Вестник РУДН Серия *Математика. Информатика. Физика.* № 4. 2008. С. 30–36

УДК 531.31:62-56

Квазиинвариантная стабилизация преследующего движения манипулятора при пропорциональной навигации

И. А. Мухаметзянов

Кафедра теоретической механики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Предложена процедура построения множества дифференциальных уравнений регулятора, обеспечивающего квазиинвариантную стабилизацию преследующего движения манипулятора при пропорциональной навигации.

Ключевые слова: инвариантность, квазиинвариантность, пропорциональная навигация, стабилизация, переходный процесс.

1. Постановка задачи

Рассмотрим манипулятор на подвижном основании, состоящий из цепочки n пар тел T'_ν, T''_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), в которой T'_ν вращается относительно тела $T''_{\nu-1}$ предыдущей пары вокруг цилиндрического шарнира $o_{\nu-1}$, а T''_ν перемещается относительно T'_ν по заданной направляющей, совпадающей с единичным вектором i_ν.

Введём обозначения

$$I_\nu = o_{\nu-1}D_\nu, \quad s_\nu = D_\nu o_\nu,$$

где D_ν — начало отсчёта s_ν-го перемещения тела T''_ν относительно T'_ν. Заметим, что $|I_\nu|$ — постоянные.

В точку o_n последнего тела T''_n поместим центр схвата, жёстко связанного с единичными ортогональными векторами k_1, k_2, k_3.

Положение тела — основания манипулятора относительно неподвижной системы координат $0\xi\eta\zeta$ — определяется законом движения $r_0(t)$ точки o_0 крепления первого шарнира манипулятора к основанию и тремя углами Эйлера, которые будем считать известными функциями от времени. Вектор угловой скорости основания обозначим через $\omega_0(t)$.

Будем считать, что вращение тел T'_ν вокруг шарниров $o_{\nu-1}$ и перемещения тел T''_ν относительно T'_ν осуществляется двигателями, помещёнными со своими редукторами в точках $o_{\nu-1}$, D_ν. Следовательно, управление манипулятором осуществляется $2n$ двигателями.

В программу движения схвата заложим два требования: вектор скорости v центра схвата должен быть направлен по оси схвата с ортом k_3, а компонента угловой скорости вращения ω_v вектора скорости v на плоскости, перпендикулярной линии визирования, должна быть пропорциональна вектору угловой скорости ω_e этой линии, направленной от центра схвата o_n на преследуемую цель со скалярным коэффициентом пропорциональности b.

При выполнении второго требования движение центра схвата будет осуществлено по принципу пропорциональной навигации [1].

Эти требования можно выразить уравнениями

$$k_i \cdot v = 0, \quad e_i \cdot \omega_v = b(\omega_e \cdot e_i), \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

Статья поступила в редакцию 29 апреля 2008 г.
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (06-01-00664) и Министерства образования и науки РФ.

где $(\cdot)$ — знак скалярного произведения; e_1, e_2 — единичные ортогональные векторы, лежащие в плоскости, перпендикулярной линии визирования.

Заметим, что при выполнении этих условий вектор v будет направлен по оси схвата с ортом k_3. Следовательно, вектор ω_v угловой скорости вращения вектора v будет равен сумме компонентов вектора угловой скорости схвата на оси с ортами k_1 и k_2.

При таком принципе навигации угловая скорость ω_e линии визирования и её производные по t считаются доступными измерению в каждый момент времени.

Если вектор o_0o_n выразить через векторы I_ν и s_ν, то первое из условий (1.1) примет вид

$$\left[\dot r_0(t) + \sum_{\nu=1}^{n}(\dot I_\nu + \dot s_\nu)\right]\cdot k_i = 0, \quad i = 1,2. \tag{2}$$

Движение манипулятора зададим уравнениями Лагранжа

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot x} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q(p) - c\dot x + M_0 u + R_0\delta, \tag{3}$$

где x — $2n$-мерный вектор обобщённых координат — углов поворотов φ_ν вокруг шарниров и перемещений s_ν, u — r-мерный вектор управляющих сигналов, R_0 — $2n$-мерная матрица распределения между каналами $2n$-мерного вектора $\delta(t, c_1, c_2, \ldots, c_{2n})$ возмущений, являющегося общим решением уравнения

$$\dot\delta = f_0(\delta, t), \tag{4}$$

$Q(p)$ — вектор обобщённых сил тяжести и других неуправляющих сил, T — кинетическая энергия манипулятора

$$T = \frac{1}{2}\dot x^T A_0(x,t)\dot x + \tilde b^T(x,t)\dot x + \tilde b_0(x,t),$$

$$c = \operatorname{diag}(c_1\tilde k_1^2, c_2\tilde k_2^2, \ldots, c_{2n}\tilde k_{2n}^2), \quad M_0 = \tilde k\alpha, \quad R_0 = \tilde k\gamma,$$

c_ν — коэффициент сопротивления на валу двигателей, $\tilde k_\nu$ — передаточные числа редукторов, α — $(2n\times r)$-мерная матрица коэффициентов пропорциональности между управляющими моментами двигателей и управляющими сигналами u_ν, $\tilde k = \operatorname{diag}(\tilde k_1, \tilde k_2, \ldots, \tilde k_{2n})$, γ — $(2n\times 2n)$-мерная матрица, $r \leqslant 2n$.

Уравнение (1.3) можно представить в виде

$$\ddot x = B(\dot x, x, t) + Mu + R\delta, \tag{5}$$

где

$$B = A_0^{-1}\left[\frac{1}{2}\dot x^T\frac{\partial A_0}{\partial x}\dot x + \left(\frac{\partial\tilde b}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}A_0}{\mathrm{d}t} - c\right)\dot x - \frac{\mathrm{d}\tilde b}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\tilde b_0}{\partial x} + Q(p)\right],$$

$$M = A_0^{-1}M_0, \quad R = A^{-1}R_0.$$

Предполагается, что матрица R неособенная.

Требования (1) с учётом (2) представим в виде

$$\omega_1(\dot x, x, t) = 0, \quad \omega_2(\dot x, x, t) = 0, \tag{6}$$

где ω_1, ω_2 — двумерные векторы с элементами

$$\omega_1^i = e_i^T(\omega_v - b\omega_e), \quad \omega_2^i = k_i^T\left[\sum_{\nu=1}^{n}(\dot I_\nu + \dot s_\nu) + \dot r_0\right], \quad i = 1,2. \tag{7}$$

Теперь задачу можно сформулировать следующим образом: построить множество дифференциальных уравнений регуляторов, определяющих изменения вектора u, обеспечивающих интегральность многообразия (6) для системы (5) и асимптотическую устойчивость «в большом» этого многообразия при любых ограниченных случайных значениях постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$, входящих в выражение вектора возмущения $\delta(t, c_1, c_2, \ldots, c_{2n})$, являющегося общим решением уравнения (4).

2. Метод решения задачи

Пусть дана система дифференциальных уравнений движения объекта управления в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varphi_1(x,u,t) + R(x,t)\delta, \\ \dot{x_2} &= \varphi_2(x,u,\delta,t), \end{aligned} \tag{8}$$

где x_1, φ_1, δ — s-мерные, x_2, φ_2 — $(n-s)$-мерные, u — r-мерный, $x(x_1,x_2)$ — n-мерный векторы; R — $(s\times s)$-мерная матрица.

Предполагается, что $\det\|R\|\neq 0$ в некоторой ограниченной области G.

Требуется построить множество дифференциальных уравнений регуляторов, определяющих изменения вектора управления u, обеспечивающих интегральность и асимптотическую устойчивость «в большом» $(n-k)$-мерного программного многообразия

$$\omega(x,t) = 0 \tag{9}$$

системы (8), подверженной действию возмущений $\delta(c,t)$, при любых случайных значениях конечномерного ограниченного постоянного вектора c.

Пусть вектор возмущений $\delta(t,c_1,c_2,\ldots,c_s)$ в системе (8) является общим решением уравнения

$$\dot{\delta} = f_0(\delta,t)$$

с постоянными интегрирования $c_1,c_2,\ldots,c_s$.

Например, когда система (8) возмущается $(2s_1+1)$-мерным вектором $\delta(\delta_0,\delta_1,\ldots,\delta_{2s_1})$ с элементами

$$\delta_0 = c_0, \quad \delta_i = c_i\sin p_i t, \quad \delta_j = c_j\cos p_i t,$$

$$(i = 1,2,\ldots,s_1; \quad j = s_1+1,\ldots,2s_1),$$

компоненты вектор-функции $f_0(\delta,t)$ можно задавать в виде

$$f_{00} = 0, \quad f_{0i} = \delta_i p_i \operatorname{ctg} p_i t, \quad f_{0j} = -\delta_j p_j \operatorname{tg} p_i t,$$

где $p_i > 0$ — заданные постоянные, c_0, c_i, c_j — случайные постоянные. Заметим, что эти возмущения, в частности, могут задаваться $(2s_1+1)$ членами ряда Фурье при разложении семейства произвольных периодических функций с любым заданным периодом.

Условие $\det\|R\|\neq 0$ в области G позволяет выражать вектор δ с помощью первого уравнения (8) в виде

$$\delta = R^{-1}[\dot{x}_1 - \varphi_1(x,t)]. \tag{10}$$

Дифференцируя (8) по t и подставляя в них (9) и $\dot{\delta} = f_0(\delta,t)$, где δ заменяется правой частью (10), получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \dot{x}_1 - \varphi_1 + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}R^{-1}(\dot{x}_1 - \varphi_1), \\ \ddot{x}_2 &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\delta}f_0 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}. \end{aligned} \tag{11}$$

Эти уравнения можно представить в виде

$$\ddot{x} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\dot{u} + \tilde{f}(\dot{x},x,u,t),$$

где $\varphi = \begin{Vmatrix}\varphi_1 \\ \varphi_2\end{Vmatrix}$; $\tilde{f}$ — n-мерная вектор-функция, составленная из элементов правых частей (11), не содержащих вектора $\dot{u}$.

Дифференцируя $\omega(x,t)=0$ в силу этих уравнений два раза по t и приравнивая правую часть некоторой вектор-функции Φ, получим

$$\Omega\dot{u} = Q, \tag{12}$$

где

$$\Omega = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \quad Q = -\frac{\partial\omega}{\partial x}\tilde{f} - \frac{\partial\dot{\omega}}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial\dot{\omega}}{\partial t} + \Phi(\dot{\omega},\omega,\dot{x},x,u,t),$$

$\Phi(\dot{\omega},\omega,\dot{x},x,u,t)$ — произвольная вектор-функция, удовлетворяющая условию $\Phi(0,0,\dot{x},x,u,t)\equiv 0$ и обладающая способностью обеспечивать асимптотическую устойчивость «в большом» тривиального решения $\omega=0$, $\dot{\omega}=0$ уравнения [2]

$$\ddot{\omega} = \Phi(\dot{\omega},\omega,\dot{x},x,u,t). \tag{13}$$

Предположим, что $\det\|\Omega\Omega^T\| \neq 0$ в области G. В этом случае общее решение системы (12), состоящей из k конечных уравнений относительно r компонентов вектора $\dot{u}$, при $r \geqslant k$ имеет вид [3]

$$\dot{u} = \Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}Q + [E - \Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}\Omega]\tilde{u}, \tag{14}$$

где E — единичная $(r\times r)$-матрица, $\tilde{u}$ — произвольная r-мерная вектор-функция.

Полученное уравнение (14) является искомым множеством дифференциальных уравнений регуляторов объекта управления (8).

Необходимо отметить, что от подходящего выбора произвольной вектор-функции Φ в правой части (13) зависит качество переходного процесса в системе (8), (14). В связи с этим приведём один из возможных способов выбора функции Φ, позволяющего наделить систему необходимым качеством переходного процесса. С этой целью, умножая (13) на некоторую симметрическую определённо-положительную $(k\times k)$-матрицу $A(x,t)$, получим

$$A\ddot{\omega} = A\Phi. \tag{15}$$

Введём замену [4]

$$y = \dot{\omega} - f(\omega,t), \quad f(0,t)\equiv 0, \tag{16}$$

где $f(\omega,t)$ — произвольная k-мерная вектор-функция с ограниченными и дифференцируемыми в области G элементами, допускающая бесконечно малый высший предел по модулю.

Умножая уравнение (15) скалярно на y, получим

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y^TAy) = y^TA\Phi. \tag{17}$$

Если вектор $A\Phi$ в правой части этого уравнения выбрать в виде [4]

$$A\Phi = -Dy - F\omega - A\left(\frac{\partial f}{\partial\omega}\right)^T y + A\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\omega}\right)^T f + \frac{\partial f}{\partial t}\right] - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}y, \tag{18}$$

то (2.9) приводится к уравнению

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -y^TDy + \left(f^TF + \omega^T\frac{\dot{F}}{2}\right)\omega, \tag{19}$$

где D, F— некоторые произвольно выбираемые симметрические определённо-положительные матрицы. $V = y^TAy + \omega^TF\omega$ — определённо-положительная функция Ляпунова, допускающая бесконечно малый высший предел. Следовательно, при достижении определённой отрицательности функции $(f^TF{+}\omega^T\dot{F}/2)\omega$

соответствующим выбором матрицы F и функции f, правая часть (19) будет определённо-отрицательной по y, ω и при этом программное многообразие будет асимптотически устойчивым «в большом» в области G. В частности, при $f = -\omega$ вектор (18) имеет вид

$$A\Phi = -Dy - F\omega - A\dot{\omega} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}y.$$

Здесь $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$ предполагается ограниченной в G. Теперь из (18) получим

$$\Phi = -A^{-1}(Dy + F\omega) - \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)^T y + \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)^T f + \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}A^{-1}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}y. \tag{20}$$

Для оценки качества переходного процесса, интегрируя обе части (19), получим

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \left[y^T D y - \left(f^T + \omega^T \frac{\dot{F}}{2} \right) \omega \right] \mathrm{d}t = \frac{1}{2} V_0, \quad V_0 = V(t_0). \tag{21}$$

Это равенство является интегральным критерием качества переходного процесса. Имея свободу выбора матриц D, F, A и функции f, подынтегральному выражению и функции V можно придать нужную структуру с необходимыми весовыми элементами.

При задании конкретного числового значения V_0 уравнение

$$\frac{1}{2}\left(y_0^T A y_0 + \omega_0^T F \omega_0 \right) = V_0 \tag{22}$$

в $2k$-мерном пространстве $\dot{\omega}_0$, ω_0 описывает эллипсоид, поверхность которого является геометрическим местом точек, обладающих следующим свойством. Для начавшихся из них движений имеет место интегральный критерий качества переходного процесса (21), а для всех начальных значений $\dot{\omega}_0$, ω_0 внутри эллипсоида (22) справедлива оценка качества переходного процесса

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \left[y^T D y - \left(f^T + \omega^T \frac{\dot{F}}{2} \right) \omega \right] \mathrm{d}t < \frac{1}{2} V_0, \quad V_0 = V(t_0),$$

где V_0 — значение $V(t)$ на поверхности (22).

3. Построение множества уравнений регулятора преследующего манипулятора

Предполагая, что $\det \|R\| \neq 0$, вектор δ с помощью уравнения (5) представим в виде

$$\delta = R^{-1}(\ddot{x} - B - Mu). \tag{23}$$

Дифференцируя по t (5), получим

$$\dddot{x} = M\dot{u} + \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}u + \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} + R\dot{\delta} + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\delta. \tag{24}$$

Заменяя $\dot{\delta}$, δ в правой части этого уравнения их значениями (4) и (23), получим

$$\dddot{x} = M\dot{u} + \tilde{f}_0(\ddot{x}, \dot{x}, x, u, t), \tag{25}$$

где $\tilde{f}_0$ — сумма членов, не содержащих вектора $\dot{u}$.

Таким образом, вместо исходной системы (5) получили систему (3.3) более высокого порядка, не содержащую явно вектора возмущений δ.

Теперь потребуем, чтобы многообразие (6) было интегральным многообразием этого уравнения (25). Для этого дифференцируем два раза по t (6) и приравниваем результат к некоторой вектор-функции $\Phi(\dot{\omega}, \omega, u, \ddot{x}, \dot{x}, x, t)$, обладающей свойством $\Phi(0, 0, u, \ddot{x}, \dot{x}, x, t) \equiv 0$ и способностью обеспечивать асимптотическую устойчивость «в большом» многообразия (6). Здесь $\omega = \left\| \begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{matrix} \right\|$.

При этом необходимо использовать известные формулы Пуассона

$$\dot{I}_\nu = \left(\omega_0 + \sum_{\eta=1}^{\nu} \omega'_\eta \right) \times I_\nu, \quad \dot{k}_i = \left(\omega_0 + \sum_{\eta=1}^{n} \omega'_\eta \right) \times k_i,$$
$$\frac{\mathrm{d}i_\nu}{\mathrm{d}t} = \left(\omega_0 + \sum_{\eta=1}^{\nu} \omega'_\eta \right) \times i_\nu, \quad \dot{s}_\nu = \dot{s}_\nu i_\nu + s_\nu \frac{\mathrm{d}i_\nu}{\mathrm{d}t},$$

где $\omega'_\eta = \dot{x}_\eta j_\eta$, j_η — орты векторов угловых скоростей звеньев манипулятора друг относительно друга и выражение вектора ω_v

$$\omega_v = \sum_{\mu=1}^{2} k_\mu^T \left(\omega_0 + \sum_{\eta=1}^{n} \dot{x}_\eta j_\eta \right) k_\mu.$$

После этой процедуры дифференцирования (6) получим

$$\ddot{\omega} = A^T M \dot{u} + \tilde{f}(\ddot{x}, \dot{x}, x, u, t). \tag{26}$$

где $\tilde{f}$ — сумма членов, не содержащих вектора $\dot{u}$; A^T — $(4 \times 2n)$-мерная матрица с элементами

$$a_{i\nu} = e_i^T \sum_{\mu=1}^{2} k_\mu^T j_\nu k_\mu, \quad a_{i,n+\nu} = 0,$$
$$a_{2+i,\nu} = \left[j_\nu \times \sum_{\eta=\nu}^{n} (I_\nu + s_\nu \right]^T k_i, \quad a_{2+i,n+\nu} = i_\nu^T k_i,$$
$$i = 1, 2; \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Приравнивая правую часть уравнения (26) вышеупомянутой функции Φ, получим

$$\Omega \dot{u} = Q, \tag{27}$$

где

$$\Omega = A^T M, \quad Q = \Phi(\dot{\omega}, \omega, u, \ddot{x}, \dot{x}, x, t) - \tilde{f}(\ddot{x}, \dot{x}, x, u, t).$$

При этом функция Φ должна обеспечивать асимптотическую устойчивость «в большом» тривиального решения $\dot{\omega} = 0$, $\omega = 0$ уравнения (13) и необходимое качество переходного процесса. Выбор функции, обладающей этими свойствами, изложен в разделе 2. Предположим, что $\det \|\Omega\Omega^T\| \neq 0$. Тогда искомое множество уравнений регулятора выражается в виде (14).

Литература

1. *Кан В. Л., Кельзон А. С.* Теория пропорциональной навигации. — Л.: Судостроение, 1965. — С. 423.

2. *Мухаметзянов И. А.* Построение множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по заданной программе. Труды Университета дружбы народов. Теоретическая механика. — М.: Изд-во УДН, 1963. — Т. 1, С. 52–55.
3. *Мухаметзянов И. А.* Построение уравнений программных движений // Автоматика и телемеханика. — № 10. — 1972. — С. 16–23.
4. *Мухаметзянов И. А.* Построение систем с асимптотически устойчивыми программными связями // ПММ. — Т. 65, вып. 5. — 2001. — С. 822–830.

UDC 531.31:62-56

The Quasiinvariant Stabilization of a Pursuit Motion of a Manipulator by Proportional Navigation

I. A. Mukhametzyanov

Department of Theoretical Mechanics
People's Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

The procedure of constructing a differential equations set for a regulator providing quasi-invariant stabilization of a manipulator with proportional navigation is proposed.