимизировать объем передаваемой информации и время передачи, необходимое для двух этих массивов, запишем две числовые последовательности, используя для каждого ряда алгоритм, который отражает закономерности последовательностей цифр. Наилучший алгоритм, найденный для последовательности цифр в числе π, чрезвычайно короток. В противоположность этому алгоритм сравнимой эффективности для индекса DJIA не найден. Временной ряд индекса Доу–Джонса является несжимаемым. В АТС ряд символов считается непредсказуемым, если информация, содержащаяся в нем, не может быть сжата, т.е. сведена к более компактной форме передачи. Т.е. ряд символов считается несжимаемым, если наиболее эффективный алгоритм, представляющий исходный ряд, имеет ту же длину, что и исходный ряд символов.

Из сказанного следует:

1. АТС устанавливает параллель между гипотезой эффективного рынка и непредсказуемым характером прибылей. Это следует из того, что временной ряд, содержащий большое количество несжимаемой экономической информации, демонстрирует статистические свойства, неотличимые от наблюдаемых в случайном временном ряде.
2. Измерения отклонений от случайностей даёт возможность для оценки пределов применимости гипотезы эффективного рынка (гипотезы ценовых случайных блужданий).
3. С точки зрения АТС невозможно различить торговые сделки, инициированные шумом от сделок, являющихся результатом появления фундаментальной информации о торгуемом активе. АТС не проводит различия между временным рядом, несущим большое количество несжимаемой информации, и подлинным случайным процессом.

3. Броуновское движение и работы Луи Башелье в области финансов

Идея использования «случайного блуждания» для анализа эволюции цен была впервые более чем за 50 лет до работы Кендалла и более чем за 30 лет до упомянутых работ Каулеса и Воркинга высказана Л. Башелье, учеником А. Пуанкаре, в его диссертации «Theorie de la speculacion», опубликованной в 1900 г. [8]. Это была первая попытка математического описания эволюции цен акций (на парижском рынке), опирающаяся на концепции теории вероятностей. Картина хаотического движения в непредсказуемых направлениях частиц пыльцы в воде получила название броуновского движения по имени английского ботаника Р. Броуна, подробно описавшего его в 1820 г.

Эйнштейн (1905 г.) вычислил, что в результате таких блужданий расстояние возрастает $\sim \sqrt{t}$, а не пропорционально времени, поскольку иногда частичка начинает двигаться в обратном направлении. В серии предложенных им экспериментов по измерению расстояния, проходимого броуновской частицей, было получено убедительное подтверждение атомистического строения материи. Долгое время работа Эйнштейна 1905 г. считалась первой работой, где для получения результата была использована концепция случайных блужданий. В действительности первым был все-таки не Эйнштейн, первым человеком, который использовал гипотезу случайного блуждания для решения прикладной задачи, был Луи Жан-Батист Альфонс Башелье (1870–1946). Башелье считал, что цены акций $N_{k\Delta t}$ меняют свои значения в моменты времени $\Delta t; 2\Delta t; \ldots$, причём так, что цена

$$N_{k\Delta t} = N_0 + \xi_{\Delta t} + \xi_{2\Delta t} + \ldots + \xi_{k\Delta t}, \tag{2}$$

где $\xi_{i\Delta t}$ — независимые, одинаково распределённые СВ, принимающие значения $\pm\sigma\sqrt{\Delta t}$ с вероятностями 1/2. Откуда: $E\{N_{k\Delta t}\} = N_0$. $D\{N_{k\Delta t}\} = \sigma^2(k\Delta t)$.

Полагая $k = t/\Delta t$, Башелье предельным переходом получает: $N = (N_t)_{t\geqslant 0}$, $N_t = \lim\limits_{\Delta t\to 0} N_{(t/\Delta t).\Delta t}$ (предел понимается в соответствующем вероятностном смысле):

$$N_t = N_0 + \sigma W_t, \tag{3}$$

где $W = (W_t)$ есть то, что теперь принято называть стандартным ($W_0 = 0, E\{W_t\} = 0; D\{W_T\} = E\{W_t^2\} = t$) броуновским движением или винеровским процессом (в честь Н. Винера [9], построившего этот процесс в 1923 г. и развившего для него строгую математическую теорию), т.е. случайным процессом с независимыми гауссовскими (нормальными) приращениями и непрерывными траекториями. Здесь E, D — соответственно операторы математического ожидания и дисперсии.

Следует отметить, что в своих построениях Башелье допускает неточность (ошибку). Следовало оперировать не с ценами, а с логарифмами ценовых приращений y_k. Однако даже с учётом допущенной неточности Башелье сумел получить для математического ожидания $C_T = E\{f_T\}$, где $f_t = N_t - K$, что (в предположении, что процентная ставка банковского счета $i = 0$) есть значение «справедливой» стоимости (премии), которую покупатель стандартного опциона-кола должен заплатить продавцу опциона, обязавшемуся продать покупателю акции в момент исполнения T по цене исполнения K. Если $N_T \succ K$, то покупатель опциона имеет суммарный выигрыш, равный $(N_T - K) = C_T$, поскольку он может купить акции по цене K и тут же продать их по более дорогой цене N_T, если же $N_T \prec K$, то покупатель просто не предъявит опцион к исполнению и его потери равны выплаченной им премии C_T.

Найденная Л. Башелье формула

$$C_T = (N_0 - K)\phi\left(\frac{N_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \sigma\sqrt{T}\varphi\left(\frac{N_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right), \tag{4}$$

где $\varphi(x) = 1/\sqrt{2\pi}\ \exp\bigl(-x^2/2\bigr); \phi(x) = \int\limits_0^x \varphi(y)\mathrm{d}y$ (в частности, при $N_0 = K \Rightarrow C_T = \sigma\sqrt{T/2\pi}$) явилась предвестником знаменитой формулы Блэка и Шоулса [10].

В модели Башелье цены принимают и отрицательные значения (неудачный выбор переменной: цены вместо логарифмов цен), и поэтому она не может считаться адекватно отражающей реальную картину. Тем не менее, она представляет громадный интерес с разных точек зрения — как исторически первая модель, разработанная на базе ГСБ, как первая модель ценовой диффузии, как модель, которая является безарбитражной, то есть фактически основанной на концепции эффективного рынка. Как же получилось, что гениальная работа Башелье в течение 50 лет оставалась фактически неизвестной мировому экономическому сообществу? Свои главные результаты он получил на рубеже 19–20 столетий. В это время математика и экономика развивались как бы ортогонально друг другу, то есть корреляция между ними была близка к нулю. Они не оказывали взаимного влияния. Экономисты не нуждались в математике (кроме простейших соотношений алгебры вроде формулы сложных процентов и знания арифметики), математиков и физиков не интересовала экономика. Впрочем, были исключения. Достаточно вспомнить о классическом труде Т. Мальтуса [11], где он математически доказал, что проблемы роста народонаселения нельзя отрывать от проблем роста экономики.

В 30-е гг. XX-го столетия отношение к математике у экономистов стало быстро меняться. Во многом это было связано с необходимостью обработки эмпирических результатов с использованием методов математической статистики. Тогда же появились вышеупомянутые работы Каулеса, Воркинга, Джонса, где проводился статистический анализ временных ценовых рядов. Завершили дело выдающиеся результаты Кендала и Самуэльсона, открывшие новую эру в исследовании рынков. И только через 50 лет экономическое сообщество ознакомилось со статьёй Л. Башелье, где, по существу, уже была сформулирована и развита концепция эффективного рынка.

4. Идеи Н. Винера

Однако разница между реализацией концепции в 1900 г. и спустя более чем 50 лет все-таки была. Строгую математическую теорию броуновского движения, его меру в функциональном пространстве построил в 1923 г. Н. Винер, в честь которого это движение называется винеровским процессом (ВП), а соответствующая мера — винеровской. ВП — однородный действительнозначный гауссовский процесс $W(t), t \geqslant 0$, с независимыми приращениями, для которого

$$W(0) = 0; E\{W(t) - W(s)\} = 0; D\{W(t) - W(s)\} = \sigma^2|t - s|. \tag{5}$$

ВП служит математической моделью одномерного броуновского движения. При $\sigma^2 = 1$ он называется стандартным ВП. Сепарабельный ВП с вероятностью 1 — непрерывен. Доказано, что при указанных в (5) средних значениях и дисперсиях приращений это единственный непрерывный с вероятностью 1 процесс с независимыми приращениями. Вероятностная мера, являющаяся распределением ВП, $W(t), t \in [0, 1]$ на борелевской σ-алгебре пространства $C[0, 1]$ непрерывных действительных функций, играет важную роль в теории меры в бесконечномерных функциональных пространствах и называется винеровской мерой. ВП имеет несколько эквивалентных определений, отражающих его свойства. Именно: гауссовский случайный процесс $W(t)$, $t \geqslant 0$, $W(0) = 0$; у которого переходная плотность вероятности (характеризующая переход из x в y за время t) $P(x, y, t)$ есть фундаментальное решение параболического типа дифференциального уравнения

(уравнения диффузии в физике)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \tag{6}$$

имеющее вид

$$P(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right),$$

является ВП.

Второе определение. Если случайный процесс $W(t); t \geqslant 0$ с вероятностью 1 непрерывен, согласован с потоком σ-алгебр A_t, $t \geqslant 0$ и с вероятностью 1

$$E\{(W(t)-W(s))/A_s\} = 0; \quad E\{(W(t)-W(s))^2/A_s\} = t-s; \quad s \prec t,$$

то $W(t)$ — ВП. На примере математического моделирования гипотезы СБ, начиная от Башелье до Винера, интересно наблюдать способность математики охватывать процесс перехода познания действительности с одной ступени на следующую, более высокую и качественно новую. В частности, образцом может служить соотношение между макроскопической теорией диффузии, предполагающей непрерывное распределение диффундирующего вещества и статистической теории диффузии, исходящей из рассмотрения движения отдельных частиц диффузанта.

5. Перспективы эконофизики

Всякие аналогии «хромают». С этим мы сталкивались неоднократно, в частности, на примере бионики. Хотя полезных аналогий в той же бионике было немало. Тем не менее, представляется, что некоторые аналогии связывающие экономику и физику в рамках эконофизики, могут иметь долговременные последствия. В частности, если в физике имеет место развитие той её части, которая нашла применение в эконофизических аналогиях, то можно предположить, что это развитие также имеет аналогию в экономике, тем самым развивая эконофизику.

Интересным здесь, конечно, в первую очередь, является переход в физике от классической теории к теории квантовой. Как параллельная аналогия здесь может быть рассмотрено такое направление квантовой физики, как квантовый компьютинг. Уместно будет здесь вспомнить и о теореме Колмогорова о сжимаемости, если желают иметь прямые аналогии. Но аналогии могут быть и косвенные. В частности, в работе [12] рассмотрен пример квантового осциллятора как аналог для нахождения соответствующих распределений вероятности с последующим получением собственных значений соответствующих рыночным величинам.

Аналогии с квантовой физикой интересны ещё тем, что описание поведения вероятностей в квантовой теории существенно нелинейно [13], в то время как поведение волновой функции описывается линейными дифференциальными уравнениями. Напрашивается аналогия перехода от нелинейного описания экономических явлений к описанию линейному, но на базе некоторой новой сущности аналогичной волновой функции.

Вопрос о референте волновой функции в объективной реальности до сих пор можно считать открытым. Поскольку те представления, которые предлагаются, вряд ли удовлетворят физиков, хотя именно на это и претендуют [14].

Что должно представлять волновую функцию в экономической теории, вопрос ещё более спорный, если этот подход вообще имеет перспективы. Тем не менее, нет смысла от него отказываться априори. Ведь все эти аналогии, построения и рассуждения пока не более чем некая эвристика, и как таковая носит характер некоторых пожеланий и нащупываний возможных направлений дальнейшего развития эконофизики. Именно как эконофизики, а не экономатематики.

6. Заключение

Во 2-й половине XX в. математика и экономика стали относительно ближе друг к другу. Об этом красноречиво говорит тот факт, что из 56 лауреатов Нобелевской премии по экономике (1969–2005 гг.) половина — это учёные, в своих исследованиях эффективно и весьма квалифицированно использовавшие математические методы (зачастую весьма рафинированные). Более того, некоторые из них по своему первому образованию были математиками. Это Я. Тинберген, П. Самуэльсон, Л. Канторович, Т. Купманс, М. Фридмен, Л. Клейн, Д. Дебре, Р. Солоу, М. Спенс, К. Эрроу, К. Грэнджер, Р. Энгл. Двое из перечисленных, Грэнджер и Энгл, внесли выдающийся вклад не только в экономику, но и в математическую статистику. А советский учёный Л. Канторович и американец Т. Купманс по праву считаются основоположниками новой области математики: исследования операций.

В своё время (1916 г.), Д. Гильберт произнёс сакраментальную фразу: «Я думаю, что современная физика слишком сложна для физиков». Так вот, перефразируя фразу Гильберта, может быть, следует сказать: «Современная экономика слишком трудна для экономистов и без математиков и физиков здесь не обойтись». Будущее покажет.

Литература

1. *Мантенья Р. Н., Стенли Г. Ю.* Введение в эконофизику. Корреляции и сложность в финансах. — Москва: Книжный дом «Либроком», 2009. — С. 188.
2. *Kendall M. G.* The Analysis of Economic Time – Series. Part 1. Prices // Journal of the Royal Statistical Society. — 1953. — Vol. 96. — Pp. 11–25.
3. *Samuelson P. A.* Rational Theory of Warrant Pricing // Industrial Management Review. — 1965. — Vol. 6. — Pp. 13–31.
4. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т.1. Факты, модели. — Москва: ФАЗИС, 1998. — С. 512.
5. *Didier Sornette.* Why Stock Markets Crash. Critical Events In Complex Financial Systems. — Princeton: Princeton Uninersity Press, 2003. — P. 188.
6. *Kolmogorov A. N.* Three Approaches to the Quantitative Definition of Information // International Jourml of Computer Mathematics. — 1968. — Vol. 2. — Pp. 157–168.
7. *Chatin G. J.* On the Length of Programs for Computing Finite Binary Sequeces // J. Assoc. Comp. Math. — 1966. — Vol. 13. — Pp. 547–569.
8. *Bachelier L.* Theorie de la speculation // Anales de l'Ecole Normale Superieure. — 1900. — Vol. 17. — Pp. 21–86.
9. *Wiener N.* Differential Space // Journal of Mathematical Physics. Math. Inst. Tech . — 1923. — Vol. 2. — Pp. 131–174.
10. *Black F., Scholes M.* The Analysis of Economic Time-Series. Part 1. Prices // Journal of Political Economy. — 1973. — Vol. 21, No 3. — Pp. 637–659.
11. *Мальтус Т.* Опыт закона о народонаселении. — Москва: Издание К.Т. Солдатенкова, 1895. — 318 с.
12. *Семёнов В. П.* Квантовый характер информации и вероятность ценовых выбросов на финансовых рынках // Вестник РЭУ им. Г.В. Плеханова. — 2013. — Т. 59, № 5. — С. 74–90.
13. *Копылов С. В.* Об уравнении для плотности вероятности // 50я Всероссийская конференция по физике РУДН, Проблемы динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. — 2014. — С. 70–73.
14. *Тайнов Э. А.* Трансцендентальное. Основы православной метафизики. – 3-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательский дом «Парад», 2007. — 282 с.

UDC 330.46+538.93, PACS 89.65.Gh

Econophysics Formation

V. P. Semenov*, S. V. Kopylov†

* *Department of Mathematics*
Russian State University of Economics. G.V. Plekhanov
36, Stremyannaya lane, Moscow, Russia, 115054

† *Department of Physics*
MAMI Moscow State Engineering University
38, Str. B. Semenovskaya, Moscow, Russia, 107023

The article traces the evolution of free roaming hypothesis, which plays a prominent role in many areas of human knowledge: mathematics, molecular physics, hydro and gas dynamics, cosmology, chemistry, and biology. This hypothesis is the foundation for the concept of an efficient market. Also it is the source of many modern theories, as well as methods for the financial markets analysis and forecasting. Development of free roaming hypothesis was one of the sources which at the end of the 90s. of the last century led to the emergence of a new field of knowledge — econophysics, a scientific discipline that has emerged at the intersection of economics, physics and mathematics.

Key words and phrases: an efficient market, asset prices, free walk, variance, standard deviation, random variable, diffusion, correlation.

References

1. R. N. Mantegna, G. Y. Stanley, Introduction to Econophysics. Correlations and Complexity in Finance, Book House, Librokom, Moscow, 2009, in Russian.
2. M. G. Kendall, The Analysis of Economic Time-Series. Part 1. Prices, Journal of the Royal Statistical Society 96 (1953) 11–25.
3. P. A. Samuelson, Rational Theory of Warrant Pricing, Industrial Management Review 6 (1965) 13–31.
4. A. N. Shiryaev, Essentials of Stochastic Finance. V.1. The Facts, Models, FAZIS, Moscow, 1998, in Russian.
5. D. Sornette, Why Stock Markets Crash. Critical Events In Complex Financial Systems, Princeton Uninersity Press, Princeton, 2003.
6. A. N. Kolmogorov, Three Approaches to the Quantitative Definition of Information, International Journal of Computer Mathematics 2 (1968) 157–168.
7. G. J. Chatin, On the Length of Programs for Computing Finite Binary Sequeces, J. Assoc. Comp. Math 13 (1966) 547–569.
8. L. Bachelier, Theorie de la speculation, Anales de l'Ecole Normale Superieure 17 (1900) 21–86.
9. N. Wiener, Differential Space, Journal of Mathematical Physics. Math. Inst. Tech . 2 (1923) 131–174.
10. F. Black, M. Scholes, The Analysis of Economic Time-Series. Part 1. Prices, Journal of Political Economy 21 (3) (1973) 637–659.
11. T. Malthus, The Experience of the Law on Population, Edition K.T. Soldatenkova, Moscow, 1895, in Russian.
12. V. P. Semenov, The Quantum Nature of the Information and the Probability of Emission Pricing in Financial Markets, Bulletin of the REU. G.V. Plekhanov 59 (5) (2013) 74–90, in Russian.
13. S. V. Kopylov, On the Equation for the Probability Density, in: 50ya National Conference on Physics, Problems of dynamics, particle physics, plasma physics and optoelectronics – Peoples' Friendship University, Section, Theoretical Physics, 2014, pp. 70–73, in Russian.
14. E. A. Taynov, Transcendental. Fundamentals of Orthodox Metaphysics – 3rd ed., Rev. and Additional, Publishing House "Parade", Moscow, 2007, in Russian.