УДК 519.21;51-76

Исследование устойчивости модели популяционной динамики на основе построения стохастических самосогласованных моделей и принципа редукции

А. В. Демидова[*], О. В. Дружинина[†], О. Н. Масина[‡]

[*] *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей*
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

[†] *Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН*
ул. Вавилова, д. 40, г. Москва, Россия, 119333

[‡] *Кафедра математического моделирования и компьютерных технологий*
Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина
ул. Коммунаров, д. 28, г. Елец, Россия, 399770

Рассмотрена трёхмерная модель взаимодействия популяций с учётом конкуренции и миграции видов. Для исследования модели использовано сочетание известных методов синтеза и анализа моделей и разработанного метода построения стохастических самосогласованных моделей. Получены условия существования состояний равновесия и выполнен анализ устойчивости. Предложены условия устойчивости на основе принципа редукции задачи об устойчивости решений дифференциального включения к задаче об устойчивости других типов уравнений. Указанный принцип предполагает переход от векторных обыкновенных дифференциальных уравнений к векторному дифференциальному включению и нечёткому дифференциальному уравнению, с учётом изменения параметров того или иного типа в исследуемых моделях. Для рассматриваемой модели популяционной динамики осуществлён синтез соответствующей стохастической модели на основе применения метода построения стохастических самосогласованных моделей. Описана структура стохастической модели, выписано уравнение Фоккера-–Планка, сформулировано правило перехода к стохастическому дифференциальному уравнению в форме Ланжевена. Предложенный подход позволил провести сравнительный анализ качественных свойств моделей, учитывающих конкуренцию и миграцию видов, в детерминистическом и стохастическом случаях. Условия устойчивости могут быть использованы для изучения динамического поведения моделей популяционной динамики. Полученные результаты направлены на дальнейшее развитие методов построения и анализа устойчивости недетерминированных математических моделей естествознания.

Ключевые слова: стохастическая модель, одношаговые процессы, популяционная динамика, устойчивость, дифференциальные уравнения, принцип редукции.

1. Введение

Одной из актуальных проблем моделирования нелинейных динамических систем является проблема устойчивости решений [1–4]. Вопросы существования и устойчивости решений моделей, описываемых дифференциальными уравнениями, рассматривались в работах [1–11]. Эффективным методом анализа устойчивости является метод функций Ляпунова [2–5, 8, 9]. В работах [3, 8, 9] описан системный подход, позволяющий с единой точки зрения рассматривать свойства устойчивости моделей, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями с запаздыванием, стохастическими дифференциальными уравнениями, дифференциальными включениями, нечёткими дифференциальными уравнениями. Указанный подход базируется на переходе от детерминистического описания модели к стохастическому и на принципе редукции задачи об устойчивости решений дифференциального включения к задаче об устойчивости других типов уравнений. Подход, основанный на принципе редукции и на использовании ключевой модели, позволяет выполнить сравнительный анализ качественных свойств математических моделей при переходе от детерминированного описания к недетерминированному и обосновать построение

Статья поступила в редакцию 23 июня 2015 г.
Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 15-07-08795).

и использование моделей того или иного типа. В частности, указанный подход позволяет с единой точки зрения изучать свойства устойчивости решений стохастических уравнений [3, 6–9] и нечётких уравнений [3, 8, 9].

В настоящей работе рассмотрена модель динамики популяций, учитывающая конкуренцию и миграцию видов. Детерминированное описание модели, являющейся обобщением описания [4] на случай несовпадающих скоростей миграции, даётся системой трёх обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Проведено качественное исследование решений указанной модели. Получены условия существования неотрицательных состояний равновесия. На основе принципа редукции выполнен анализ устойчивости.

Как известно [12, 13], при детерминистическом описании модели не учитываются вероятностные факторы, влияющие на поведение модели, поэтому представление о модели часто бывает неадекватным. Самым распространённым методом введения стохастики в модель является аддитивное добавление стохастического члена, который описывает лишь внешнее воздействие и не связан со структурой самой модели.

В настоящей работе на основе метода построения самосогласованных стохастических моделей, разработанного в [14–16], осуществлён синтез стохастической модели, учитывающей конкуренцию и миграцию видов. Описана структура стохастической модели, выписано уравнение Фоккера–Планка, сформулировано правило перехода к стохастическому дифференциальному уравнению в форме Ланжевена. Проведён сравнительный анализ детерминистической и стохастической моделей. Для сравнительного анализа использован метод функций Ляпунова и теория стохастического исчисления.

2. Качественный анализ модели популяционной динамики с учётом конкуренции и миграции видов

Рассмотрим нелинейную модель, учитывающую конкуренцию и миграцию видов, описываемую системой трёх дифференциальных уравнений вида [3]:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 - x_1^2 - qx_1y_1 + \beta x_2 - \gamma x_1, \\ \dot{x_2} = x_2 - x_2^2 - \beta x_2 + \gamma x_1, \\ \dot{y_1} = y_1 - rx_1y_1 - y_1^2, \end{cases} \tag{1}$$

где использованы следующие обозначения: x_1 и y_1 — численность конкурирующих видов x и y в ареале вида x_1 (ареале 1), x_2 — численность вида x в ареале вида x_2 (ареале 2), $q > 0$ и $r > 0$ — коэффициенты конкуренции видов в ареале 1, β и γ — коэффициенты миграции видов x и y между двумя ареалами, при этом ареал 2 является убежищем и $\beta \neq \gamma$. Модель (1) является обобщением модели, рассмотренной в [4], на случай, когда скорости миграции различны.

Первое уравнение системы (1) описывает изменение численности вида x в ареале 1. Первое слагаемое в его правой части даёт скорость естественного прироста вида x, второе слагаемое характеризует скорость естественной убыли (смертности) вида x, третье слагаемое даёт скорость убыли вида x в результате межвидовой конкуренции с видом y, четвёртое слагаемое описывает скорость роста вида x за счёт диффузии его в ареал 1, пятое слагаемое характеризует скорость убыли вида x за счёт диффузии его в ареал 2. Второе уравнение системы (1) описывает изменение численности вида x в ареале 2. Третье уравнение описывает изменение численности вида y в ареале 1.

В результате решения соответствующих алгебраических уравнений для модели (1) получены четыре состояния равновесия: $O(0, 0, 0)$, $A_1(0, 0, 1)$, $A_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2, 0)$ и $A_3(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{y})$. Координаты $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{y}$ найдены с помощью вычислительного пакета «Mathematica». Получено, что $\overline{x}_1 = \frac{1}{6}(4-4\gamma+b)$, $\overline{x}_2 = \frac{1}{36\beta}(4-4\gamma+b)(2\gamma-2+b)$, где

$$b = \frac{22^{1/3}\left((-1+\gamma)^2 + 3\beta + 3\beta^2\right)}{a} + 2^{2/3}a,$$

$$a = \left(2\gamma^3 - 6\gamma^2 + 6\gamma - 2 + 9(1+2\gamma)\beta^2 + 9\beta\gamma - 9\beta + \right.$$

$$\left. + \sqrt{-4\left((-1+\gamma)^2 + 3\beta + 3\beta^2\right)^3 + \left(2(-1+\gamma)^3 + 9\beta(-1+\gamma) + 9\beta^2(1+2\gamma)\right)^2}\right)^{1/3},$$

$$\widehat{x}_1 = \frac{1}{l}\left(2c - \frac{2^{1/3}h}{k} + \frac{k}{2^{1/3}}\right), \quad \widehat{x}_2 = \frac{\widehat{x}_1}{\beta}(q + \gamma - 1 + \widehat{x}_1 - qr\widehat{x}_1), \quad \widehat{y} = 1 - r\widehat{x}_1,$$

где c, h, k зависят от β, γ, q, r.

Рассмотрены условия существования неотрицательных состояний равновесия A_2 и A_3. Установлено, что если выполняется одно из условий: $(\mathrm{C}_1) : 0 < \beta < 1$, $\gamma > 1–\beta$, $(\mathrm{C}_2) : \beta > 1$, $\gamma > 0$, то модель (1) имеет единственное неотрицательное состояние равновесия A_2.

Получено, что уравнение (1) имеет единственное положительное состояние равновесия A_3, если выполняется одно из условий:
(P_1) $0 < r < 1$, $0 < q < 1$, $0 < \beta < 1$, $\gamma > (\beta–1)(q–1)$,
(P_2) $0 < r < 1$, $0 < q < 1$, $\beta > 1$, $0 < \gamma < q(\beta–1)(1-r)$,
(P_3) $0 < r \leqslant 1/q$, $q \geqslant 1$, $\beta > 1$, $\gamma > (\beta–1)(q-1)$, $(q-1)^2 + (r-1)^2 \neq 0$.

Показано, что если выполняется одно из следующих условий:
(Q_1) $r = 1$, $q > 1$,
(Q_2) $1/q \leqslant r \leqslant 1$, $q > 1$,
(Q_3) $r > 1$, $q > 1$,
(Q_4) $r > 1$, $1/r \leqslant q \leqslant 1$,
(Q_5) $r \geqslant 1$, $0 < q < 1/r$,
то для модели (1) не существует положительного состояния равновесия A_3.

С помощью вычислительного пакета «Mathematica» проведена оценка модельных параметров и построены локальные фазовые портреты в зависимости от условий $(P_1) - (P_3)$. Типы состояний равновесия модели (1) указаны в табл. 1.

Таблица 1

Типы состояний равновесия системы (1)

Условия	$O(0,0,0)$	$A_1(0,0,1)$	$A_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2, 0)$	$A_3(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{y})$
(P_1)	Седло	Седло	Седло	Устойчивый фокус
(P_2)	Седло	Не существует	Седло	Устойчивый фокус
(P_3)	Седло	Седло	Седло	Устойчивый фокус

С помощью метода функций Ляпунова изучим вопрос об асимптотической устойчивости в целом положения равновесия A_3 модели (1). Положение равновесия будет асимптотически устойчивым в целом, если область асимптотической устойчивости совпадает во всем с ортантом R_3^+.

Множество $D = \{(x_1, x_2, y_1) : 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leqslant y_1 \leqslant 1\}$ является глобально притягивающим для уравнения (1). В самом деле, начало $O(0,0,0)$ есть неустойчивый узел или седло, и плоскость $y_1 = 0$ является инвариантной. В силу уравнения (1) имеем

$$\dot{x_1}|_{x_1=0} = \beta x_2 > 0, \ \dot{x_1}|_{x_1=M} = M(1 - M - qy_1) + \beta x_2 - \gamma M, \ \dot{x_2}|_{x_2=0} = \gamma x_1 > 0,$$
$$\dot{x_2}|_{x_2=M} = M(1-M) + \gamma x_1 - \beta M, \quad \dot{y_1}|_{y_1=M} = M(1 - rx_1 - M).$$

Для каждого $M > 1$, $x_1 \in (0, M]$, $x_2 \in (0, M]$, $x_3 \in (0, M)$, справедливы оценки $\dot{x_1} < 0$, $\dot{x_2} < 0$, $\dot{y_1} < 0$, если соответственно $x_1 = M$, $x_2 = M$ и $y_1 = M$. Следовательно, множество D есть глобально притягивающее множество уравнения (1).

Покажем, что если для уравнения (1) выполняется одно из условий $(P_1)-(P_2)$, то состояние равновесия A_3 асимптотически устойчиво в целом. Рассмотрим для уравнения (1) вспомогательную функцию вида:

$$V = \sum_{i=1}^{2} k_i \left(x_i - \hat{x}_i - \hat{x}_i \ln(x_i/\hat{x}_i)\right) + k_3 \left(y_1 - \hat{y_1} - \hat{y_1} \ln(y_1/\hat{y_1})\right), \tag{2}$$

где k_i, $i = 1, 2, 3$ — положительные постоянные.

Найдём и оценим производную функции V вдоль траекторий уравнения (1):

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V/\mathrm{d}t|_{(1)} = k_1(x_1 - \hat{x}_1)\left[-(x_1 - \hat{x}_1) - q(y_1 - \hat{y}_1) + \beta(x_2/x_1 - \hat{x}_2/\hat{x}_1)\right] + \\ + k_2(x_2 - \hat{x}_2)\left[-(x_2 - \hat{x}_2) + \gamma(x_1/x_2 - \hat{x}_1/\hat{x}_2)\right] + \\ + k_3(y_1 - \hat{y}_1)\left[-r(x_1 - \hat{x}_1) - (y_1 - \hat{y}_1)\right] = \\ = -k_1(x_1 - \hat{x}_1)^2 - k_2(x_2 - \hat{x}_2)^2 - k_3(y_1 - \hat{y}_1)^2 - \\ - (k_1 q + k_3 r)(x_1 - \hat{x}_1)(y_1 - \hat{y}_1) - F, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F = \beta k_1 x_2 (x_1 - \hat{x}_1)^2/(x_1 \hat{x}_1) - (\beta k_1/\hat{x}_1 + \gamma k_2/\hat{x}_2)(x_1 - \hat{x}_1)(x_2 - \hat{x}_2) + \\ + \gamma k_2 x_1 (x_2 - \hat{x}_2)^2/(x_2 \hat{x}_2). \end{aligned}$$

Пусть $k_1 \hat{x}_1 = k_2 \hat{x}_2$. Тогда

$$\begin{aligned} F = (k_1/\hat{x}_1)\Bigg[\left((x_1 - \hat{x}_1)\sqrt{\beta x_2/x_1} - (x_2 - \hat{x}_2)\sqrt{\gamma x_1/x_2}\right)^2 - \\ - \left(\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}\right)^2 (x_1 - \hat{x}_1)(x_2 - \hat{x}_2)\Bigg]. \end{aligned}$$

Если $qr \leqslant 1$, то справедливо неравенство: $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t|_{(1)} \leqslant 0$. Согласно теореме Барбашина–Красовского, состояние равновесия A_3 асимптотически устойчиво в целом.

3. Построение и анализ устойчивости модели популяционной динамики на основе принципа редукции

От свойств дифференциального включения можно переходить к свойствам нечёткого дифференциального уравнения. Этот переход основан на принципе редукции задачи об устойчивости решений дифференциальных включений к задаче об устойчивости решений нечётких дифференциальных уравнений. Полученное нечёткое уравнение для каждого α-уровня, где $\alpha \in (0, 1]$, задаётся соответствующим дифференциальным включением. Множество всех движений включения порождает многозначное отображение, соответствующее α-уровню нечёткой функции, являющейся решением соответствующего нечёткого дифференциального уравнения.

Представим модель (1) в векторной форме

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = f(x), \tag{3}$$

где $x = (x_1, x_2, y_1)$, $f(x) = (f_1, f_2, f_3) = (x_1(1 - x_1 - qy_1) + \beta x_2 - \gamma x_1, x_2(1 - x_2) + \gamma x_1 - \beta x_2, y_1(1 - rx_1 - y_1))$, $x \in R^3_+ = R_+ \times R_+ \times R_+$, $R_+ = [0, \infty)$, $f : R^3_+ \to R^3_+$.

В (3) коэффициенты β и γ могут принимать различные значения из интервалов $[\beta_1, \beta_2]$ и $[\gamma_1, \gamma_2]$ соответственно, поскольку скорость диффузии компонент различается в различные периоды существования. В связи с этим коэффициенты взаимодействия $q > 0$ и $r > 0$ в (3) можно рассматривать многозначными, причём $q \in [q_1, q_2]$, $r \in [r_1, r_2]$. Учитывая вышеизложенное, для модели (3) построим дифференциальное включение в виде

$$\begin{cases} \dot{x_1} \in x_1(1 - x_1 - qy_1) + \beta x_2 - \gamma x_1, \\ \dot{x_2} \in x_2(1 - x_2) - \beta x_2 + \gamma x_1, \\ \dot{y_1} \in y_1(1 - rx_1 - y_1). \end{cases} \tag{4}$$

где $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$, $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$, $q \in [q_1, q_2]$, $r \in [r_1, r_2]$.

В векторной форме модель (4) запишем следующим образом:

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t \in F(x), \tag{5}$$

где $F(x) = \{f(x) | \beta \in B, \gamma \in C, q \in Q, r \in R\}$, $B ::= [\beta_1, \beta_2]$, $C ::= [\gamma_1, \gamma_2]$, $Q ::= [q_1, q_2]$, $R ::= [r_1, r_2]$, $F : R^3_+ \to 2^{R^3_+}$.

Множество

$$B(M, r) = \left\{x \in R^3_+ | e(x, M) \leqslant r\right\}$$

будем называть r–окрестностью множества M.

Непрерывная функция $V : B(M, r) \to R$ называется *функцией Ляпунова для замкнутого множества* $M \subset R^3_+$ *относительно включения* (5), если существуют число $r > 0$ и неотрицательные неубывающие функции $w_1, w_2 : (0, r] \to R$ такие, что $w_1(\rho) > 0$ при $\rho \in (0, r]$, $w_2(0) = 0$ и

$$w_1(e(x, M)) \leqslant V(x) \leqslant w_2(e(x, M)) \quad \forall x \in B(M, r).$$

Производной функции Ляпунова V вдоль движений включения (5) называется определяемая равенством

$$DV(x) ::= \lim_{\Delta t \to 0} \{[V(\varphi(t + \Delta t)) - V(x)]/\Delta t : \varphi \in \Phi, \varphi(t) = x\}$$

многозначная функция $DV : B(M, r) \to 2^R$; функции D_+V и D_-V, для которых $D_+V ::= \sup DV(x)$ и $D_-V ::= \inf DV(x)$, называются соответственно *верхней* и *нижней производной* функции Ляпунова.

Относительно включения (5) замкнутое множество $M \subset R^3_+$ называется:

1) *устойчивым в малом*, если

$$\begin{aligned} &\forall t_0 \geqslant s, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta ::= \delta(\varepsilon) > 0, \quad \forall \psi \in \Phi \\ &\qquad e(\psi(t_0), M) < \delta \Rightarrow \operatorname{Dom} \psi \supset [t_0, \infty), \quad e(\psi(t), M) < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, \infty) \cap \operatorname{Dom} \psi; \end{aligned}$$

2) *притягивающим в малом*, если

$$\begin{aligned} &\forall t_0 \geqslant s \quad \exists h > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \exists T ::= T(h, \eta) > s, \quad \forall \psi \in \Phi \quad e(\psi(t_0), M) \leqslant h \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow \operatorname{Dom} \psi \supset [t_0, \infty), \quad e(\psi(t), M) < \eta \text{ при } t \in [t_0 + T, \infty) \cap \operatorname{Dom} \psi; \end{aligned}$$

3) *асимптотически устойчивым в малом*, если оно устойчиво в малом и притягивающее в малом.

Теорема 1. *Если для замкнутого множества $M \subset R^3_+$ существует функция Ляпунова V относительно включения* (5)*, для которой верно неравенство*

$$D_+V(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in B(M, r), \tag{6}$$

то множество M устойчиво в малом относительно этого включения. Если справедливо неравенство

$$D_+V(x) \leqslant -w_3(e(x, M)) \quad \forall x \in B(M, r), \tag{7}$$

где функция $w_3 : B(M, r) \to R$ непрерывна и положительна вне M, то множество M асимптотически устойчиво в малом относительно включения (5).

Доказательство. Пусть $t_0 \geqslant s$ и $\varepsilon > 0$ даны и верно (6). Так как $w_2(0) = 0$, то по непрерывности найдётся $\delta ::= \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $w_2(\delta) < w_1(\varepsilon)$. Для любого движения $\varphi \in \Phi$ при $e(\varphi(t_0), M) < \delta$ предположим существование $t_1 > t_0$ такого, что $e(\varphi(t), M) < \varepsilon$ при $t_0 < t < t_1$ и $e(\varphi(t_1), M) = \varepsilon$. Ввиду неравенства (6) имеем

$$w_1(\varepsilon) = w_1(e(\varphi(t_1), M)) \leqslant V(\varphi(t_1)) \leqslant V(\varphi(t_0)) \leqslant w_2(e(\varphi(t_0), M)) < w_1(\varepsilon).$$

Получаем противоречие, поэтому для всех $t \in [t_0, \infty) \cap \operatorname{Dom} \varphi$ верно неравенство $e(\varphi(t), M) < \varepsilon$ и по определению множество M устойчиво в малом.

Пусть верно (7). Для доказательства асимптотической устойчивости в малом достаточно показать, что при $h = r$

$$\begin{gathered}\forall \eta > 0 \quad \exists T(\eta) > 0, \quad \forall t_0 \geqslant s, \quad \forall \varphi \in \Phi \quad \varphi : [t_0, \omega) \to B(M, h), \\ \varphi(t) \in B(M, \eta) \quad \forall t \geqslant t_0 + T(\eta).\end{gathered} \tag{8}$$

Пусть $\eta > 0$, $t_0 \geqslant s$ уже выбраны. Так как множество M устойчиво в малом, то $\exists \delta ::= \delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon ::= \eta$. Пусть $\gamma ::= \min\{w_3(\rho) : \delta \leqslant \rho \leqslant r\}$ и пусть $T(\eta) ::= [w_2(r) – w_1(\delta)]/\gamma$. Пусть $\varphi \in \Phi$ — произвольное непродолжаемое вправо движение, определённое на $[t_0, \omega)$, и $t_0 + \mathrm{T}(\eta) < \omega$. Если для некоторого $t_1 \leqslant t_0 + \mathrm{T}(\eta)$ выполнено $\mathrm{e}(\varphi(t_1), \mathrm{M}) < \delta$, то ввиду устойчивости в малом $\varphi(t) \in B(M, \eta)$ $\forall t \geqslant t_0 + T(\eta) \geqslant t_1$ и (8) доказано. В противном случае $\mathrm{e}(\varphi(t), M) \geqslant \delta$ при всех $t \leqslant t_0 + \mathrm{T}(\eta)$, поэтому

$$\begin{gathered}V(\varphi(t)) - V(\varphi(t_0)) \leqslant -\gamma(t - t_0) \leqslant -\gamma T(\eta) = w_1(r) - w_2(\delta) \Rightarrow \\ \Rightarrow V(t, \varphi(t)) \leqslant w_1(\delta), \quad t ::= t_0 + T(\eta),\end{gathered}$$

следовательно, $\varphi(t_0+T(\eta)) \in B(M, \delta)$. Ввиду устойчивости в малом $\varphi(t) \in B(M, \eta)$ $\forall t \geqslant t_0 + T(\eta)$, и (8) доказано и в этом случае. Теорема 1 доказана. □

Нетрудно показать, что справедлив аналог теоремы 1 для случая нижней производной D_-V.

Введённые выше множества B, C, Q и R определяют множества значений соответствующих параметров β, γ, q и r. Подмножества $B_\alpha = \{\beta | \mu_B(\beta) \geqslant \alpha\}$, $\mathrm{C}_\alpha = \{\gamma | \mu_C(\gamma) \geqslant \alpha\}$, $Q_\alpha = \{q | \mu_Q(q) \geqslant \alpha\}$ и $R_\alpha = \{r | \mu_R(r) \geqslant \alpha\}$ представляют более узкие множества, которые получим при учёте дополнительных условий $\alpha \in (0, 1]$, влияющих на взаимодействие и диффузию компонент, а следовательно, и на устойчивость модели (1). Тогда уравнение (3) можно заменить на нечёткое дифференциальное уравнение

$$\mathrm{d}X/\mathrm{d}t = F(X), \tag{9}$$

где $F : Z^3_+ \to P(R^3_+)$, $P(R^3_+)$ — совокупность всех нечётких подмножеств из R^3_+.

Соответствующее уравнению (9) дифференциальное включение имеет вид

$$\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t \in F_\alpha(\varphi), \tag{10}$$

где $\alpha \in (0,1]$, $F_\alpha(\varphi) = \{f(\varphi(t)) | \beta \in B_\alpha, \gamma \in C_\alpha, q \in Q_\alpha, r \in R_\alpha\}$.

Абсолютно непрерывная функция $\varphi : R_+ \to R^3_+$ называется *α–движением*, где $\alpha \in (0,1]$, функции $F : R_+ \to P(R^3_+)$, если $\varphi(t) \in F_\alpha(t)$ $\forall t \in R_+$. Через Φ_α обозначим множество α–движений и через Φ – объединение всех Φ_α при $\alpha \in (0,1]$. Множество движений Φ называется *порождающим функцию* $F : R_+ \to P(R^3_+)$, если $\forall t \in R_+$, $\forall \alpha \in (0,1]$, $\{\varphi(t) | \varphi \in \Phi_\alpha\} = F_\alpha(t)$.

Пусть Φ и Φ_α обозначают соответственно множество всех движений и множество всех α-движений, $\alpha \in (0,1]$, уравнения (9).

Пусть $\alpha \in (0,1]$, J_α — α-движение уравнения (9). Относительно уравнения (9) замкнутое множество $M \subset P(R^3_+)$ называется:

1) *α–устойчивым в малом*, если

$$\forall t_0 \geqslant s, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta ::= \delta(\varepsilon,\alpha) > 0, \forall B \subset R^3_+ \quad e(B, M_\alpha) \leqslant \delta \Rightarrow e(J_\alpha(t,B), M_\alpha) < \varepsilon$$
$$\forall t \in \mathrm{Dom}\, J_\alpha(t_0, B);$$

2) *α–притягивающим в малом*, если

$$\forall t_0 \geqslant s \quad \exists h ::= h(\alpha) > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \exists T ::= T(h,\eta,\alpha) > t_0,$$
$$\forall B \subset R^3_+ \quad e(B, M_\alpha) \leqslant h \Rightarrow e(J_\alpha(t,B), M_\alpha) < \eta$$
$$\text{при } t \in \mathrm{Dom}\, J_\alpha(t_0,B) \cap [T,\infty];$$

3) *α–асимптотически устойчивым в малом*, если оно α–устойчиво в малом и α–притягивающее в малом.

Непрерывная функция $V : B(\mathrm{M}, r) \to R$ называется *функцией Ляпунова для замкнутого множества* $M \subset \mathrm{P}(R^3_+)$ *относительно уравнения* (9), если для каждого $\alpha \in (0,1]$ существуют число $r ::= r(\alpha) > 0$ и неотрицательные неубывающие функции $w_{1\alpha}, w_{2\alpha} : (0,r] \to R$ такие, что

$$w_{1\alpha}(\rho) > 0 \text{ при } \rho \in (0,r], w_{2\alpha}(0) = 0,$$
$$w_{1\alpha}(e(x, M_\alpha)) \leqslant V(x) \leqslant w_{2\alpha}(e(x, M_\alpha)) \quad \forall x \in B(M_\alpha, r).$$

Производной функции Ляпунова V вдоль движений уравнения (9) называется многозначная функция $DV(x) : B(M,r) \to P(R)$ (r – некоторое число), α–уровни значений которой определяются равенством

$$DV_\alpha(x) ::= \left\{ \lim_{\Delta t \to 0} [V(\varphi(t+\Delta t)) - V(x)]/\Delta t : \varphi \in \Phi_\alpha, \varphi(t) = x \right\}.$$

Функции $D_+V_\alpha(t,x) ::= \sup DV_\alpha(t,x)$ и $D_-V_\alpha(t,x) ::= \inf DV_\alpha(t,x)$ называются соответственно *верхней* и *нижней* производной α–уровня функции Ляпунова, $\alpha \in (0,1]$.

Теорема 2. *Если для замкнутого множества $M \subset P(R^3_+)$, существует функция Ляпунова V относительно уравнения* (9), *для которой при $\alpha \in (0,1]$ верно неравенство*

$$D_+V_\alpha(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in B(M,r), \tag{11}$$

то множество M α–устойчиво в малом относительно этого уравнения. Если выполняется неравенство

$$D_+V(x) \leqslant -w_{3\alpha}(e(x,M)) \quad \forall x \in B(M,h), \tag{12}$$

где функция $w_{3\alpha} : (0, r) \to R$ *непрерывна и положительна, то множество* M α*–асимптотически устойчиво в малом относительно уравнения* (9).

Доказательство. Зафиксируем $\alpha \in (0, 1]$. Тогда из условий теоремы 2 вытекает выполнение условий теоремы 1. В самом деле, из теоремы 1 следует относительно включения (10) устойчивость в малом множества M_α (при выполнении условия (11)) и устойчивость в малом множества M_α (при выполнении условия (12)). Следовательно, ввиду произвольности $\alpha \in (0, 1]$ имеет место соответственно α-устойчивость в малом и α-асимптотическая устойчивость в малом множества M. Теорема доказана. □

Нетрудно показать, что справедлив аналог теоремы 2 для случая нижней производной $D_- V$.

4. Построение стохастической модели динамики популяций с учётом конкуренции и миграции видов

Для построения стохастической модели предлагается использовать метод, основанный на построении самосогласованных стохастических моделей [14,16]. Применение данного метода позволяет получить стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ланжевена с согласованными стохастической и детерминистической частями для описания стохастического поведения системы. Согласованность понимается в том смысле, что стохастика в построенной стохастической модели связана со структурой системы, а не является описанием внешнего воздействия на неё.

Для построения стохастической модели, соответствующей модели (1), можно записать схему взаимодействия элементов и оператор изменения состояния системы $\mathbf{r}$, которые имеют вид:

$$
\begin{gathered}
X_1 \to 2X_1,\\
X_2 \to 2X_2,\\
Y \to 2Y,\\
X_1 + X_1 \to X_1,\\
X_2 + X_2 \to X_2,\\
Y + Y \to Y,\\
X_1 + Y \xrightarrow{q} Y,\\
X_1 + Y \xrightarrow{r} X_1,\\
X_1 \xrightarrow{\gamma} X_2,\\
X_2 \xrightarrow{\beta} X_1,
\end{gathered}
\qquad
\mathbf{r} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1\\
-1 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1\\
-1 & 1 & 0\\
1 & -1 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Первые три строки схемы взаимодействия соответствуют естественному размножению видов при отсутствии других факторов, строки 4–6 и 7–8 символизируют внутривидовую и межвидовую конкуренцию соответственно, а последние две строки описывают миграцию видов X_1 и X_2 между 1 и 2 ареалами.

Состояние системы можно описывать с помощью вектора $x = (x_1, x_2, y)$. Интенсивности переходов из состояния $\mathbf{x}$ в состояние $\mathbf{x} \pm \mathbf{r}^A$ в единицу времени определяются соотношениями:

$$
\begin{gathered}
s_1^+(x_1, x_2, y) = x_1, \quad s_2^+(x_1, x_2, y) = x_2, \quad s_3^+(x_1, x_2, y) = y,\\
s_4^+(x_1, x_2, y) = {x_1}^2, \quad s_5^+(x_1, x_2, y) = {x_2}^2, \quad s_6^+(x_1, x_2, y) = y^2,
\end{gathered}
$$

$$s_7^+(x_1,x_2,y) = qx_1y, \quad s_8^+(x_1,x_2,y) = rx_1y,$$
$$s_9^+(x_1,x_2,y) = \gamma x_1, \quad s_{10}^+(x_1,x_2,y) = \beta x_2.$$

Соответствующее модели уравнение Фоккера–Планка имеет вид:

$$\frac{\partial P(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -\sum_a \partial_a \left(A_a(\mathbf{x})P(\mathbf{x},t)\right) + \frac{1}{2}\sum_{a,b}\partial_a\partial_b\left(B_{ab}(\mathbf{x})P(\mathbf{x},t)\right),$$

где

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{A=\overline{1,10}} \left[s_A^+(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_\mathbf{A}^-(\mathbf{x})\right]\mathbf{r}^\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1(1-x_1-qy)+\beta x_2-\gamma x_1, \\ x_2(1-x_2)-\beta x_2+\gamma x_1, \\ y(1-rx_1-y) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \sum_{A=\overline{1,10}} \left[s_A^+(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_\mathbf{A}^-(\mathbf{x})\right]\mathbf{r}^\mathbf{A}(\mathbf{r}^\mathbf{A})^\mathbf{T} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1(1+x_1+qy)+\beta x_2+\gamma x_1 & -\beta x_2-\gamma x_1 & 0 \\ -\beta x_2-\gamma x_1 & x_2(1+x_2)+\beta x_2+\gamma x_1 & 0 \\ 0 & 0 & y(1+rx_1+y) \end{pmatrix}.$$

Полученное уравнение Фоккера–Планка является уравнением в частных производных, для которого возможно решение краевых задач.

Стохастическое дифференциальное уравнение в форме уравнения Ланжевена можно записать следующим образом:

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{a}(\mathbf{x})\mathrm{d}t + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{W},$$

где $\mathbf{X} \in R^N$ — функция состояния системы, а $\mathbf{W} \in R^N$ — стандартное N-мерное броуновское движение, причём справедливо следующее соотношение для коэффициентов:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}), \;\; \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{b}^T(\mathbf{x}).$$

Записав уравнение в моментах для стохастического дифференциального уравнения в форме Ланжевена, нетрудно показать, что полученное уравнение полностью совпадает с моделью (1) и может служить для исследования детерминистического поведения. Важно отметить, что на указанном совпадении может базироваться верификация изучаемой модели.

Кроме того, исследование стохастического члена стохастического дифференциального уравнения в форме Ланжевена позволит изучить влияние введения стохастики на поведение изучаемой системы, что может найти применение в задачах моделирования, требующих сравнительного анализа детерминистических и стохастических моделей.

В [3] установлено, что устойчивоподобные свойства стохастического уравнения и соответствующего ему нечёткого уравнения связаны следующим образом: 1) если нулевое решение нечёткого уравнения α–устойчиво по Ляпунову при каждом $\alpha \in (0,1]$ (равномерно по α), то нулевое решение соответствующего стохастического уравнения устойчиво по вероятности (соответственно устойчиво почти наверное); 2) если нулевое решение нечёткого уравнения асимптотически α–устойчиво при любом $\alpha \in (0,1]$ (равномерно по α), то нулевое решение соответствующего стохастического уравнения асимптотически устойчиво по вероятности (соответственно асимптотически устойчиво почти наверное). Обратные утверждения в общем случае неверны, так как каждому неустойчивому стохастическому уравнению соответствует бесконечное множество нечётких дифференциальных уравнений, среди которых могут быть как устойчивые, так и неустойчивые. Поэтому из устойчивости соответствующего нечёткого дифференциального уравнения не следует, вообще говоря, соответствующая устойчивость исходного стохастического уравнения.

Подход, основанный на использовании метода построения стохастических самосогласованных моделей, может быть использован для изучения динамического поведения систем популяционной динамики. Этот подход позволил провести сравнительный анализ качественных свойств моделей, учитывающих конкуренцию и миграцию видов, в детерминистическом и стохастическом случаях. В дальнейшем планируется более детально изучить влияние введения стохастики на поведение модели популяционной динамики, учитывающей конкуренцию и миграцию видов, на основе использования метода функций Ляпунова и теории стохастического исчисления. Кроме того, предполагается проанализировать модель путём проведения серии вычислительных экспериментов с помощью разработанного комплекса программ.

5. Заключение

В работе рассмотрено сочетание метода, основанного на построении самосогласованных стохастических моделей, и принципа редукции. На основе применения метода построения стохастических самосогласованных моделей осуществлён синтез стохастической модели, учитывающей конкуренцию и миграцию видов. Принцип редукции позволил получить условия устойчивости модели с переходом к дифференциальному включению и нечёткому дифференциальному уравнению. Условия устойчивости могут быть использованы для изучения динамического поведения моделей популяционной динамики. Полученные результаты направлены на дальнейшее развитие методов построения и анализа устойчивости недетерминированных математических моделей естествознания.

Литература

1. *Пых Ю. А.* Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. — Москва: Наука, 1983.
2. *Масина О. Н., Дружинина О. В.* Существование устойчивых состояний равновесия и предельные свойства решений обобщенных систем Лотки–Вольтерра // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Физика. Математика. — 2007. — № 1. — С. 55–57.
3. *Дружинина О. В., Масина О. Н.* Методы исследования устойчивости и управляемости нечетких и стохастических динамических систем. — Москва: ВЦ РАН, 2009. — 180 с.
4. *Zhang X., Chen L.* The Linear and Nonlinear Diffusion of the Competitive Lotka–Volterra Model // Nonlinear Analysis. — 2007. — Vol. 66. — Pp. 2767–2776.
5. *Дружинина О. В., Масина О. Н.* Исследование существования и устойчивости решений дифференциальной системы экологической динамики с учетом конкуренции и диффузии // Нелинейный мир. — 2009. — Т. 7(11). — С. 881–888.
6. *Кац И. Я., Красовский Н. Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикладная математика и механика. — 1960. — № 24. — С. 809–823.
7. *Kozin F.* Stability of the Linear Stochastic Systems // Lecture Notes in Math. — 1972. — Vol. 294. — Pp. 189–192.
8. *Меренков Ю. Н.* Устойчивоподобные свойства дифференциальных включений, нечетких и стохастических дифференциальных уравнений. Монография. — Москва: Изд-во РУДН, 2000.
9. *Шестаков А. А.* Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. — Москва: УРСС, 2007.
10. *Масина О. Н.* О существовании решений дифференциальных включений // Дифференциальные уравнения. — 2008. — № 6(44). — С. 845–847.
11. *Демидова А. В., Дружинина О. В., Масина О. Н.* Построение стохастической модели динамики популяций, учитывающей конкуренцию и миграцию

видов // Материалы Всероссийской конференции с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» (Москва, РУДН, 20–24 апреля 2015 г.). — М.: РУДН, 2015. — С. 255–258.
12. *Oksendal B. K.* Stochastic Differential Equations: an Introduction with Applications. — Berlin: Springer, 2003. — P. 360.
13. *Павлоцкий И. П., Суслин В. М.* Стохастическая модель эволюции популяции в пространстве // Математическое моделирование. — 1994. — Т. 3(6). — С. 9–24.
14. *Демидова А. В., Кулябов Д. С.* Введение согласованного стохастического члена в уравнение модели роста популяций // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2012. — № 3. — С. 69–78.
15. *Демидова А. В.* Уравнения динамики популяций в форме стохастических дифференциальных уравнений // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2013. — № 1. — С. 67–76.
16. Влияние стохастизации на одношаговые модели / А. В. Демидова, М. Н. Геворкян, А. Д. Егоров и др. // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2014. — № 1. — С. 71–85.

UDC 519.21;51-76

Stability Research of Population Dynamics Model on the Basis of Construction of the Stochastic Self-Consistent Models and the Principle of the Reduction

A. V. Demidova*, O. V. Druzhinina†, O. N. Masina‡

* *Department of Applied Probability and Informatics*
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

† *Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS*
40, Vavilov str., Moscow, Russia, 119333

‡ *Department of Mathematical Modeling and Computer Technologies*
Yelets State University named after Ivan Bunin
28, Communards str., Yelets, Russia, 399770

The three-dimensional model of interaction of populations taking into account the competition and diffusion of species is considered. For research of model the combination of known methods of synthesis and the analysis of models, the principle of a reduction and the developed method of construction of the stochastic self-consistent models is used. Existence conditions of equilibrium states are obtained and the analysis of stability is made. Stability conditions on the basis of the principle of a reduction of a problem about stability of solutions of differential inclusion to a problem on stability of other types of the equations are offered. The specified principle assumes transition from the vector ordinary differential equations to vector differential inclusion and the fuzzy differential equation, taking into account change of parameters of different types in the studied models. For the considered model of population dynamics synthesis of the corresponding stochastic model on the basis of application of a method of construction of the stochastic self-consistent models is carried out. The structure of stochastic model is described, Fokker-Planck equation is written out, and the rule of transition to the stochastic differential equation in the form of Langevin is formulated. The offered approach allowed to carry out the comparative analysis of qualitative properties of the models considering the competition and diffusion of species in deterministic and stochastic cases. Stability conditions can be used for studying of dynamic behavior of models of population dynamics. The received results are aimed at the further development of methods of construction and the analysis of stability of nondeterministic mathematical models of natural sciences.

Key words and phrases: stochastic model, single-step processes, population dynamics, stability, differential equations, principle of a reduction.

References

1. Y. A. Pykh, Equilibrium and Stability in Models of Population Dynamics, Nauka, Moscow, 1983, in Russian.
2. O. N. Masina, O. V. Druzhinina, The Existence of Stable Equilibrium States and Limiting Properties of Solutions of Generalized Systems of Lotka–Volterra, Bulletin of the Voronezh State University. Physics. mathematics (1) (2007) 55–57, in Russian.
3. O. V. Druzhinina, O. N. Masina, Methods of Stability Research and Controllability of Fuzzy and Stochastic Dynamic Systems, Dorodnicyn Computing Center of RAS, Moscow, 2009, in Russian.
4. X. Zhang, L. Chen, The Linear and Nonlinear Diffusion of the Competitive Lotka–Volterra Model, Nonlinear Analysis 66 (2007) 2767–2776.
5. O. V. Druzhinina, O. N. Masina, A Study of the Existence and Stability of Solutions of Differential System of Ecological Dynamics with Competition and Diffusion, Nonlinear World 7(11) (2009) 881–888, in Russian.
6. I. Y. Katz, N. N. Krasovsky, On Stability of Systems with Random Parameters, Journal of Applied Mathematics and Mechanics (24) (1960) 809–823, in Russian.
7. F. Kozin, Stability of the Linear Stochastic Systems, Lecture notes in math 294 (1972) 189–192.
8. Y. N. Merenkov, Stability-Like Properties of Differential Inclusions, Fuzzy and Stochastic Differential Equations, PFUR, Moscow, 2000, in Russian.
9. A. A. Shestakov, Generalized Direct Lyapunov's Method for Systems with Distributed Parameters, URSS, Moscow, 2007, in Russian.
10. O. N. Masina, On the Existence of Solutions of Differential Inclusions, Differential Equations (6(44)) (2008) 845–847, in Russian.
11. A. V. Demidova, O. V. Druzhinina, O. N. Masina, Construction of a Stochastic Model of Population Dynamics, Taking into Account Competition and the Migration of Species, in: Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems: Proceedings of the All-Russian Conference with International Participation (Moscow, PFUR, 20–24 April 2015), PFUR, Moscow, 2015, pp. 255–258, in Russian.
12. B. K. Oksendal, Stochastic Differential Equations: an Introduction with Applications, Springer, Berlin, 2003.
13. I. P. Pavlotsky, V. M. Suslin, Stochastic Model of Evolution of Populations in Space, Mathematical Modeling 3(6) (1994) 9–24, in Russian.
14. A. V. Demidova, D. S. Kulyabov, Introduction of Self-Consistent Term in Stochastic Population Model Equation, Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics". (3) (2012) 69–78, in Russian.
15. A. V. Demidova, The Equations of Population Dynamics in the Form of Stochastic Differential Equations, Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics" (1) (2013) 67–76.
16. A. V. Demidova, M. N. Gevorkyan, A. D. Egorov, A. V. Korolkova, D. S. Kulyabov, L. A. Sevastyanov, Influence of Stochastization on One-Step Models, Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics" (1) (2014) 71–85, in Russian.