Вестник РУДН Серия *Математика. Информатика. Физика.* № 4. 2008. С. 75–83

УДК 519.6+517.98+517.3

Использование метода функционального интегрирования в некоторых задачах математической физики

Ю. Ю. Лобанов

Объединённый институт ядерных исследований
Лаборатория физики высоких энергий
Дубна, Московская область, 141980, Россия

Описывается применение метода численного функционального интегрирования при решении задач математической физики. Приводится обзор литературы последних лет, относящейся к вычислению функциональных интегралов в различных областях науки. Даётся анализ современных тенденций и направлений использования функциональных интегралов.

Ключевые слова: функциональный интеграл, мера Винера, пропагатор, квантовая механика, энергия связи, функция Грина, стохастический процесс.

1. Введение

Метод функционального (континуального) интегрирования является важным аппаратом исследования широкого круга проблем в различных областях физики и математики [1–3]. Начало использованию функциональных интегралов и их исследованию было положено ещё в 30-е годы в работах А.Н. Колмогорова и Н. Винера в теории случайных процессов. В 50-е годы эта идея получила дополнительный стимул для развития, связанный в первую очередь с работами Р. Фейнмана по квантовой механике и квантовой электродинамике [4], в которых был введён и использован знаменитый «фейнмановский интеграл по траекториям». Концепция этого интеграла послужила основой для создания новой альтернативной формулировки квантовой механики. Идеи Фейнмана получили дальнейшее развитие в работах М. Каца по исследованию диффузионных процессов.

Функциональное интегрирование является в настоящее время основой современной конструктивной квантовой теории поля, основным методом численного исследования непертурбативных явлений в квантовой калибровочной теории. Поскольку в квантовой теории поля во многих случаях отсутствует дифференциальная постановка задачи, основным методом исследования долгое время являлась теория возмущений. Однако, как оказалось, ряд явлений не может быть описан в рамках этого подхода (например, сильные взаимодействия, а также так называемые непертурбативные эффекты). Существующий также метод квазиклассического приближения не учитывает специфические квантовые эффекты и не даёт возможности исследования широкого круга интересных физических явлений. В связи с этим метод приближённого континуального интегрирования в этих случаях приобретает особенно важное значение.

Континуальные интегралы находят широкое применение в квантовой механике, теории поля, статистической физике, физике атомного ядра, физике твёрдого тела, квантовой статистике, теории сверхпроводимости, квантовой оптике, статистической радиотехнике, радиационной физике частиц высоких энергий и во многих других областях [5].

Широкое применение функциональных интегралов стимулировало развитие их теории и методов приближённого вычисления. Поскольку «мера Фейнмана»

Статья поступила в редакцию 20 августа 2008 г.
Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 07-01-00738-а.

не удовлетворяет условию счётной аддитивности, т.е. не является мерой в математически строгом смысле, возникло множество различных подходов к фейнмановским интегралам, обосновывавших их конструкцию и предлагавших соответствующие способы их приближённого вычисления. Одним из путей преодоления указанной трудности является переход к евклидовой метрике и постановка задачи на мнимой оси времени. Долгое время наиболее изученными являлись винеровские интегралы, связанные с фейнмановскими операциями перехода к мнимому времени, однако в последнее время большое внимание уделяется их обобщению, а также исследованию функциональных интегралов по другим мерам в соответствующих пространствах [6, 7].

Для функциональных интегралов по мерам гауссового типа в полных сепарабельных метрических пространствах нами был разработан метод приближённого вычисления, не требующий предварительной дискретизации пространства и позволяющий использовать детерминированные (в отличие от вероятностных — методов Монте–Карло) алгоритмы расчётов [8]. В данной работе даётся обзор ряда направлений использования функциональных интегралов для численного решения задач физики.

2. Области применения функциональных интегралов

Методу функционального интегрирования и его использованию в различных областях науки посвящена серия регулярно проводимых международных конференций с общим названием «Path Integrals», в том числе состоявшихся в Тутцинге, Германия, 1992; Дубне, Россия, 1996; Флоренции, Италия, 1998; Антверпене, Бельгия, 2002; Праге, Чехия, 2005; Дрездене, Германия, 2007. В последней их них — International Conference Path Integrals — New Trends and Perspectives, Dresden, September 23–28, 2007 [9] обозначены различные области применения функциональных интегралов. Среди представленных там докладов можно выделить ряд направлений, некоторые из которых перечислены ниже:

1. Квантовая и статистическая физика:
   - Adriaan Schakel, Spacetime Approach to Phase Transitions.
     (Фейнмановский подход в квантовой механике на основе суммирования вкладов траекторий применён для исследования фазовых переходов. Критические экспоненты определяются фрактальной структурой траекторий, которые моделируются непосредственно. Представлены результаты моделирования с помощью метода Монте–Карло. Обсуждается также возможность применения метода для описания перехода к деконфайнменту в компактной абелевой модели Хиггса);
   - Frank Lee, Path Integrals in Lattice Quantum Chromodynamics.
     (Обсуждается использование функциональных интегралов для исследования процессов сильных взаимодействий. Функциональные интегралы вычисляются с помощью метода Монте–Карло на пространственно-временной решётке. Приводятся результаты расчёта спектра масс и магнитных моментов адронов);
   - David Ceperley, Imaginary Time Path Integral Calculations of Supersolid Helium.
     (В рамках формализма интегралов по траекториям в евклидовой метрике (мнимое время) исследуются процессы кристаллизации и явление сверхтекучести в жидком гелии. Отмечается, что функциональные интегралы представляют взаимосвязь между квантовыми системами и классической статистической механикой, позволяющую исследовать Бозе-конденсацию статистическими методами, в частности, определить, являются ли флуктуирующие квантовые кристаллы изоляторами или металлами. Методом функционального интегрирования с использованием монте–карловского моделирования исследуются свойства конденсации и сверхтекучести);
   - Peter Nielaba, Phase Transitions and Quantum Effects in Model Colloids and Nanostructures.

(Исследуются фазовые переходы в коллоидных моделях во внешних периодических потенциалах. Квантовые эффекты моделируются с помощью функциональных интегралов, вычисляемых методом Монте–Карло. В области наноструктур представлены результаты исследования взаимодействия атомных кластеров, эффекта процессов растяжения в гистограмме проводимости нанопроводников, эффекта геометрического конфайнмента на стенках магнитных доменов);

– Akira Inomata, Path Integration in the Field of a Topological Defect: the Case of Disclination.
(Исследуются свойства вещества в области дефектов, моделируется поведение частицы вблизи дисклинации, т.е. смещения с поворотом в твёрдых телах);
– Virulh Sa-yakanit, Path Integral Derivation of Lifshitz Tails.
(С помощью фейнмановских интегралов исследуется асимптотика энергии связи частиц в зависимости от объёма в применении к теории полупроводников);
– Hajo Leschke, Diamagnetic Monotonicities, Lifshitz Tails and Anisotropic Transport in a Random Magnetic Field.
(С помощью винеровских интегралов на основе формулы Фейнмана–Каца исследуются магнитные свойства вещества и поведение заряженных частиц в неоднородных магнитных полях);
– Jozsef Lorinczi, Rigorous Functional Integration with Applications to Nelson's and the Pauli–Fierz Model.
(Рассматриваются функциональные интегралы с введением меры на пространстве траекторий для различных гамильтонианов взаимодействия. Исследуются меры для процессов Винера, Орнштейна–Уленбека и другие. Доказываются теоремы о мерах типа Гаусса и Гиббса. Рассматривается квантование в пространстве Фока и в евклидовом пространстве. Исследуются инфракрасные и ультрафиолетовые расходимости и рассматриваются регуляризованные и перенормированные функциональные интегралы);
– Juraj Bohacik, Gelfand–Yaglom Equation for Wiener Functional Integral with Fourth Order Term.
(Приводится вывод уравнения типа Гельфанда–Яглома для винеровских интегралов в случае наличия члена x^4. Для ангармонического осциллятора получен поправочный член к уравнению Гельфанда–Яглома для гармонического осциллятора, описывается его вычисление).

2. Физика конденсированного состояния:
– Robert Graham and Axel Pelster, Functional Integral Approach to Disordered Bosons in Traps.
(Исследуются термодинамические свойства бозонных систем в применении к различным физическим объектам: сверхтекучий гелий, лазеры, частицы в магнитном поле и др.);
– Hermann Grabert, Decay of Metastable Systems Driven by Non-Gaussian Noise.
(В рамках формализма интегралов по траекториям исследуется влияние негауссового шума в электронных наноструктурах. Рассматриваются как классические переходы в джосефсоновских контактах, так и чисто квантовые, происходящие на основе туннелирования из метастабильного состояния);
– Ulrich Weiss, Full Counting Statistics in Dissipative Quantum Transport: Recent Achievements.
(На основе метода интегрирования по траекториям и неравновесной диссипативной квантовой механики исследована передача заряда через потенциальные барьеры в различных системах, в том числе в джосефсоновских переходах, в когерентных проводниках, при туннелировании заряженных частиц в квантовых системах с неоднородными примесями);
– F. Brosens, Answers and Questions on Path Integrals for Superconductivity in a Wedge.

(Метод функционального интегрирования применяется для исследования сверхпроводимости. Уравнение Гинзбурга–Ландау рассматривается аналогично уравнению Шрёдингера, но условие наличия токов на границе создаёт отличие в формулировке задачи в терминах интегралов по траекториям);

- J.T Devreese and J. Tempere, Path Integral Description of Cooper Pairing in Imbalanced Gases.
  (С помощью интегралов по траекториям исследуются процессы образования пара в сверххолодных газах. В случае дисбаланса популяции образование пар подавляется, что приводит к возникновению свойств сверхтекучести и сверхпроводимости. Результаты, полученные с помощью метода функционального интегрирования, находятся в соответствии с недавними экспериментами);
- Klaus Ziegler, Oleksandr Fialko and Cenap Ates, Functional Integration in Many-body Systems: Application to Ultracold Gases.
  (Рассматривается вычисление функциональных интегралов в евклидовой метрике (мнимое время) для многочастичных систем. Для нахождения функции Грина используется метод Монте–Карло. Исследуется ультрахолодный Бозе-газ на оптической решётке путём анализа процесса туннелирования частиц в потенциале с периодической структурой. Учитывается конкуренция между термальными и квантовыми флуктуациями в связи с излучением лазера).

3. Теория гравитации:
   - Claus Kiefer, Path Integrals in Quantum Gravity — General Concepts and Recent Developments.
     (Даётся обзор современного состояния исследований с применением функциональных интегралов в квантовой теории гравитации);
   - John R. Klauder, Functional Integrals in Affine Quantum Gravity.
     (Исследуются математические основы функциональных интегралов в теории квантовой гравитации. Рассматриваются методы, сохраняющие положительность метрики. Обсуждается исследование гравитационных аномалий с использованием метода проектирующих операторов. Формализм функционального интегрирования дополняется процедурой перенормировки с непрерывным временем (без его дискретизации);
   - Daniel Grumiller, Breakdown and Restoration of Classical Approximation in Black Hole Path Integrals.
     (С помощью интегралов по траекториям в евклидовой метрике исследуются термодинамические характеристики чёрной дыры);
   - Gunter Wunner, Quantum Monte–Carlo Studies of the Ground States of Heavy Atoms in Neutron Star Magnetic Fields.
     (С помощью метода Монте–Карло вычисляются энергии основного состояния тяжёлых атомов в магнитных полях, соответствующих нейтронным звёздам, что мотивировано недавними открытиями свойств термальных спектров нейтронных звёзд);
   - Z. Haba, Quantum Fields Near the Horizon and at the Singularity.
     (Евклидова версия $D+1$ — мерного множества с раздвоенным горизонтом Киллинга аппроксимируется произведением двумерного пространства Риндлера и $D-1$ — мерного риманова множества M. Исследуется поведение функций Грина в области горизонта и их размерная редукция. Показано, что если множество M компактно, то теория поля на множестве с горизонтом может быть аппроксимирована двумерной евклидовой теорией поля. Описывается метод функционального интегрирования в евклидовой метрике в применении к квантовой теории поля на искривлённом пространстве).
4. Спиновые модели:
   - Ruggero Vaia, Environmental Effects on the Thermodynamics of Quantum Spin Systems.
     (В рамках формализма интегралов по траекториям исследуется влияние квантовых эффектов благодаря взаимодействию системы с окружающей

средой. Рассматривается изменение матрицы плотности вследствие теплообмена между спиновыми возбуждениями и фононными степенями свободы. Исследованы магнитные фазовые переходы, учитывающие это изменение);

– Alessandro Cuccoli, Thermodynamics of Quantum 2D Heisenberg Magnets with Intermediate Spin.
(С помощью метода функционального интегрирования для спиновых моделей на решётке применяется чисто квантовая аппроксимация спиновых волн, что позволяет преобразовать исходную квантовую задачу в классическую, формулируемую на языке эффективного классического спинового гамильтониана. Отмечается, что этот подход особенно важен при исследовании термодинамических характеристик систем, которые вызывают затруднения для других методов, как численных, так и аналитических. Метод успешно использован, чтобы заполнить пробел между предсказаниями теоретико-полевого подхода и полуклассических и экспериментальных результатов 2D анизотропных антиферромагнетиков, в том числе во внешних магнитных полях);

– Rainer Bischof, Quantum Monte Carlo Investigation of Quantum Phase Transitions of Mixed Heisenberg Spin Chains.
(С помощью метода Монте–Карло исследуются квантовые фазовые переходы при низких температурах в антиферромагнитных гейзенберговских спиновых цепочках, содержащих два различных набора спинов. Переходы между качественно различными основными состояниями (квантовыми фазами) характеризуются параметром α, являющимся относительной связью между параллельными и антипараллельными спинами. Вычислены критические значения α, критические экспоненты и корреляционные длины);

– Boris Shalaev, The Critical Behavior of the Random Ising Ferromagnets.
(Исследуются свойства d-мерной униаксиальной ферромагнитной системы вблизи критической точки. Получены температурные зависимости некоторых термодинамических величин, поведение двухспиновой корреляционной функции на больших расстояниях и уравнение состояния в критической точке, а также разложение в ряд критической экспоненты);

– Cyril Malyshev, Functional Integration, Spin Correlation Functions of the Heisenberg Chain and Random Walks.
(Разработан метод расчёта корреляционных функций спиновых операторов в XY цепочке Гейзенберга на основе вычисления функциональных интегралов с мнимым временем. Используется регуляризация с использованием обобщённой дзета-функции. Рассмотрены зависящие от времени корреляционные функции XY цепочки; исследована асимптотика корреляционных функций).

5. Стохастические дифференциальные уравнения:

– Dirk Homeier, Path Integral Formulation of Stochastic Differential Equations.
(Даётся обзор задач, приводящих к формулировке стохастических дифференциальных уравнений с помощью функциональных интегралов (интегралов по траекториям). Наиболее подробно рассматривается уравнение Бургера, которое может рассматриваться как описание турбулентной гидродинамики. Представлены результаты расчётов, полученные с использованием метода Монте–Карло).

6. Биофизика:

– Christopher Bernido, Investigations of Biopolymer Conformations Using the Path Integral Method.
(С помощью метода интегралов по траекториям исследуется общая структура и морфология биополимеров, в частности кодировка информации о трёхмерной структуре в одномерной цепочке на основе модулирующей функции. Моделируются различные экспериментально наблюдаемые свойства биополимеров);

- Michael Bachmann, Statistical Conformation Mechanics of Protein Folding, Aggregation and Adsorption Transitions.
(Компьютерное моделирование структуры белка, взаимодействия его молекул с мембранами и адсорбция в различных веществах);
- Erwin Frey, Conformations of Semiflexible Polymers.
(Исследуется структура и форма полимеров, моделируются корреляционные функции и функции распределения вероятностей, изучается влияние граничных условий и точечных возмущений. Результаты могут применяться для исследования структуры ДНК);
- Klaus Kroy, Wormlike Chains in Disordered and Glassy Environments.
(В рамках модели нитевидной макромолекулы исследуются свойства важнейших биополимеров, таких как ДНК, F-актин (белок мышечных волокон) и др.);
- David Nelson, Neutral Mutations, Path Integrals and Gene Surfing in Microorganisms.
(Обсуждается применение интегралов по траекториям и уравнения Фоккера–Планка для исследования генетических изменений и генетики популяций. Представлены результаты, полученные для бактерии и для дрожжевой закваски в качестве модельных систем);
- Vladimir Nesterenko, Path Integral for Helical Protein Chains.
(Вводится конструкция функционального интеграла для исследования внутренней энергии белковой цепочки. Изучается зависимость плотности энергии от кривизны центральной линии молекулы белка. Определяется выделение энергии при изменении формы от прямолинейной до спиралевидной);
- Nils Becker, DNA Shape as a Brownian Path on the Euclidean Group.
(Исследуется структура ДНК на основе моделирования непрерывного стохастического процесса с полным набором трансляционных и вращательных степеней свободы. Характеристики процесса определяются с помощью функциональных интегралов на евклидовой группе $SE(3)$.

Одной из важных областей применения функциональных интегралов остаётся квантовая механика и квантовая теория поля [10]. Среди областей теории поля, где вопросы меры функционального интегрирования разработаны наиболее глубоко, важную роль играет двумерная евклидова теория поля с полиномиальными взаимодействиями бозонных полей. В рамках $P(\varphi)_2$-модели могут быть исследованы, в частности, такие процессы, как фазовые переходы, критические явления, взаимодействие частиц, рассеяние и связанные состояния (см. [10]).

Интеграл по обобщённой мере Винера в пространстве непрерывных функций двух переменных даёт возможность выразить решение задач Коши, Гурса некоторых дифференциальных уравнений гиперболического типа, систем дифференциальных уравнений гиперболического типа, а также ряда интегральных уравнений и систем интегральных уравнений [11]. Использование функциональных интегралов для решения абстрактных эволюционных уравнений, включающих различные уравнения и системы параболического, гиперболического и шрёдингеровского типов, содержится в работах Ю.Л. Далецкого и С.В. Фомина [12].

В недавно вышедшей книге [13] сформулированы основы метода функционального интегрирования и рассмотрены современные направления использования функциональных интегралов (интегралов по траекториям) в квантовой физике, в том числе в квантовой механике, квантовой теории поля, в калибровочных теориях — квантовой электродинамике, теории Янга–Миллса, Фаддеева–Попова. В книге также содержится обзор работ по применению функциональных интегралов.

Путём перехода к евклидовой метрике с помощью поворота Вика в комплексной плоскости в работе [14] нами было получено выражение пропагатора открытой квантовой системы в виде двойного функционального интеграла по условной мере Винера и проведены расчёты характеристик туннелирования квантовой частицы сквозь потенциальный барьер с диссипацией.

В работе [15] исследуются интегралы по траекториям в квантовой механике, разрабатывается метод их приближённого вычисления с использованием коротковременного приближения. Рассматривается свободная квантовомеханическая частица и частица во внешнем потенциале. На этих примерах обсуждается взаимосвязь квантовых и классических систем, встречающихся в физике высоких энергий.

В статье [16] проведено исследование магнитной структуры вещества, вычисление магнитных моментов атомов в различных магнитных сплавах на основе метода функционального интегрирования в евклидовой метрике (мнимое время), применяемого к системам с большим числом атомов. Рассмотрены состояния со многими локальными минимумами, вычислены энергии основного состояния и усреднённые магнитные моменты.

В работе [17] рассматриваются функциональные интегралы в статистической физике. Развивается метод их вычисления на основе нахождения коротковременного пропагатора. Метод используется для численного исследования процесса Орнштейна–Уленбека и решения уравнения Фоккера–Планка.

Метод функционального интегрирования (интегрирования по траекториям) используется в [18] для исследования процессов ценообразования и прогнозирования изменения характеристик финансовых рынков и ценных бумаг. Разработан алгоритм вычисления интегралов по траекториям, не использующий метод Монте–Карло и позволяющий исследовать финансовые модели на основе метода случайного блуждания (броуновского движения), уравнений Ланжевена, шрёдингеровского типа уравнений и уравнения Фоккера–Планка. Для них в работе строится лагранжиан типа фейнмановского и находится распределение вероятности путём приближённого вычисления интеграла по траекториям.

На основе метода функционального интегрирования в работе [19] исследуется эволюция открытых систем, для описания взаимодействия с окружающей средой используется функционал влияния, предложенный Фейнманом и Верноном. Оператор эволюции выражается при этом в виде фейнмановского интеграла по траекториям.

В работе [20] разрабатывается метод вычисления функциональных интегралов (интегралов по траекториям) в евклидовой метрике с помощью дискретизации мнимой оси времени. Метод применяется для нахождения матрицы плотности в различных моделях. Рассмотрен случай взаимодействия, зависящего от спина частиц. В работе проведены расчёты внутренней энергии для ферромагнитного и антиферромагнитного типов связи.

В статье [21] рассматривается приближённое вычисление интегралов Винера в задачах квантовой механики на основе формулы Фейнмана–Каца. Разработанный в статье метод подразумевает дискретизацию времени и последующее нахождение кратного риманова интеграла методом случайных блужданий. Метод применяется для исследования систем частиц в трёх измерениях, в частности, атома водорода с кулоновским взаимодействием, а также других квантовомеханических моделей.

3. Заключение

Как показывает анализ литературы последних лет, метод приближённого функционального интегрирования находит все более широкое применение в различных областях науки. В связи с этим особую актуальность приобретает разработка эффективных численных методов для функциональных интегралов путём нахождения интегралов Лебега в метрических пространствах. Как отмечается во многих работах, этот подход перспективен, поскольку в нем отсутствуют многие серьёзные проблемы, которые не всегда решаются до конца при использовании решёточной дискретизации, в частности, проблема существования и единственности континуального предела, проблема неоднозначности результатов при различных дискретизациях, отсутствуют проблемы, связанные с возникновением метастабильности и замедлением сходимости итераций при стремлении к нулю шага решётки, отсутствуют так называемые решёточные артефакты, приводящие в ряде случаев расчёты на решётке к неверным результатам.

Развиваемый нами в рамках этого подхода метод приближённого вычисления функциональных интегралов даёт возможность получения математически строго обоснованных физических результатов с заранее предсказываемой (на основании теорем) погрешностью вычислений. Он наиболее полезен в случаях, когда существует сильная чувствительность задачи к шагу дискретизации, например, при исследовании сингулярностей типа фазовых переходов, при возможности нарушения исходной топологии пространства с введением решётки, при исследовании систем высокой размерности (в том числе с многочастичных взаимодействием, поскольку в данном подходе не возникает проблемы обращения заполненных матриц высокого порядка) и т.д. Как показывают результаты расчётов, метод, основанный на полученных нами аппроксимациях, даёт возможность получения физических результатов с хорошей точностью путём вычисления обычных (римановых) интегралов малой кратности (на несколько порядков меньше, чем требует метод Монте–Карло). Это преимущество может приобрести большое значение в случае многомерных задач. Полученные результаты указывают и на то, что этот метод хорошо работает именно в тех случаях, когда использование традиционных методов вызывает затруднение. Более подробно метод нахождения функциональных интегралов на основе вычисления интегралов Лебега в полных сепарабельных метрических пространствах будет рассмотрен в следующих работах.

Автор глубоко благодарен профессору Е.П. Жидкову, чья многолетняя поддержка и участие, помощь в постановке задач и обсуждение результатов явились основой возникновения цикла работ по приближённому вычислению функциональных интегралов.

Литература

1. *Khandecar D. C., Lawande S. V., Bhagwat K. V.* Path-Integral Methods and Their Applications. — Singapore: World Scientific, 1993.
2. *Dittrich W., Reuter M.* Classical and Quantum Dynamics: from Classical Paths to Path Integrals. — Berlin: Springer, 1994.
3. *Kashiwa T., Ohnuki Y., Suzuki M.* Path Integral Methods. — Oxford: Clarendon Press, 1997.
4. *Feynman R. P.* Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics // Rev. Mod. Phys. — Vol. 20. — 1948. — Pp. 367–387.
5. *Мазманишвили А. С.* Континуальное интегрирование как метод решения физических задач. — Киев: Наукова думка, 1987.
6. *Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A.* Functional Integrals: Approximate Evaluation and Applications. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993.
7. *Егоров А. Д., Жидков Е. П., Лобанов Ю. Ю.* Введение в теорию и приложения функционального интегрирования. — М.: Физматлит, 2006.
8. *Жидков Е. П., Лобанов Ю. Ю.* Метод приближенного континуального интегрирования и некоторые его приложения // Математическое моделирование. — Т. 11. — 1999. — С. 37–83.
9. *Janke W., Pelster A.* Proceedings of the International Conference Path Integrals — New Trends and Perspectives, Dresden, September 23–28, 2007. — Singapore: World Scientific, 2008.
10. *Glimm J., Jaffe A.* Quantum Physics. A Functional Integral Point of View. — New York: Springer–Verlag, 1987.
11. *Ковальчик И. М., Янович Л. А.* Обобщенный винеровский интеграл и некоторые его приложения. — Минск: Наука и техника, 1989.
12. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. — М.: Наука, 1983.
13. *Mosel U.* Path Integrals in Field Theory: An Introduction. — Heidelberg: Springer–Verlag, 2003.
14. *Rushai V. D., Lobanov Y. Y.* Studying Open Quantum Systems by Means of a Deterministic Approach to Approximate Functional Integration // Phys. Rev. E. — Vol. 71. — 2005. — P. 066708(4).
15. *Ansoldi S., Aurilia A., Spallucci E.* Particle Propagator in Elementary Quantum Mechanics: a New Path Integral Derivation // Eur. J. Phys. — Vol. 21. — 2000. — Pp. 1–12.

16. *Akbar S., Kakehashi Y., Kimura N.* A Molecular Dynamics Approach to Magnetic Alloys with Turbulent Complex Magnetic Structures: γ-FeMn Alloys // J. Phys.: Condens. Matter. — Vol. 10. — 1998. — P. 2081–2105.
17. *Donoso J. M., Salgado J. J., Soler M.* Short-Time Propagators for Nonlinear Fokker–Planck Equations // J. Phys. A: Math. Gen. — Vol. 32. — 1999. — P. 3681–3695.
18. *Ingber L.* High-Resolution Path-Integral Development of Financial Options // Physica A. — Vol. 283. — 2000. — P. 529.
19. *Mensky M. B.* Evolution of an Open System as a Continuous Measurement of This System by its Environment // Physics Letters A. — Vol. 307. — 2003. — P. 85–92.
20. *Samson J. H.* Time Discretization of Functional Integrals // J. Phys. A: Math. Gen. — Vol. 33. — 2000. — P. 3111–3120.
21. *Rejcek J. M. et al.* Application of the Feynman–Kac Path Integral Method in Finding the Ground State of Quantum Systems // Comp. Phys. Comm. — Vol. 105. — 1997. — Pp. 108–126.

UDC 519.6+517.98+517.3

Application of Functional Integration Method in Some Problems of Mathematical Physics

Yu. Yu. Lobanov

Joint Institute for Nuclear Research
Laboratory of High Energy Physics
Dubna, Moscow Region, 141980, Russia

Application of numerical functional integration method to solving some problems of mathematical physics is described. The recent publications related to calculation of functional integrals in various branches of science are reviewed. The analysis of modern trends and directions of functional integral applications is given.