УДК 531.36, 590.86

Исследование устойчивости интегрального многообразия в случае уравнений возмущения связей с постоянными коэффициентами

Е. А. Горшков

Кафедра теоретической механики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

Предлагается метод построения математической модели динамики управляемой механической системы. Строится алгоритм модификации уравнений динамики, которая позволяет решить задачу стабилизации связей и обеспечить требуемую точность численного решения соответствующей системы дифференциально-алгебраических уравнений, описывающих наложенные на систему связи, её кинематику и динамику. Предлагаемый метод может быть использован для исследования динамики систем различной физической природы.

Ключевые слова: устойчивость системы, возмущение связей, уравнения возмущения, интегральное многообразие, динамика системы, стабилизация связей, диссипативная функция, асимптотическая устойчивость.

1. Введение

Современные системы управления имеют достаточно сложную структуру, содержащую элементы различной физической природы. Исследование динамики таких систем в первую очередь требует построения общей математической модели, описывающей динамику всей системы. Кинематические и динамические аналогии позволяют использовать для моделирования кинематики и динамики управляемых систем методы классической механики [1]. Основываясь на известных принципах, уравнения динамики управляемых систем можно представить в форме уравнений Лагранжа [2,3].

Динамика сосредоточенных систем описывается системой дифференциально-алгебраических уравнений, составленных непосредственно из уравнений динамики и уравнений связей, наложенных на обобщённые координаты и скорости [4]. Поскольку число уравнений связей, как правило, оказывается меньше числа переменных, определяющих состояние системы, то построение уравнений динамики сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с прямоугольной матрицей коэффициентов и последующему построению дифференциальных уравнений, решения которых обладали бы заданными свойствами. Неоднозначность решения этой задачи позволяет учитывать возможные дополнительные условия, определяющие свойства исследуемой системы.

2. Моделирование динамики системы

Уравнения динамики механической системы могут быть построены, если известны её кинетическая энергия $T = T^*\left(q^i, \dot{q}^j, t\right)$, потенциальная энергия $P = P^*(q^i, t)$, диссипативная функция $D = D^*(q^i, \dot{q}^j, t)$, обобщённые непотенциальные внешние силы $Q_s = Q_s\left(q^i, \dot{q}^j, t\right)$ и управляющие силы $U_s = U_s\left(q^i, \dot{q}^j, t\right)$, где $\dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, $i, j, s = 1, \ldots, n$.

Статья поступила в редакцию 9 июня 2008 г.
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант №06-01-00664.

Управляющие силы U_s, действующие на систему, призваны обеспечить выполнение уравнений связей

$$f^{\mu}\left(q^i,t\right)=0,\quad \dot f^{\mu}\equiv f^{\mu}_i\dot q^i+f^{\mu}_t=0,\quad \dot f^{\rho}\left(q^i,\dot q^j,t\right)=0,\tag{1}$$

$$f^{\mu}_i=\frac{\partial f^{\mu}}{\partial q^i},\quad f^{\mu}_t=\frac{\partial f^{\mu}}{\partial t},\quad i,j=1,\ldots,n,\quad \mu=1,\ldots,m,\quad \rho=m+1,\ldots,r.$$

В (1) и в дальнейшем по одинаковым индексам предполагается суммирование.

Рассмотрим механическую систему, кинематическое состояние которой определяется координатами q^i, $q^{n+\mu}$ и скоростями $\dot q^j$, $\dot q^{n+\kappa}$, где $(\kappa=1,\ldots,r)$. В данном случае $q^{n+\mu}$, $\dot q^{n+\kappa}$ — избыточные координаты, которые вводятся с целью обеспечения устойчивости связей. Определим динамические показатели системы: кинетическую энергию, потенциальную энергию и диссипативную функцию соответственно как функции переменных: q^i, $\dot q^j$, $q^{n+\mu}$, $\dot q^{n+\kappa}$, t:

$$T=T\left(q^i,\,q^{n+\mu},\dot q^j,\,\dot q^{n+\kappa},t\right),\quad P=P(q^i,\,q^{n+\mu},t),\quad D=D(q^i,q^{n+\mu},\dot q^j,\,\dot q^{n+\kappa},t).$$

Представим связи, наложенные на систему, уравнениями:

$$q^{n+\mu}-f^{\mu}\left(q^i,t\right)=0,\quad \dot q^{n+\kappa}-\dot f^{\kappa}\left(q^i,\dot q^j,t\right)=0.\tag{2}$$

Предполагается, что функции T, P, D по крайней мере дважды дифференцируемы по всем переменным, и при $q^{n+\mu}=0$, $\dot q^{n+\kappa}=0$ расширенная система совпадает с исходной заданной системой, и выполняются уравнения (1).

Будем предполагать, что отклонения от уравнений связей (1), которые измеряются переменными $q^{n+\mu}$, $\dot q^{n+\kappa}$ достаточно малы, то есть: существует положительное число $\varepsilon_0\neq 0$, такое, что для любого положительного $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ выполняется $|q^{n+\mu}|\leqslant\varepsilon$, $|\dot q^{\kappa}|\leqslant\varepsilon$. Будем предполагать, что функции T, P, D можно представить разложением в ряд по степеням $q^{n+\mu}$, $\dot q^{n+\kappa}$ и соответствующие ряды не содержат членов первой степени относительно $q^{n+\mu}$, $\dot q^{n+\kappa}$:

$$T=T^*\left(q^i,\dot q^j,\,t\right)+\frac12 a_{\beta\gamma}\left(q^i,\,\dot q^j,\,t\right)\dot q^{n+\kappa}\dot q^{n+\gamma}+\ldots,\tag{3}$$

$$P=P^*(q^i,t)+\frac12 b_{\beta\gamma}\left(q^i,t\right)q^{n+\mu}q^{n+\nu}+\ldots,\tag{4}$$

$$D=D^*(q^i,\dot q^j,t)+\frac12 c_{\beta\gamma}\left(q^i,\dot q^j,t\right)\dot q^{n+\kappa}\dot q^{n+\gamma}+\ldots,\tag{5}$$

$$\kappa,\gamma=1,\ldots,r;\quad \mu,\nu=1,\ldots,m.$$

Из (2) следует система линейных алгебраических уравнений относительно δq^i, $\delta q^{n+\kappa}$:

$$f^{\kappa}_i\delta q^i=\delta q^{n+\kappa},\tag{6}$$

где

$$f^{\mu}_i=\frac{\partial f^{\mu}}{\partial q^i},\quad f^{\rho}_i=\frac{\partial\dot f^{\rho}}{\partial\dot q^{\,i}}.$$

Согласно принципу Даламбера–Лагранжа с учётом решения системы уравнений (6) и условиями идеальности связей (2) можно построить уравнения динамики расширенной системы. Они состоят из двух частей. Первая группа уравнений соответствует уравнениям динамики управляемой системы

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial P}{\partial q^i} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}^i} + Q_i + f_i^\kappa \lambda_\kappa, \tag{7}$$

вторая группа представляет собой систему уравнений возмущений связей

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{n+\kappa}} - \frac{\partial T}{\partial q^{n+\mu}} = -\frac{\partial P}{\partial q^{n+\mu}} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}^{n+\kappa}}. \tag{8}$$

Последнее слагаемое правой части уравнения (7) $f_i^\kappa \lambda_\kappa$ представляет собой управляющие силы U_s.

3. Исследование устойчивости системы

Решение системы уравнений (7)–(8) сводится к определению множителей λ_κ из (7) и выражениями избыточных переменных $q^{n+\mu}$, $\dot{q}^{n+\kappa}$ из (2), (8) через обобщённые координаты q^i и скорости $\dot{q}^j$.

Для получения выражений для λ_κ представим уравнения (7)–(8) в виде, разрешённом относительно старших производных $\ddot{q}^i$, $\ddot{q}^{n+\kappa}$:

$$\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = \dot{q}^i, \quad \frac{\mathrm{d}\dot{q}^i}{\mathrm{d}t} = m^i\left(q^k, \dot{q}^s, t\right) + f^{i\kappa}\left(q^k, \dot{q}^s, t\right)\lambda_\kappa\left(q^k, \dot{q}^s, q^{n+\mu}, \dot{q}^{n+\kappa}, t\right), \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}q^{n+\mu}}{\mathrm{d}t} = \dot{q}^{n+\mu}, \quad \frac{\mathrm{d}\dot{q}^{n+\kappa}}{\mathrm{d}t} = k_\gamma^\kappa\left(q^k, \dot{q}^s, t\right)\dot{q}^{n+\gamma} + b_\gamma^\kappa\left(q^k, \dot{q}^s, t\right)q^{n+\gamma}. \tag{10}$$

Продифференцируем второе уравнение (2) по времени t:

$$\frac{\mathrm{d}\dot{q}^{n+\kappa}}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial \dot{f}^\kappa}{\partial q^i}\dot{q}^i - \frac{\partial \dot{f}^\kappa}{\partial \dot{q}^i}\frac{\mathrm{d}\dot{q}^i}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\dot{f}^\kappa}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{11}$$

В последнем уравнении необходимо заменить $\frac{\mathrm{d}\dot{q}^{n+\kappa}}{\mathrm{d}t}$ и $\frac{\mathrm{d}\dot{q}^i}{\mathrm{d}t}$ правыми частями уравнений (9)–(10):

$$k_\gamma^\kappa \dot{q}^{n+\gamma} + b_\gamma^\kappa q^{n+\gamma} - \frac{\partial \dot{f}^\kappa}{\partial q^i}\dot{q}^i - \frac{\partial \dot{f}^\kappa}{\partial \dot{q}^i}\left(m^i + f^{i\theta}\lambda_\theta\right) - \frac{\partial \dot{f}^\kappa}{\partial t} = 0. \tag{12}$$

В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно множителей λ_κ:

$$\alpha^{\kappa\theta}\lambda_\theta = \alpha^\kappa. \tag{13}$$

$$\alpha^{\kappa\theta} = \frac{\partial \dot{f}^\kappa}{\partial \dot{q}^i}f^{i\theta}, \quad \alpha^\kappa = k_\gamma^\kappa \dot{q}^{n+\gamma} + b_\gamma^\kappa q^{n+\gamma} - \frac{\partial \dot{f}^\kappa}{\partial q^i}\dot{q}^i - \frac{\partial \dot{f}^\kappa}{\partial \dot{q}^i}m^i - \frac{\partial \dot{f}^\kappa}{\partial t}.$$

Система (13) имеет решение:

$$\lambda_\theta = \alpha_{\theta\kappa}\alpha^\kappa, \tag{14}$$

где $\alpha_{\theta\kappa}$ — матрица, обратная $\alpha^{\kappa\theta}$: $\alpha_{\theta\kappa} = \left(\frac{\partial \dot{f}^\kappa}{\partial \dot{q}^k}f^{k\eta}\right)^{-1}$, а α^κ определяется суммой слагаемых $\alpha^\kappa = \alpha^{\kappa(0)} + \alpha^{\kappa(1)} + \ldots$, распределённых по степеням переменных $q^{n+\mu}$, $\dot{q}^{n+\kappa}$: $\alpha^{\kappa(0)} = -\frac{\partial \dot{f}^\kappa}{\partial q^i}\dot{q}^i - \frac{\partial \dot{f}^\kappa}{\partial \dot{q}^i}m^i - \frac{\partial \dot{f}^\kappa}{\partial t}$. При множителях λ_κ, определённых таким образом, уравнения связей (1) исходной системы оказываются справедливыми для решений $q^i = q^i(t)$ дифференциальных уравнений динамики управляемой системы при $q^{n+\mu} = 0$, $\dot{q}^{n+\kappa} = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = \dot{q}^i, \quad \frac{\mathrm{d}\dot{q}^i}{\mathrm{d}t} = m^i + f^{i\kappa}\alpha_{\theta\kappa}\alpha^\kappa. \tag{15}$$

Отклонения решений системы (15) от уравнений связей (1) описываются уравнениями возмущений связей

$$\frac{\mathrm{d}q^{n+\mu}}{\mathrm{d}t} = \dot{q}^{n+\mu}, \quad \frac{\mathrm{d}\dot{q}^{n+\kappa}}{\mathrm{d}t} = k^{\kappa}_{\gamma}\dot{q}^{n+\gamma} + b^{\kappa}_{\gamma}q^{n+\gamma}. \tag{16}$$

Необходимым условием стабилизации связей (1) является асимптотическая устойчивость соответствующего интегрального многообразия системы (15). Пусть уравнения (16) являются линейными относительно переменных $q^{n+\mu}$, $\dot{q}^{n+\kappa}$. В силу равенств (2) устойчивость интегрального многообразия в новых переменных (с учётом избыточных) можно рассматривать как устойчивость по части переменных [5] уравнений (15)–(16). Если в пространстве переменных q^i, $\dot{q}^j$ определить расстояние до интегрального многообразия (1) величиной

$$||z||, \quad z = \left(z^1, \ldots, z^{m+r}\right), \quad z^{\mu} = q^{n+\mu}, \quad z^{m+\kappa} = \dot{q}^{n+\kappa},$$

то об устойчивости многообразия (1) можно судить по свойствам устойчивости тривиального решения $q^{n+\mu} = 0$, $\dot{q}^{n+\kappa} = 0$ системы (16).

Если в выражениях (3)–(5) коэффициенты $a_{\beta\gamma}$, $b_{\beta\gamma}$, $c_{\beta\gamma}$ — постоянные, то система (16) состоит из линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В этом случае судить об устойчивости её тривиального решения можно по корням характеристического уравнения $\det\left(\mu^2\delta^{\eta}_{\kappa} - \mu b^{\eta}_{\kappa} - k^{\eta}_{\kappa}\right) = 0$. Если все корни имеют отрицательные действительные части, то интегральное многообразие устойчиво асимптотически.

Для исследования устойчивости тривиального решения в общем случае можно воспользоваться методом функций Ляпунова [6]. Если функция $V = V\left(q^s, \dot{q}^k, q^{n+\mu}, \dot{q}^{n+\kappa}, t\right)$ является положительно определённой по переменным $q^{n+\mu}$, $\dot{q}^{n+\kappa}$, а её производная, вычисленная в соответствии с уравнениями (15), (16),

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j}m^j + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j}f^{j\theta}\alpha_{\theta\kappa}\alpha^{\kappa} + \frac{\partial V}{\partial q^{n+\mu}}\dot{q}^{n+\mu} + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^{n+\kappa}}k^{\kappa}_{\gamma}\dot{q}^{n+\gamma} + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^{n+\kappa}}b^{\kappa}_{\gamma}q^{n+\gamma} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

отрицательно определённая функция, и функции V, $q^{n+\mu}$, $\dot{q}^{n+\kappa}$ допускают бесконечно малый высший предел [6], то интегральное многообразие (1) системы (15) устойчиво асимптотически. Учитывая тождество $m^j + f^{j\theta}\alpha_{\theta\kappa}\alpha^{\kappa(0)} \equiv 0$, последнее равенство принимает вид:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial q^i}\dot{q}^i + \sum_s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j}f^{j\theta}\alpha_{\theta\kappa}\alpha^{\kappa(s)} + \frac{\partial V}{\partial q^{n+\mu}}\dot{q}^{n+\mu} + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^{n+\kappa}}k^{\kappa}_{\gamma}\dot{q}^{n+\gamma} + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^{n+\kappa}}b^{\kappa}_{\gamma}q^{n+\gamma} + \frac{\partial V}{\partial t},$$

$$s \geqslant 1.$$

В качестве функции Ляпунова можно также использовать положительно определённую квадратичную форму относительно переменных $q^{n+\mu}$, $\dot{q}^{n+\kappa}$:

$$2V = s_{\mu\nu}q^{n+\mu}q^{\nu} + 2p_{\mu\kappa}q^{n+\mu}\dot{q}^{n+\kappa} + l_{\kappa\eta}\dot{q}^{n+\kappa}\dot{q}^{\eta}. \tag{17}$$

Коэффициенты $s_{\mu\nu}$, $p_{\mu\kappa}$, $l_{\kappa\eta}$ предполагаются непрерывными, дифференцируемыми, ограниченными функциями переменных q^i, $\dot{q}^j$, t.

Производная функции V (17) приводится к виду

$$\dot{V} = s'_{\mu\nu}q^{n+\mu}q^{\nu} + p'_{\mu\kappa}q^{n+\mu}\dot{q}^{n+\kappa} + l'_{\kappa\eta}\dot{q}^{n+\kappa}\dot{q}^{\eta},$$

где $s'_{\mu\nu}$, $p'_{\mu\kappa}$, $l'_{\kappa\eta}$ определяются через $a_{\beta\gamma}$, $b_{\beta\gamma}$, $c_{\beta\gamma}$, k^{κ}_{γ}, b^{κ}_{γ} уравнений (3), (4), (5), (16). Тогда для исследования устойчивости тривиального решения можно использовать критерий Сильвестра, в соответствии с которым можно судить о знакоопределённости V и $\dot{V}$.

4. Заключение

Учёт возможных отклонений от уравнений связей управляемых систем на этапе составления уравнений позволяет решить задачу стабилизации связей. Для этого уравнения возмущений связей должны быть построены в соответствии с требованием асимптотической устойчивости по отношению к уравнениям связей.

Приведённые модели решения реализованы автором в системе символьных вычислений Maple и могут быть использованы для решения задач управления программным движением.

Литература

1. *Layton R. A.* Principles of Analytical System Dynamics. — N.Y.: Springer, 1998. — 158 p.
2. *Мухарлямов Р. Г.* О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Дифф. уравнения. — № 3, вып. 39. — 2003. — С. 343–353.
3. *Мухарлямов Р. Г.* О численном решении дифференциально-алгебраических уравнений // Вестник РУДН. Сер. Прикладная математика и информатика. — № 1. — 1999. — С. 33–37.
4. *Горшков Е. А.* Построение уравнений динамики управляемой системы // Вестник РУДН, сер. Прикладная математика и информатика. — № 3–4. — 2007. — С. 20–24.
5. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. — М.: Наука, 1987. — 256 с.
6. *Мухарлямов Р. Г.* О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Дифференциальные уравнения. — Т. 5, № 4. — 1969. — С. 688–699.

UDC 531.36, 590.86

Research of Stability of Integral Variety for Perturbation of Constraints with Constant Coefficients

E. A. Gorshkov

Department of Theoretical Mechanics
Poeples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

The method of constructing of mathematical model of dynamics of operated mechanical system is offered. The algorithm of updating of the equations of dynamics which allows to solve a problem of stabilization of communications is under construction and to provide demanded accuracy of the numerical decision of corresponding system of the differential–algebraic equations describing imposed on communication system, its kinematics and dynamics. The offered method can be used for research of dynamics of systems of the various physical nature.