УДК 517.95

О размерностях ядра и коядра эллиптического оператора с разрывными коэффициентами

А. А. Дудкина

Кафедра дифференциальных уравнений и математической физики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

Для эллиптического оператора в дивергентной форме с разрывными кусочно-гладкими коэффициентами исследуются вопросы существования и единственности обобщённых решений краевых задач с дивергентной правой частью в классе с первыми производными из L_p для ограниченных плоских областей с гладкими и негладкими границами. Вычисляются размерности ядра и коядра эллиптического оператора во всей шкале значений показателя $p \in (1, \infty)$ в зависимости от параметров особых точек.

Ключевые слова: эллиптический оператор, краевая задача, задача Штурма–Лиувилля, размерности ядра и коядра эллиптического оператора.

1. Введение

Для ограниченных плоских областей $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно непрерывно дифференцируемыми границами рассматриваются краевые задачи для эллиптического уравнения в дивергентной форме

$$\operatorname{div}(A\nabla u) = \operatorname{div} F, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

с вещественной симметричной кусочно-постоянной матрицей $A = A(x)$. Предполагается, что линии разрыва $\{\Gamma_k\}$ коэффициентов $\{A_{ij}\}$ являются кусочно непрерывно дифференцируемыми кривыми, которые делят область Ω на конечное число подобластей $\{\Omega_m\}$. На каждой линии разрыва коэффициентов задаются обычные условия сопряжения, т. е. условия непрерывности решения u и его конормальной производной $\nu_A = A\nu$, где ν — единичная нормаль к кривой Γ_k, а именно,

$$\begin{cases} u|_{\Gamma_k^-} = u|_{\Gamma_k^+}\,, \\ (A_1\nabla u, \nu)|_{\Gamma_k^-} = (A_2\nabla u, \nu)|_{\Gamma_k^+}\,. \end{cases} \tag{2}$$

Краевые задачи рассматриваются в обобщённой постановке в классе $\nabla u \in L_p(\Omega; \mathbb{R}^2)$, $p \in (1, \infty)$ с заданной вектор-функцией $F \in L_p(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ в смысле соответствующего интегрального тождества

$$\int\limits_{\Omega} (A\nabla u, \nabla v)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega} (F, \nabla v)\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega). \tag{3}$$

Точки пересечения кривых $\{\Gamma_k\}$ с границей $\partial\Omega$ будут особыми точками рассматриваемых обобщённых решений. Случай, когда точки пересечения кривых $\{\Gamma_k\}$ с границей $\partial\Omega$ являются точками касания, требует особого подхода и в настоящей работе не рассматривается. Множество всех особых точек предполагается конечным. Подобные задачи изучались в работах [1–4]. В случае гладких непересекающихся линий разрыва коэффициентов рассматриваемая задача исследовалась Е. М. Ильиным [5, 6] в ограниченной области Ω при $p = 2$ в классе решений с односторонней гладкостью $W_2^2(\Omega)$.

Статья поступила в редакцию 30 мая 2008 г.

Как обычно, через $L^1_p(\Omega)$ обозначено пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{L^1_p(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L_p(\Omega;\mathbb{R}^2)} + \|u\|_{L_p(K)}, \tag{4}$$

где K — некоторый заданный круг из Ω. Очевидно, что при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ пространство Соболева является банаховым пространством. Через $\overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega)$ обозначим замыкание в пространстве Соболева $L^1_p(\Omega)$ его подпространства $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$. Для области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$ пространство $L^1_p(\Omega)$ допускает также конструктивное определение

$$\overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega) = \{u \in L^1_p(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\},$$

и норма (4) эквивалентна следующей норме

$$\|u\|_{L^1_p(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^1_p(\Omega;\mathbb{R}^2)}. \tag{5}$$

Обозначим замыкание в $L_p(\Omega)$ его подпространства $\overset{\circ}{G}{}^\infty(\Omega) = \{u = \nabla\psi : \psi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)\}$ через $\overset{\circ}{G}_p(\Omega)$ и заметим, что $\overset{\circ}{G}_p(\Omega) = \{v = \nabla u : u \in \overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega)\}$.

Обобщённая постановка задачи (1) эквивалентна системе первого порядка

$$\begin{cases} A\nabla u + v = f, \\ \operatorname{div} v = 0, \end{cases} \tag{6}$$

эллиптической по Дуглису–Ниренбергу, где $u \in \overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega)$ и уравнение $\operatorname{div} v = 0$ выполнено в смысле интегрального тождества

$$\int\limits_\Omega (v, \nabla\psi)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \psi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega). \tag{7}$$

Это означает, что обобщённая постановка задачи (1) эквивалентна разложению пространства векторных полей $L_p(\Omega;\mathbb{R}^2)$ в прямую сумму

$$L_p(\Omega;\mathbb{R}^2) = J_p(\Omega) \oplus A\,\overset{\circ}{G}_p(\Omega) \tag{8}$$

двух замкнутых подпространств

$$J_p(\Omega) = \left\{ v \in L_p(\Omega;\mathbb{R}^2) : \int\limits_\Omega (v, \nabla\psi)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\psi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega) \right\},$$

$$A\,\overset{\circ}{G}_p(\Omega) = \left\{ w = A\nabla u : u \in \overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega) \right\}.$$

Эллиптический оператор $L : J_p(\Omega) \times \overset{\circ}{G}_p(\Omega) \to L_p(\Omega;\mathbb{R}^2)$ определим с помощью равенства

$$L\{v, \nabla u\} = v + A\nabla u \quad \forall \{v, A\nabla u\} \in J_p(\Omega) \times \overset{\circ}{G}_p(\Omega) \to L_p(\Omega;\mathbb{R}^2).$$

Область значений оператора L будем называть областью значений эллиптического оператора, соответствующего обобщённой постановке задачи (1). Таким образом,

$$R(L) = A\,\overset{\circ}{G}_p + J_p, \quad \nabla u \in \overset{\circ}{G}_p(\Omega),\ v \in J_p(\Omega),\ f \in L_p(\Omega;\mathbb{R}^2)$$

совпадает с $L_p(\Omega;\mathbb{R}^2)$ тогда и только тогда, когда выполнено (8). При этом ядро оператора

$$N(L) = J_p(\Omega) \cap A \overset{\circ}{G}_p (\Omega)$$

можно отождествить с ядром эллиптического оператора, соответствующего задаче (1), совпадающим с пространством $\{u \in \overset{\circ}{L}{}_p^1 (\Omega) : \nabla u \in N(L)\}$. Это означает, в частности, что разложение в прямую сумму (8) эквивалентно однозначной разрешимости задачи (1) в классе $\overset{\circ}{L}{}_p^1 (\Omega)$.

В случае одинаковой знакоопределённости всех матриц $A_i = A|_{\Omega_i}$ мы вычисляем размерности ядра и коядра рассматриваемого эллиптического оператора в смысле соответствующей обобщённой постановки во всей шкале значений показателя $p \in (1, \infty)$ в зависимости от геометрии подобластей Ω_i и параметров особых точек. Будем предполагать, что кусочно-постоянные коэффициенты имеют вид $A|_{\Omega_i} = \varkappa_i E$, где E — единичная матрица, $\varkappa_i$ — постоянный коэффициент, $i = 1, \ldots, I$, $I \geqslant 1$. Наличие разрыва означает, что значения $\varkappa_i$ по разные стороны разрыва не равны друг другу. Отметим, что не имеющий прикладного значения случай разной знакоопределённости матриц A_m существенно сложнее естественного случая одинаковой знакоопределённости.

Рассматриваемые задачи описывают, в частности, стационарную теплопроводность многокомпонентных твёрдых тел, например, композитов, когда каждая компонента имеет свой коэффициент теплопроводности, а поверхности разрыва коэффициента теплопроводности не являются гладкими [7]. Даже если смежные коэффициенты теплопроводности отличаются сколь угодно мало, негладкости поверхностей разрыва могут порождать особенности решений, а именно, неограниченность градиента решения. Другим приложением является теория упругости многокомпонентных материалов, например, задача о равновесии неоднородной многокомпонентной мембраны.

2. Модельные задачи

Полученные результаты проиллюстрируем на простых примерах. Начнём со случая, когда линия разрыва коэффициентов образует с гладкой границей угол $\beta \in (0, \pi)$. Для обоснования метода Фурье, в случае гладких и негладких линий разрыва коэффициентов с разрывами и без разрывов, необходимо решить следующую задачу Штурма–Лиувилля, полагая $\varkappa_1 = k$ и $\varkappa_2 = 1$ без какого-либо ограничения общности

$$L\Phi = \lambda\Phi, \quad \Phi \in D_L \tag{9}$$

для дифференциального оператора $L = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}$ с областью определения

$$\begin{aligned} D_L = \{&u \in L_2(\pi - \beta, -\beta) : u \in W_2^2(0, \pi - \beta), u \in W_2^2(-\beta, 0), \\ &u(+0) = u(-0), u'(+0) = ku'(-0), u(-\beta) = u(\pi - \beta) = 0\}. \end{aligned}$$

Рассматривается весовое пространство $L_2^{\beta,k}(\pi - \beta, -\beta)$. Будем считать, что $L_2^{\beta,k}$, в случае $k > 0$, это вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_k = k \int\limits_0^{\pi-\beta} uv \,\mathrm{d}x + \int\limits_{-\beta}^{0} uv \,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Оператор $L : D_L \subset L_2^{\beta,k}(\pi - \beta, -\beta) \to L_2^{\beta,k}(\pi - \beta, -\beta)$ самосопряжённый. Система собственных функций оператора L образует ортогональный базис в весовом пространстве $L_2^{\beta,k}(\pi - \beta, -\beta)$.

Теорема 1. *При любых заданных $\beta \in (0, \pi/2)$ и при любых вещественных положительных $k < 1$ или отрицательных $k > -\beta/(\pi - \beta)$, а также при любых заданных $\beta \in (\pi/2, \pi)$ и при любых вещественных положительных $k > 1$ или отрицательных $k < -\beta/(\pi - \beta)$, в задаче Штурма–Лиувилля* (9) *существуют собственные числа $\lambda = -\mu^2$ с $\mu \in (0, 1)$.*

Доказательство. Собственные функции задачи (9) имеют вид

$$\Phi = \begin{cases} c_1 \cos \mu\varphi + c_2 \sin \mu\varphi, & \varphi \in (-\beta, 0), \\ c_3 \cos \mu\varphi + c_4 \sin \mu\varphi, & \varphi \in (0, \pi - \beta). \end{cases}$$

Из условий сопряжения при $\varphi = 0$ и граничных условий при $u = 0$ находим $c_1 = c_3$, $kc_2 = c_4$. Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} c_1 \cos(\pi - \beta)\mu + kc_2 \sin(\pi - \beta)\mu = 0, \\ c_1 \cos \mu\beta - c_2 \sin \mu\beta = 0, \end{cases}$$

определитель которой равен

$$\Delta = \operatorname{tg} \mu\beta + k \operatorname{tg}(\pi - \beta)\mu. \tag{11}$$

Приравнивая нулю этот определитель, получаем уравнение

$$\operatorname{tg} \mu\beta = -k \operatorname{tg}(\pi - \beta)\mu, \tag{12}$$

для определения μ.

В случае $k = 1$ корнями (12) будут все целые числа $\mu = n$. И в достаточно малой окрестности параметра $k = 1$ решение уравнения (12) единственно. По теореме о неявной функции это решение непрерывно зависит от параметра k в некоторой окрестности точки $k = 1$.

Пусть $k \neq 1$. Рассмотрим случай $\beta \in (0, \pi/2)$. Если $k < 1$, то уравнение (12) имеет единственный корень $\mu_1 \in (0, 1)$, т.к. ветвь $-k \operatorname{tg}(\pi - \beta)\mu$ при уменьшении параметра k будет уходить влево от точки $\mu = 1$, соответствующей корню при $k = 1$. Следовательно, точка пересечения двух ветвей соответствующих тангенсов будет иметь абсциссу меньше единицы. Если $k > 1$, то ветвь $-k \operatorname{tg}(\pi - \beta)\mu$ будет уходить вправо от точки $\mu = 1$, соответствующей корню при $k = 1$ и поэтому наименьший положительный корень в уравнении (12) $\mu > 1$ в случае $\beta \in (0, \pi/2)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\beta \in (\pi/2, \pi)$. Тогда с помощью аналогичных рассуждений приходим к выводу, что только при $k > 1$ уравнение (12) имеет единственный корень $\mu \in (0, 1)$. Таким образом, при любом вещественном положительном $k < 1$ в случае $\beta \in (0, \pi/2)$ и при любом вещественном положительном $k > 1$ в случае $\beta \in (\pi/2, \pi)$ уравнение (12) имеет единственный корень $\mu \in (0, 1)$.

Что касается отрицательных значений параметра k, то уравнение (12) имеет единственный корень $\mu \in (0, 1)$ в случае $\beta \in (0, \pi/2)$, если касательная в нуле к графику функции $\operatorname{tg} \mu\beta$ составляет больший угол с осью $O\mu$, чем касательная в нуле к графику функции $-k \operatorname{tg}(\pi - \beta)\mu$. А в случае $\beta \in (\pi/2, \pi)$ уравнение (12) имеет единственный корень $\mu \in (0, 1)$, если касательная в нуле к графику функции $\operatorname{tg} \mu\beta$ составляет меньший угол с осью $O\mu$, чем касательная в нуле к графику функции $-k \operatorname{tg}(\pi - \beta)\mu$.

Таким образом, при любом вещественном отрицательном $k > -\beta/(\pi - \beta)$ в случае $\beta \in (0, \pi/2)$ и при любом вещественном отрицательном $k < -\beta/(\pi - \beta)$ в случае $\beta \in (\pi/2, \pi)$ уравнение (12) имеет единственный корень $\mu \in (0, 1)$.

Теорема доказана. □

Теперь рассмотрим случай, когда линия разрыва коэффициентов подходит к негладкой границе. В качестве примера рассмотрим задачу Дирихле в секторе единичного круга, с раствором $\alpha + \beta < 2\pi$, где $\alpha, \beta > 0$ — углы между границей $\partial\Omega$ и линией разрыва коэффициентов в точке её пересечения с $\partial\Omega$. Граница представляет собой дугу единичной окружности, объединённую с двумя радиусами этой окружности, а линия разрыва коэффициентов тоже является радиусом и делит область Ω на две области: Ω_1 и Ω_2, матрицы в которых, соответственно, равны $A_1 = E$ и $A_2 = kE$. При сделанных предположениях верны следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть α, β — тупые углы. Тогда $\forall k > 0$ существует один корень $\mu \in (0,1)$, если выполнено одно из условий: $1 < \alpha/\beta < 2$ и $\alpha < \pi$, $1 < \beta/\alpha < 2$ и $\beta < \pi$, $\alpha/\beta > 2$ и $\alpha > \pi$, $\beta/\alpha > 2$ и $\beta > \pi$; существует два корня $\mu \in (0,1)$, если выполнено одно из условий: $1 < \alpha/\beta < 3$ и $\alpha > \pi$ при $|k| < -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$, $1 < \beta/\alpha < 3$ и $\beta > \pi$ при $|k| > -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$. А $\forall k < 0$ существует один корень $\mu \in (0,1)$, если выполнено одно из условий: $1 < \alpha/\beta < 2$ при $|k| > -\alpha/\beta$ или при $|k| < -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$, $1 < \beta/\alpha < 2$ при $|k| < -\alpha/\beta$ или при $|k| > -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$, $\alpha/\beta > 2$ при $|k| > -\alpha/\beta$, $\beta/\alpha > 2$ при $|k| < \alpha/\beta$; существует два корня $\mu \in (0,1)$, если выполнено одно из условий: $1 < \alpha/\beta < 2$ и $\alpha > \pi$ при $|k| < -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$, $1 < \beta/\alpha < 2$ и $\beta > \pi$ при $|k| > -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$.*

Теорема 3. *Пусть α, β — острые углы. Тогда $\forall k > 0$ корня меньше единицы не существует, а $\forall k < 0$ существует один корень $\mu \in (0,1)$, если выполнено одно из условий: $1 < \alpha/\beta < 2$ при $-\alpha/\beta < |k| < -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$, $1 < \beta/\alpha < 2$ при $-\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta < |k| < -\alpha/\beta$.*

Теорема 4. *Пусть α — острый угол, а β — тупой угол. Тогда $\forall k > 0$ существует один корень $\mu \in (0,1)$, если при $|k| < -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$ выполнено одно из условий: $1 < \beta/\alpha < 2$, $\beta/\alpha > 2$ и $\pi < \beta < 3\pi/2$; существует два корня $\mu \in (0,1)$, если $\beta/\alpha > 3$ и $\beta > 3\pi/2$ при $|k| < -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$. А $\forall k < 0$ существует один корень $\mu \in (0,1)$, если выполнено одно из условий: $1 < \beta/\alpha < 2$ при $|k| < -\alpha/\beta$, $\beta/\alpha > 2$ и $\pi < \beta < 3\pi/2$ при $|k| > -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$; существует два корня $\mu \in (0,1)$, если выполнено одно из условий: $\beta/\alpha > 2$ и $\beta > 3\pi/2$ при $|k| < -\alpha/\beta$, $\beta/\alpha > 2$ и $\pi < \beta < 3\pi/2$ при $-\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta < |k| < -\alpha/\beta$.*

Теорема 5. *Пусть α — тупой угол, а β — острый угол. Тогда $\forall k > 0$ существует один корень $\mu \in (0,1)$, если при $|k| > -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$ выполнено одно из условий: $1 < \alpha/\beta < 2$, $\alpha/\beta > 2$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$; существует два корня $\mu \in (0,1)$, если $\alpha/\beta > 3$ и $\alpha > 3\pi/2$ при $|k| > -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$. А $\forall k < 0$ существует один корень $\mu \in (0,1)$, если выполнено одно из условий: $1 < \alpha/\beta < 2$ при $|k| > -\alpha/\beta$, $\alpha/\beta > 2$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$ при $|k| < -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$; существует два корня $\mu \in (0,1)$, если выполнено одно из условий: $\alpha/\beta > 2$ и $\alpha > 3\pi/2$ при $|k| > -\alpha/\beta$, $\alpha/\beta > 2$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$ при $-\alpha/\beta < |k| < -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$.*

Удобнее представить единое доказательство для теорем 2–5.

Доказательство. Собственные функции задачи (9) имеют вид

$$\Phi = \begin{cases} c_1 \cos\mu\varphi + c_2 \sin\mu\varphi, & \varphi \in (-\alpha, 0), \\ c_3 \cos\mu\varphi + c_4 \sin\mu\varphi, & \varphi \in (0, \beta). \end{cases}$$

Из условий сопряжения при $\varphi = 0$ и граничных условий при $u = 0$ находим $c_1 = c_3$, $kc_2 = c_4$. Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} c_1 \cos\mu\beta + kc_2 \sin\mu\beta = 0, \\ c_1 \cos\mu\alpha - c_2 \sin\mu\alpha = 0, \end{cases}$$

определитель которой равен

$$\Delta = \operatorname{tg}\mu\alpha + k\operatorname{tg}\mu\beta. \tag{13}$$

Приравнивая нулю этот определитель, получаем уравнение

$$\operatorname{tg}\mu\alpha = -k\operatorname{tg}\mu\beta, \tag{14}$$

для определения μ.

Рассмотрим случай $\alpha > \beta$ при $k > 0$. Рис. 1 соответствует случаю, когда α — тупой угол, а β — острый угол. Из рис. 1 видно, что $2\pi/\alpha > 1$, значит максимальное число корней в этом случае равно двум, причём второй корень $\mu \in (0,1)$ будет существовать только при одновременном выполнении условий: $\alpha/\beta > 3$, $\alpha > 3\pi/2$ и $k > -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$. Параметр $k = -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$ соответствует корню $\mu = 1$, поэтому ветвь $-k\operatorname{tg}\mu\beta$ при увеличении параметра k будет уходить влево от точки $\mu = 1$. Следовательно, точка пересечения двух ветвей соответствующих тангенсов будет иметь абсциссу меньше единицы. А при значениях $k > -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$ и $1 < \alpha/\beta < 2$ или $\alpha/\beta > 2$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$ существует единственный корень меньше единицы.

Рассмотрим случай $\alpha < \beta$ при $k > 0$, когда β — тупой угол, а α — острый угол. Максимальное число корней в этом случае равно двум, причём второй корень $\mu \in (0,1)$ будет существовать только при одновременном выполнении следующих условий: $\beta/\alpha > 3$, $\beta > 3\pi/2$ и $k < -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$. Ветвь $-k\operatorname{tg}\mu\beta$ при уменьшении параметра k будет уходить влево от точки $\mu = 1$. Следовательно, точка пересечения двух ветвей соответствующих тангенсов будет иметь абсциссу меньше единицы. А при $k < -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$ и $1 < \beta/\alpha < 2$ или $\beta/\alpha > 2$ и $\pi < \beta < 3\pi/2$ существует единственный корень меньше единицы.

Рассмотрим случай $\alpha > \beta$ при $k > 0$, когда α, β — тупые углы. Из рис. 2 видно, что максимальное число корней в этом случае равно двум, причём второй корень $\mu \in (0,1)$ будет существовать только при одновременном выполнении следующих условий: $1 < \alpha/\beta < 3$ и $\alpha > \pi$ при $k < -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$. Ветвь $-k\operatorname{tg}\mu\beta$ при уменьшении параметра k будет уходить влево от точки $\mu = 1$. Следовательно, точка пересечения двух ветвей соответствующих тангенсов будет иметь абсциссу меньше единицы. Второй корень перестаёт существовать, если $1 < \alpha/\beta < 2$, $\alpha < \pi$ или $\alpha/\beta > 2$, $\alpha > \pi$.

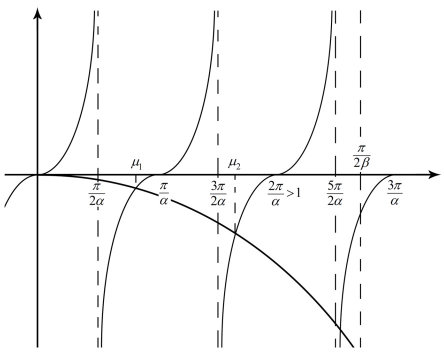

Рис. 1. $\alpha > \beta$, $k > 0$

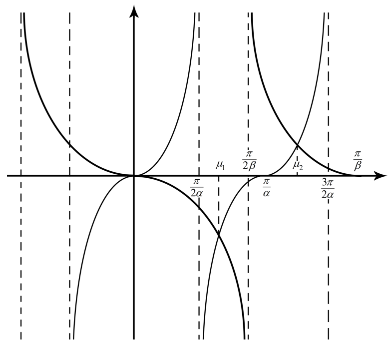

Рис. 2. $\alpha > \beta$, $k > 0$

Рассмотрим случай $\alpha < \beta$ при $k > 0$, когда α, β — тупые углы. Максимальное число корней в этом случае равно двум, причём второй корень $\mu \in (0,1)$ будет существовать только при одновременном выполнении условий: $1 < \beta/\alpha < 3$ и $\beta > \pi$ при $k > -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$. Ветвь $-k\operatorname{tg}\mu\beta$ при увеличении параметра k будет уходить влево от точки $\mu = 1$. Следовательно, точка пересечения двух ветвей соответствующих тангенсов будет иметь абсциссу меньше единицы. Второй корень перестаёт существовать, если $1 < \beta/\alpha < 2$, $\beta < \pi$ или $\beta/\alpha > 2$, $\beta > \pi$.

Из рис. 2 также видно, что при $k > 0$, когда α, β — острые углы, то корня меньше единицы не существует.

Рассмотрим случай $\alpha > \beta$ при $k < 0$. Рис. 3 соответствует случаю, когда α — тупой угол, а β — острый угол. Из рис. 3 видно, что $2\pi/\alpha > 1$, значит максимальное число корней в этом случае равно двум, причём два корня $\mu \in (0,1)$ будут существовать только при одновременном выполнении следующих условий: $\alpha/\beta > 2$, $\alpha > 3\pi/2$ при $k > -\alpha/\beta$ или $\alpha/\beta > 2$, $\pi < \alpha < 3\pi/2$ при $-\alpha/\beta < k < -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$.

Параметр $k > -\alpha/\beta$ соответствует случаю, когда касательная в нуле к графику функции $-k \operatorname{tg} \mu\beta$ составляет больший угол с осью $O\mu$, чем касательная в нуле к графику функции $\operatorname{tg} \mu\alpha$, т.е. ветви соответствующих тангенсов будут пересекаться. Точка их пересечения будет иметь абсциссу меньше единицы по условию, так как $\pi/2\alpha < 1$. А если $\alpha/\beta > 2$, $\pi < \alpha < 3\pi/2$ при $k < -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$, или $1 < \alpha/\beta < 2$ при $k > -\alpha/\beta$, то существует единственный корень меньше единицы.

Рассмотрим случай $\alpha < \beta$ при $k < 0$, когда β — тупой угол, а α — острый угол. Максимальное число корней в этом случае равно двум, причём два корня $\mu \in (0,1)$ будут существовать только при одновременном выполнении следующих условий: $\beta/\alpha > 2$, $\beta > 3\pi/2$ при $k < -\alpha/\beta$ или $\beta/\alpha > 2$, $\pi < \beta < 3\pi/2$ при $-\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta < k < -\alpha/\beta$. Параметр $k < -\alpha/\beta$ соответствует случаю, когда касательная в нуле к графику функции $-k \operatorname{tg} \mu\beta$ составляет меньший угол с осью $O\mu$, чем касательная в нуле к графику функции $\operatorname{tg} \mu\alpha$, т.е. ветви соответствующих тангенсов будут пересекаться. Точка их пересечения будет иметь абсциссу меньше единицы по условию, так как $\pi/2\beta < 1$. А если $\beta/\alpha > 2$, $\pi < \beta < 3\pi/2$ при $k > -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$, или $1 < \beta/\alpha < 2$ при $k < -\alpha/\beta$, то существует единственный корень меньше единицы.

Рассмотрим случай $\alpha > \beta$ при $k < 0$, когда α, β — тупые углы. Из рис. 4 видно, что максимальное число корней в этом случае равно двум, причём два корня $\mu \in (0,1)$ будут существовать только при одновременном выполнении следующих условий: $1 < \alpha/\beta < 2$, $\alpha > \pi$ при $k < -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$. Ветвь $-k \operatorname{tg} \mu\beta$ при уменьшении параметра k будет дважды пересекать ветвь $\operatorname{tg} \mu\alpha$. Точки пересечения двух ветвей соответствующих тангенсов будут иметь абсциссы меньше единицы, лежащие в промежутке $(\pi/2\beta, \pi/\alpha)$. Существует один корень меньше единицы, если выполнено одно из условий: $1 < \alpha/\beta < 2$ при $|k| > -\alpha/\beta$ или при $|k| < -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$, $\alpha/\beta > 2$ при $|k| > -\alpha/\beta$.

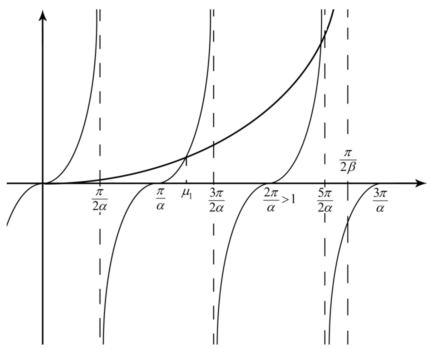

Рис. 3. $\alpha > \beta$, $k < 0$

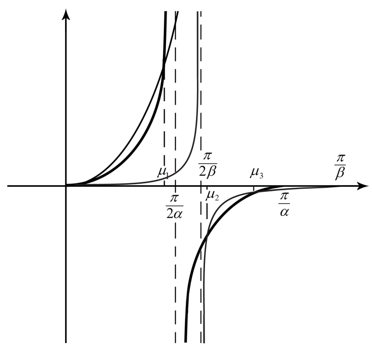

Рис. 4. $\alpha > \beta$, $k < 0$

Рассмотрим случай $\alpha < \beta$ при $k < 0$, когда α, β — тупые углы. Максимальное число корней в этом случае равно двум, причём два корня $\mu \in (0,1)$ будут существовать только при одновременном выполнении следующих условий: $1 < \beta/\alpha < 2$, $\beta > \pi$ при $k > -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$. Ветвь $-k \operatorname{tg} \mu\beta$ при увеличении параметра k будет дважды пересекать ветвь $\operatorname{tg} \mu\alpha$. Точки пересечения двух ветвей соответствующих тангенсов будут иметь абсциссы меньше единицы, лежащие в промежутке $(\pi/2\alpha, \pi/\beta)$. Существует один корень меньше единицы, если выполнено одно из условий: $1 < \beta/\alpha < 2$ при $|k| < -\alpha/\beta$ или при $|k| > -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$, $\beta/\alpha > 2$ при $|k| < -\alpha/\beta$.

Из рис. 4 также видно, что при $k < 0$, когда α, β — острые углы, то существует один корень меньше единицы, если выполнено одно из условий: $1 < \alpha/\beta < 2$ при $-\alpha/\beta < |k| < -\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta$, $1 < \beta/\alpha < 2$ при $-\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta < |k| < -\alpha/\beta$.

Теорема доказана. □

В случае, когда граница негладкая и не имеет линий разрыва коэффициентов, известно, что $\mu \in (0,1)$ существует только при $\alpha > \pi$.

3. Размерность ядра и коядра

Рассмотрим случай ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с m конечными граничными особыми точками, которым соответствуют корни $\mu \in (0,1)$. Каждой j-й особой точке соответствует число N_j корней $\mu \in (0,1)$, которое может принимать значения $1, \ldots, n$ при $j = 1, \ldots, m$. Число n корней $\mu \in (0,1)$, соответствующих одной особой точке, зависит от характера особой точки. В настоящей работе мы ограничились рассмотрением особых точек, для которых $n \leqslant 3$. Общее число M различных корней $\mu \in (0,1)$ может принимать какое-то значение от 0 до $m \cdot n$, в зависимости от характера имеющихся особых точек. Занумеровав в возрастающем порядке все различные значения имеющихся корней $\mu \in (0,1)$, в случае $M \geqslant 1$ будем иметь набор корней $\{\mu_k\}_{k=1}^{M}$, где $\mu_k \in (0,1)$, $\mu_k < \mu_{k+1}$. Очевидно, случай $M = 0$ соответствует отсутствию корней $\mu \in (0,1)$. Таким образом, предполагается существование m особых точек, которым соответствует m задач Штурма–Лиувилля, причём разным особым точкам может соответствовать одна и та же задача Штурма–Лиувилля.

Определение 1. Будем говорить, что корень $\mu_k \in (0,1)$ имеет кратность $p_k \geqslant 1$, если он соответствует одновременно p_k особым точкам.

Через N обозначим общее число корней $\mu \in (0,1)$ с учётом их кратности, т.е. $N = \sum\limits_{k=1}^{M} p_k$. Теперь можно сформулировать теорему, в которой ради удобства записи будем считать, что число $\mu_{M+1} = 1$. Подчеркнём, что при этом вопрос о фактическом существовании или несуществовании корня $\mu = 1$ не представляет здесь никакого интереса.

Теорема 6. *Пусть все $\varkappa_i$ одного знака, $i = 1, \ldots, I$, и пусть $l = 1, \ldots, M$, $1 < p < \infty$. Тогда*

$\dim \mathrm{Ker} = \dim \mathrm{CoKer} = 0$ *при условии* $2/(1+\mu_1) < p < 2/(1-\mu_1)$;

$\dim \mathrm{Ker} = \sum\limits_{k=1}^{l} p_k$, $\dim \mathrm{CoKer} = 0$ *при условии* $2/(1+\mu_{l+1}) < p < 2/(1+\mu_l)$;

$\dim \mathrm{Ker} = 0$, $\dim \mathrm{CoKer} = \sum\limits_{k=1}^{l} p_k$ *при условии* $2/(1-\mu_l) < p < 2/(1-\mu_{l+1})$;

$\dim \mathrm{Ker} = 0$ *при условии* $p = 2/(1-\mu_l)$,

$\dim \mathrm{Ker} = \sum\limits_{k=1}^{l} p_k$ *при условии* $p = 2/(1+\mu_l)$,

$\dim \mathrm{CoKer} = \infty$ *при условии* $p = 2/(1 \pm \mu_l)$.

Доказательство. Рассмотрим вопрос о вкладе в размерность ядра одной отдельно взятой j-й конечной особой граничной точки, которая соответствует корню $\mu_j \in (0,1)$ и $N_j = 1, 2, 3$.

Отметим, что в случае $N_j = 0$, т.е. при отсутствии для j-й особой точки корня $\mu \in (0,1)$, слабое решение $u \in W_p^1(\Omega)$ при $p < 2$ будет на самом деле из $W_2^1(\Omega)$, и такая j-я особая точка не даст вклада в размерность ядра.

Пусть $N_j = 1$. В этом случае построим пример нетривиального решения $u \in \overset{\circ}{L}{}_p^1$ однородной задачи. Без ограничения общности можно считать, что особая точка совпадает с началом координат, т.е. $x = 0$. Обозначим через $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ срезающую функцию вида

$$0 \leqslant \eta(\xi) \leqslant 1\,, \quad \eta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \leqslant R, \\ 0, & \xi \geqslant R+1, \end{cases}$$

при условии $B_{R+1} \cap \Omega = B_{R+1} \cup \Gamma_\alpha$, где $B_r = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < r\}$ и Γ_α — открытый угол на плоскости с раствором $\alpha \in (0, 2\pi)$. Напомним, что $\lambda = -\mu^2$ — собственные числа задачи Штурма–Лиувилля с корнем $\mu \in (0, 1)$, а $\Phi_\mu(\varphi)$ — решение соответствующей задачи Штурма–Лиувилля (9). Так как особая точка $r = 0$ лежит на $\partial\Omega$, то функция $u_\mu = r^{-\mu}\Phi_\mu(\varphi)$ — это кусочно-гладкое слабое решение задачи Дирихле для уравнения $\operatorname{div}(A\nabla u_\mu) = 0$ в смысле интегрального тождества

$$\int\limits_\Omega (A\nabla u_\mu, \nabla\psi)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\psi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega). \tag{15}$$

Заметим, что для ограниченной Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$ уравнение

$$\operatorname{div} G = (A\nabla u_\mu, \nabla\eta)$$

имеет решение $G \in W_p^1(\Omega)$, так как правая часть $(A\nabla u_\mu, \nabla\eta) \in L_p(\Omega)$ для всех $p \in (1, \infty)$. Обозначим $F = G + u_\mu A\nabla\eta$. Нетрудно убедиться, что

$$\int\limits_\Omega (A\nabla(\eta u_\mu), \nabla v)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\Omega (F, \nabla v)\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega), \tag{16}$$

где $F \in L_p(\Omega; \mathbb{R}^2)$ для всех $p \in (1, \infty)$ и, в частности, для $p = 2$. Поэтому по теореме Рисса существует слабое решение $w \in \overset{\circ}{L}{}_2^1(\Omega)$ интегрального тождества

$$\int\limits_\Omega (A\nabla w, \nabla v)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\Omega (F, \nabla v)\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega). \tag{17}$$

Вычитая (17) из (16), получим тождество

$$\int\limits_\Omega (A\nabla(\eta u_\mu - w), \nabla v)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$$

с искомым нетривиальным решением

$$U_\mu = \eta u_\mu - w\,,$$

для которого справедливо тождество

$$\int\limits_\Omega (A\nabla U_\mu, \nabla v)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)\,. \tag{18}$$

Действительно, рассуждая от противного, предположим, что $U_\mu \neq 0$, т.е. решение нетривиально. Предположим, что $v_\mu = 0$. Тогда $u_\mu = w$ в окрестности нуля. Но $u_\mu = r^{-\mu}\Phi_\mu(\varphi)$ в классе решений $\nabla u_\mu \in L_p(\Omega; \mathbb{R}^2)$ только при $p < 2/(1 + \mu) < 2$. Следовательно это равенство $u_\mu = w$ невозможно, так как $\nabla w \in L_2(\Omega; \mathbb{R}^2)$.

В случаях $N_j = 2, 3$, по аналогии со случаем $N_j = 1$ легко строятся примеры линейно независимых нетривиальных решений $u \in \overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega)$ однородной задачи (18).

Получаем однозначную разрешимость для всех показателей $p \in (1, \infty)$, кроме показателей $p = 2/(1 \pm \mu)$, для которых, в силу незамкнутости области значений, размерность коядра бесконечна [1].

Теорема доказана. □

4. Заключение

Для ограниченных плоских областей с гладкими и негладкими границами вычислены размерности ядра и коядра эллиптического оператора в дивергентной форме с разрывными кусочно-гладкими коэффициентами во всей шкале значений показателя $p \in (1, \infty)$ в зависимости от параметров особых граничных точек.

Литература

1. *Maslennikova V. N., Bogovskii M. E.* On Non-Closure of Range of Values of Elliptic Operator for Plane Angle // J. Ann. Univ. Ferrara. — Vol. XXXIX, No VII. — 1993. — Pp. 65–75.
2. Solutions for Quasilinear Nonsmooth Evolution Systems in L^p / V. Maz'ya, J. Elschner, J. Rehberg, G. Schmidt // J. Arch. Ration. Mech. Anal. — Vol. 171, No 2. — 2004. — Pp. 219–262.
3. *Shen Z.* Necessary and Sufficient Condition for the Solvability of the L^p Dirichlet Problem on Lipschitz Domain // J. Math. Ann. — Vol. 336. — 2006. — Pp. 697–725.
4. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. Мат. — Т. 18, № 1. — 1954. — С. 3–50.
5. *Ильин Е. М.* Особенности слабых решений эллиптических уравнений с разрывными старшими коэффициентами // АН СССР. Записки ЛОМИ. — Т. 38. — 1973. — С. 33–45.
6. *Ильин Е. М.* Особенности слабых решений эллиптических краевых задач с разрывными старшими коэффициентами. Угловые точки линий разрыва // АН СССР. Записки ЛОМИ. — Т. 47. — 1974. — С. 166–169.
7. *Li Y., Nirenberg L.* Estimates for Elliptic Systems from Composite Material // J. Comm. Pure Appl. Math. — Vol. LVI. — 2003. — Pp. 892–925.
8. *Di Fazio G.* L^p Estimates for Divergence form Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients // J. Boll. Un. Mat. Ital. A. — Vol. 10. — 1996. — Pp. 409–420.
9. *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. — М.: Добросвет, 2005.

UDC 517.95

On dimKer and dimCoker for an Elliptic Operator with Discontinuous Coefficients

A. A. Dudkina

Department of Differential Equations and Mathematical Physics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

For divergence form of elliptic operator with discontinuous piecewise smooth coefficients we analyzed questions of the uniqueness and the existence of generalized solutions for BVP with the divergent right-hand part from the class with first derivatives from L_p in a bounded plain domains with smooth and nonsmooth borders. We calculate dimKer and dimCoker for an elliptic operator for all indices $p \in (1, \infty)$ depending on parameters of critical points.