

УДК 519.6

## О новой модели условной гетероскедастичности с корреляцией авторегрессионного типа

К. М. Назаренко

*Кафедра прикладной математики  
ГОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»  
Вадковский пер., За, Москва, Россия, 119137*

В работе предложена новая эконометрическая модель совместной динамики ценовых показателей финансовых активов, отличительной особенностью которой является описание динамики корреляции между рассматриваемыми временными рядами в виде случайного процесса авторегрессионного типа. Разработан эффективный вычислительный алгоритм оценивания параметров предложенной модели.

**Ключевые слова:** GARCH, динамика условной корреляции.

### 1. Введение

Исследования стохастических свойств финансовых рынков в условиях высокой волатильности как правило обнаруживают сильную статистическую зависимость показателей стоимости финансовых активов. Количественный анализ таких статистических связей нами подробно описан в работе [1]. До сих пор в них предполагалась стационарность исследуемых выборок и постоянство корреляционных связей между ними. Вместе с тем динамика корреляции между ценовыми показателями финансовых активов, как и их вариаций, не является наблюдаемым процессом, а информация о ней является важной и полезной в решении ряда важных задач инвестиционного риск-менеджмента.

Целью настоящей работы является построение эконометрической модели ценовых показателей финансовых активов, учитывающей динамику их корреляционных связей, которая описывалась бы с помощью отдельных уравнений.

### 2. Многомерные модели условной гетероскедастичности

Информация о динамике корреляции и ковариации между ценовыми показателями финансовых активов является необходимой при оценивании рисков инвестирования, выборе портфелей и др. Несмотря на то, что безусловные корреляции могут быть вычислены, моделирование динамики условной корреляции представляет собой достаточно сложную задачу. Одной из моделей условных ковариаций и корреляций является модель обобщённой авторегрессионной условной гетероскедастичности (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH)), существуют также непараметрические подходы, например, скользящего среднего для ковариаций.

Обобщение GARCH-модели на многомерный случай впервые было предложено Энглем [2]. Эта модель требует оценки большого числа параметров и не гарантирует положительной определённости ковариационной матрицы. В работе [3] была предложена многомерная ВЕКК модель, в которой гарантируется положительная определённость ковариационной матрицы. Однако даже канонические ВЕКК-модели требуют оценки большого числа параметров, в виду чего применение этих моделей на практике ограничивается лишь двумерными случаями (см. [4, 5]).

Модель Боллерслева [6] с постоянной корреляцией также решает проблему положительной определённости ковариационной матрицы меньшим числом параметров, поскольку не учитывает динамику корреляции. В работе [7] предложена многомерная GARCH-модель, непосредственно параметризующая условную корреляцию, используя ее эмпирическую оценку. В работе [4] предложена модель динамической корреляции (DCC), которая также непосредственно параметризует условную корреляцию и допускает эффективный алгоритм двухэтапного оценивания параметров.

В работах [4] и [8] произведён сравнительный анализ многомерных моделей GARCH. В работе [9] методом Монте-Карло также изучаются различные модели, при этом основное внимание уделяется оцениванию динамики условной корреляции.

### 3. Новая спецификация модели с динамической корреляцией

В большинстве многомерных GARCH-моделях условные корреляции определяются из отношения ковариации и произведения корней условных вариаций. Нами предлагается модель, параметризующая непосредственно изменения корреляции следующим образом. Введем следующие обозначения:

$$\bar{r}_t = \bar{\mu}_t + \bar{\varepsilon}_t, \quad \bar{\varepsilon}_t | \Omega_{t-1} \sim N(\bar{0}, H_t),$$

где  $\bar{r}_t$  — вектор логарифмических приращений финансовых показателей,  $\bar{\mu}_t$  — вектор, определяющий их средние значения,  $\bar{\varepsilon}_t$  — вектор остатков с соответствующей условной ковариационной матрицей  $H_t$ , полученной на основании имеющейся на момент времени  $t$  информации  $\Omega_{t-1}$ . Далее будем полагать  $\bar{\mu}_t = \bar{0}$ . Запишем ковариационную матрицу

$$H_t = D_t R_t D_t^T,$$

где  $D_t$  — диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят корни вариаций,  $R_t$  — корреляционная матрица. В двухмерном случае корреляционная матрица  $R_t$  имеет следующий вид:

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & \rho_t \\ \rho_t & 1 \end{pmatrix},$$

где  $\rho_t$  — корреляция между временными рядами. Матрица  $H_t$  является положительно определённой, если  $R_t$  положительно определена, что гарантируется поскольку  $|\rho_t| < 1$ . Для того, чтобы  $|\rho_t|$  был меньше единицы, нами используется следующее преобразование:

$$\rho_t^* = \frac{\rho_t}{\sqrt{1 + \rho_t^2}}, \quad (1)$$

где  $\rho_t^*$  — ограниченная корреляция на интервале  $(-1, 1)$ . Такое ограничение позволяет использовать отдельные параметры в уравнениях для ковариации, а также допускает добавление дополнительных параметров, обеспечивая положительную определённую ковариационной матрицы.

Модель с переменной корреляцией в двухмерном случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} h_{11,t} &= a_{11} + b_{11}\varepsilon_{1,t-1}^2 + c_{11}h_{11,t-1}, \\ h_{22,t} &= a_{22} + b_{22}\varepsilon_{2,t-1}^2 + c_{22}h_{22,t-1}, \\ h_{12,t} &= \rho_t^* \cdot \sqrt{h_{11,t}h_{22,t}}, \\ \rho_t^* &= \frac{\rho_t}{\sqrt{1 + (\rho_t)^2}}, \\ \rho_t &= a_{12} + b_{12}\varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} + c_{12}\rho_{t-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Модель с переменной корреляцией лежит в классе моделей с динамической корреляцией, т.к.  $\rho_t^*$  является случайным процессом. Матрица ковариации всегда является положительно определённой. Каждый элемент матрицы ковариации определяется собственными параметрами, благодаря чему оценивание соответствующих параметров может производиться независимо, что позволяет снизить размерность задачи. Основным преимуществом такого подхода является снижение времени выполнения алгоритма оптимизации.

## 4. Вычислительные эксперименты

Нами проведены вычислительные эксперименты с применением моделей с постоянной и нулевой корреляцией для изучения влияния динамики корреляции на точность оценивания матрицы ковариации. Аналогичные вычислительные эксперименты проводились в работе [10], где оценивается быстродействие алгоритма оценивания параметров модели с учетом динамики корреляции по сравнению с моделью с постоянной корреляцией, и [4], в которой производится сравнение DCC-модели со скалярной BEKK-моделью и диагональной BEKK-моделью. Нами симулировались выборки объемом  $T = 1000$  с использованием имитационных алгоритмов двумерных GARCH-моделей. Используемые уравнения динамики вариаций имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} h_{11,t} &= 0,01 + 0,04\varepsilon_{1,t-1}^2 + 0,95h_{11,t-1}, \\ h_{22,t} &= 0,01 + 0,20\varepsilon_{2,t-1}^2 + 0,50h_{22,t-1}. \end{aligned}$$

Вариация  $h_{11}$ , получаемая в первом уравнении, достаточно устойчива, тогда как вариация  $h_{22}$  менее устойчива. Нами использовались следующие процессы корреляции:

- постоянная корреляция:  $\rho_t = 0,7$ ;
- скачок корреляции  $\rho_t = \begin{cases} -0,5, & t < 500, \\ 0,5, & t \geq 500, \end{cases}$
- периодические колебания высокой частоты  $\rho_t = \beta \cos(t/f)$ ,  $\beta = 1$ ,  $f = 50$ ;
- периодические колебания низкой частоты  $\rho_t = \beta \cos(t/f)$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $f = 250$ .

Результаты оценивания приведены на рис. 1.

В работе также использованы данные финансовых показателей National Association of Securities Dealers Automated Quotation NASDAQ и Dow Jones Industrial Average, DJIA 1953-2007 гг. Нами использовались логарифмические приращения цен. Результаты моделирования динамики условной корреляции приведены на рис. 2.

## 5. Выводы

В работе предложена новая модель совместного поведения ценовых показателей, отличительной особенностью которой является наличие уравнения, в явном виде описывающего корреляцию рассматриваемых процессов авторегрессионным процессом первого порядка. Преимуществом такого подхода к моделированию состоит в предоставляемой им возможности непосредственного анализа динамики корреляционных связей.

С использованием предложенной модели были проведены вычислительные эксперименты, как для симулированных данных, так и для реальных фондовых индексов (NASDAQ, DJIA). Анализ результатов проведённых экспериментов показал высокую вычислительную эффективность разработанного алгоритма оценивания параметров модели, а также более высокое качество приближения динамики условной корреляции по сравнению с моделью BEKK для рассматриваемых данных. В работе [11] нами применяется предложенная модель для решения задачи оценивания рискованности инвестирования в финансовые активы с высокой волатильностью и показано, что при соответствующем выборе процесса распределения инноваций может быть достигнута более высокая точность, чем у других аналогичных моделей.

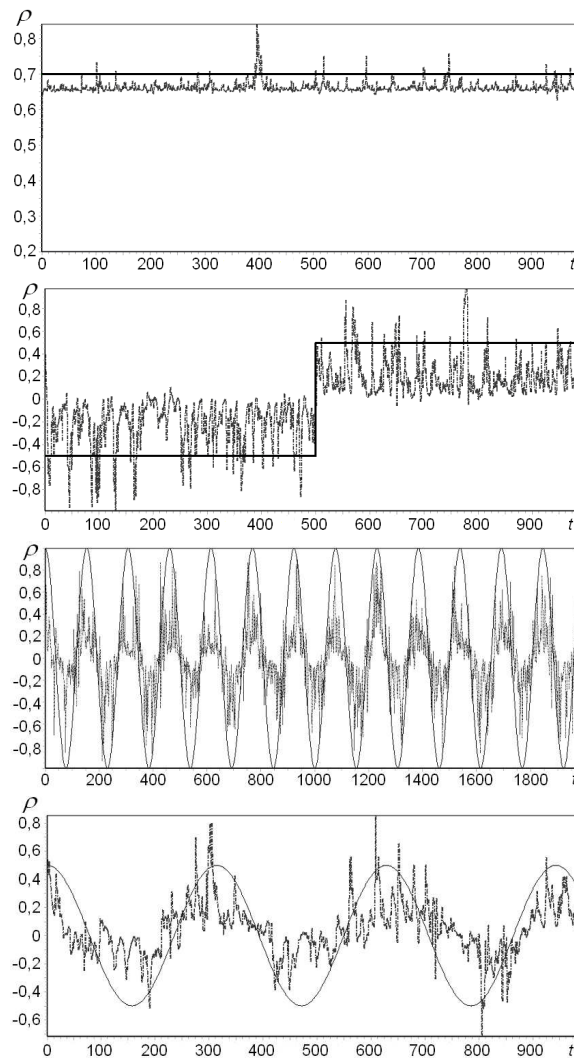


Рис. 1. Результаты аппроксимации процесса корреляции с использованием модели (2): постоянная корреляция, скачок, быстрые и медленные колебания

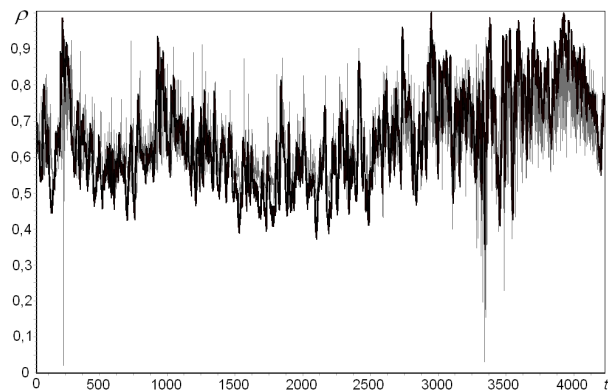


Рис. 2. Динамика эмпирической условной корреляции между логарифмическими приращениями NASDAQ и DJIA и ее аппроксимация с использованием модели (2)

## Литература

1. Щетинин Е. Ю., Назаренко К. М., Парамонов А. В. Инструментальные методы стохастического анализа экстремальных событий // Вестник ННГУ, Математическое моделирование и оптимальное управление, Н. Новгород. — № 2(29). — 2004. — С. 56–63.
2. Engle R. F., Bollerslev T. Modeling the Persistence of Conditional Variances // Econometric Reviews. — No 5. — 1986. — Pp. 1–50, 81–87.
3. Multivariate Simultaneous Generalized ARCH / Y. Baba, R. F. Engle, D. Kraft, K. F. Kroner. — MS, University of California, San Diego, Department of Economics, 1991.
4. Engle R. F. Dynamic Conditional Correlations – A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models // Journal of Business and Economic Statistics. — Vol. 20, No 3. — 2002. — Pp. 339–350.
5. Longin F., Solnik B. Extreme Correlation of International Equity Markets // Journal of Finance. — No 56. — 2001. — Pp. 651–678.
6. Bollerslev T. Modeling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: a Multivariate Generalized ARCH Approach // Review of Economics and Statistics. — No 72. — 1990. — Pp. 1155–1180.
7. Tse Y. K., Tsui A. K. C. A Multivariate GARCH Model with Time-Varying Correlations // Journal of Business and Economic Statistics. — Vol. 20, No 3. — 2002. — Pp. 351–362.
8. Engle R. F., Sheppard K. Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH. — 2001.
9. Pagan A., Schwert G. W. Alternative Models of Conditional Stock Volatility // Journal of Econometrics. — No 45. — 1990. — Pp. 267–290.
10. Tse Y. K. A Test for Constant Correlations in a Multivariate GARCH Model // Journal of Econometrics. — 2000. — Pp. 107–127.
11. Каплунов С. В., Назаренко К. М., Сариев И. К. Статистические методы верификации финансовых показателей // XI-я научная конференция МГТУ «Станкин» и «Учебно-научного центра математического моделирования МГТУ «Станкин» — ИММ РАН»: Сборник докладов / под ред. О. А. Казакова. — М.: «ЯНУС-К», ИЦ ГОУ МГТУ «Станкин», 2008.

UDC 519.6

### On New Conditional Heteroskedasticity Model with Correlation of Autoregressive Type

K. M. Nazarenko

*Practice Math Department  
Moscow State Technological University "STANKIN"  
3a, Vadkovsky per., Moscow, Russia, 119137*

New econometric model of stock indexes joint dynamics has been introduced in this paper. The distinctive feature of the model is description of conditional correlation between time series using autoregressive type random process. Efficient calculation algorithm for parameters estimation has been developed for suggested model.