Математика

УДК 517.51

Обобщённые фреймы и системы Рисса

С. В. Томашевский

Кафедра математического анализа и теории функций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

В работе производится обобщение фреймовых систем. Первые шаги в описании систем такого типа принадлежат Т. П. Лукашенко. В 1997 г. он ввёл класс ортоподобных обобщённых систем, а в 2006 г. поставил вопрос о расширении фреймовых систем на обобщённые пространства. Этот вопрос и рассматривается в данной работе. Сначала в работе приводится описание на данный момент хорошо изученных дискретных и интегральных фреймов, а также описываются основные области практического применения таких фреймовых систем. Рассматриваются введённые Т. П. Лукашенко обобщённые системы, подобные ортогональным, и расширяются до обобщённых фреймов. Приводятся примеры, указывающие на то, что вводимый класс является более широким, чем рассматриваемые раньше дискретные и интегральные фреймы, и более общим, чем обобщённые ортоподобные системы (в качестве примеров приводятся преобразования Фурье и преобразования Гильберта). Вводится понятие обобщённых систем Рисса и исследуется связь фреймов и систем Рисса в обобщённом случае. Две доказываемые в работе теоремы устанавливают тесную связь между введёнными обобщёнными фреймами и обобщёнными системами Рисса и приводят необходимые и достаточные критерии для того, чтобы система являлась обобщённым фреймом. Выводится аналог равенства Парсеваля для обобщённых фреймовых систем.

Ключевые слова: экспоненциальные системы, фреймы, системы Рисса; обобщённые системы, подобные ортогональным; ортогональные проекции, равенство Парсеваля.

1. Введение

Впервые фреймы появились в 1952 г. в работе Даффина и Шеффера [1] при изучении экспоненциальной системы $\{\exp(i\lambda_n t)\}$, где n целое, $t \in [-\gamma, \gamma]$. В этой работе было дано определение фрейма, приведённое ниже, а также доказаны некоторые его свойства.

Определение 1 (Даффин и Шеффер [1]). Конечная или счётная система $F = \{f_k\}$, где $k = 1, 2, \dots$ элементов гильбертова пространства H (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется фреймом, если существуют такие константы A и B, $0 < A \leqslant B < \infty$, называемые, соответственно, нижней и верхней границами фрейма, что для любого f из H: $A\|f\|^2 \leqslant \sum\limits_k |(f, f_k)|^2 \leqslant B\|f\|^2$.

Фреймами являются и некоторые системы, рассматривавшиеся до работы Даффина и Шеффера. Например, введённые Н. К. Бари [2] в 1951 г. системы Рисса:

Определение 2 (Бари [2]). Конечная или счётная система $\Phi = \{\varphi_k\}$, где $k \in \mathbb{N}$, элементов гильбертова пространства H (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется системой Рисса, если существуют такие постоянные A и B, $0 < A \leqslant B < \infty$, которые будем называть границами системы Рисса, что для любой последовательности $\alpha_k \in l_2$, занумерованной также как система (и, соответственно, действительной или комплексной), выполнено

$$A \sum_k |\alpha_k|^2 \leqslant \left\| \sum_k \alpha_k \varphi_k \right\|^2 \leqslant B \sum_k |\alpha_k|^2.$$

После введения фреймы и системы Рисса не встречались в исследованиях более тридцати лет, за исключением работы Р. Юнга [3], в которой он и установил тесную связь между системами Рисса и фреймами. Но в конце 80-х гг. интерес к ним возобновился в связи с возникновением и развитием теории всплесков (вэйвлетов).

Фреймы обладают многочисленными свойствами, позволяющими широко использовать их как в теоретических, так и в практических целях, к примеру, для анализа звуковых сигналов или изображений. В монографии С. Малла [4] описаны применения фреймов в анализе сигналов для уменьшения шума, а также в анализе изображений. Другие применения теории фреймов можно найти в книгах И. Добеши [5], Ч. Чуи [6], К. Блаттера [7].

До 2004 г. фреймы рассматривались лишь в дискретном виде, и для многих целей точности разложения по ним было недостаточно. Более сложными являются интегральные фреймы, введённые К. Блаттером [7]. Введение такого непрерывного аналога быстро нашло физическое применение и начало исследоваться теоретически.

В работах А. А. Захаровой [8, 9] подробно изложены свойства интегральных фреймов, схожие со свойствами обычных фреймов. Дано определение интегральных базисов Рисса.

Но не все системы, обладающие свойствами ортоподобных систем, раскладываются по интегральным фреймам. Например, задающая преобразование Фурье в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ система

$$\hat{f}(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\omega} f(x)\mathrm{d}x$$

и система, задающая преобразование Гильберта $\tilde{f}(\omega) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{|x-\omega|\geqslant\varepsilon} \dfrac{f(x)}{\pi(x-\omega)}\mathrm{d}x$, не являются ортоподобным системами в $L^2(\mathbb{R})$, так как ни функции $\{e^{2\pi i\omega x}\}_{\omega\in\mathbb{R}}$, ни $\left\{\dfrac{1}{\pi(x-\omega)}\right\}_{\omega\in\mathbb{R}}$ не принадлежат $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, хоть для систем $\hat{f}$ и $\tilde{f}$ и выполнено равенство Парсеваля: $\|\hat{f}\|^2 = \|f\|^2$ и $\|\tilde{f}\|^2 = \|f\|^2$.

Перейдём к детальному рассмотрению обобщённых систем и обобщим понятие фреймов и системы Рисса на случай обобщённых систем.

2. Обобщённые фреймы

Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой (Ω — множество, Σ — σ-алгебра его подмножеств, μ — принимающая значения из $[0,\infty]$ мера на Σ), H — гильбертово (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Определение 3 (Лукашенко Т. П. [10]). Пусть $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ — система замкнутых вложенных ($H_n \subset H_{n+1}$) расширяющихся подпространств в H, объединение которых всюду плотно в H. Пусть $\{e^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — система, такая что любой её элемент e^ω является последовательностью $\{e^\omega_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ элементов H, $e^\omega_n \in H_n$ и e^ω_n — ортогональная проекция e^ω_{n+1} на H_n. Тогда $\{e^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — обобщённая система в H.

Определение 4 (Лукашенко Т. П. [10]). Обобщённая система $\{e^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ называется обобщённой ортоподобной системой разложения в H, если любой элемент $y \in H_n$ представим в виде

$$y = \int\limits_{\Omega} y^n_\omega e^\omega_n \mathrm{d}\mu(\omega),$$

где $y_\omega^n = (y, e_n^\omega)$, интеграл понимается как собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в H.

Таким образом, Т. П. Лукашенко ввёл новый класс систем, названных им обобщёнными ортоподобными системами, который включает в себя как ортоподобные системы, так и системы, задающие преобразование Фурье и Гильберта, а также некоторые другие системы.

Обобщим этот класс систем, введя понятие обобщённых фреймов.

Определение 5. Назовём обобщённую систему функций $\{\varphi^\omega\}_{\omega\in\Omega} \subset H$ обобщённым фреймом, если существуют константы A и B, $0 < A \leqslant B < \infty$, такие что для любого $y \in H_n$ все функции (y, φ_n^ω) измеримы и для любого $y \in H_n$

$$A\|y\|^2 \leqslant \int\limits_\Omega |(y, \varphi_n^\omega)|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) \leqslant B\|y\|^2.$$

Числа A и B называются границами фрейма. Они не единственны. Точная нижняя грань множества всех границ B (точная верхняя грань множества всех нижних границ A) называется, соответственно, оптимальной верхней (оптимальной нижней) границей фрейма. Если можно выбрать $A = B$, то обобщённый фрейм называется жёстким обобщённым фреймом; если при этом $A = B = 1$, то это обобщённый фрейм Парсеваля или обобщённая ортоподобная система.

Как дискретные, так и интегральные фреймы являются частными случаями обобщённых фреймов, что несложно проверить. Если все элементы обобщённого фрейма $e^\omega = \{e_n^\omega\}_{n=1}^\infty$ постоянны, т.е. для любого натурального n, положив $e_n^\omega = e^\omega$, и, соответственно, для любого натурального n $H_n = H$, то получается определение интегральных фреймов, которое, как было отмечено, охватывает дискретные фреймы. Тем не менее, класс обобщённых фреймов не исчерпывается дискретными и интегральными фреймами. В качестве примеров жёстких обобщённых фреймов, не являющихся интегральными фреймами, можно как раз рассмотреть преобразование Фурье и преобразование Гильберта.

Пример 1 (Преобразование Фурье как обобщенный фрейм). Возьмём $H = L_2(\mathbb{R})$, $\Omega = \mathbb{R}$ с мерой Лебега μ и рассмотрим систему подпространств $H_n = \{f \in L_2(\mathbb{R})$ на отрезке $[-n, n]$ и $f \equiv 0$ на $\mathbb{R} \setminus [-n, n]\}$, и для всех $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ — функции $e_n^\omega = \exp(2\pi i\omega x)\chi_{[-n,n]}(x)$, где $\chi_{[-n,n]}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[-n, n]$. Тогда мы получим систему функций $\{\exp(2\pi i\omega x)\}_{\omega\in\mathbb{R}}$, которая определяет преобразование Фурье:

$$F(f) = \hat{f}(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\omega x} f(x) \mathrm{d}x.$$

В силу равенства Парсеваля она является жёстким обобщённым фреймом с фреймовой константой $a = 1$.

Пример 2 (Преобразование Гильберта как обобщенный фрейм). Возьмём $H = L_2(\mathbb{R})$, $\Omega = \mathbb{R}$ с мерой Лебега μ и рассмотрим систему подпространств $H_n = \{f \in L_2(\mathbb{R})$ на отрезке $[-n, n]$ и $f \equiv 0$ на $\mathbb{R} \setminus [-n, n]\}$ и для всех $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ — функции

$$e_n^\omega = F((-i\exp(2\pi i\omega t)\chi_{[-n,n]}(t)\mathrm{sgn}(t)(x)) = \frac{1 - \cos 2\pi n(\omega - x)}{\pi(\omega - x)},$$

где $F(g)$ — обозначает преобразование Фурье функции g. Тогда мы получим систему функций $\left\{\dfrac{1}{\pi(\omega - x)}\right\}_{\omega\in\mathbb{R}}$, которая определяет преобразование Гильберта

$\tilde{f}(\omega) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{|x-\omega|\geqslant\varepsilon} \dfrac{f(x)}{\pi(x-\omega)}\mathrm{d}x$ и является жёстким обобщённым фреймом Парсеваля.

Заметим, что при таком определении обобщённых фреймов введённые Тарасом Павловичем Лукашенко обобщённые системы будут являть жёсткими обобщёнными фреймами.

Обобщим теперь понятие интегральных систем Рисса на случай обобщённых ортоподобных систем.

3. Обобщённые системы Рисса

Определение 6. Обобщённая система $\{\varphi^\omega\}_{\omega\in\Omega}$, где $\varphi^\omega = \{\varphi^\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varphi^\omega_n \in H_n$, называется обобщённой системой Рисса, если существуют константы A и B, $0 < A \leqslant B < \infty$, такие, что для любого $f \in H_n$, для $f^n_\omega = (f, e^\omega_n)$, сходящейся к функции из L_2, верно

$$A \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega |f^n_\omega|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) \leqslant \| \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f^n_\omega \varphi^\omega_n \mathrm{d}\mu(\omega)\|^2 \leqslant B \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega |f^n_\omega|^2 \mathrm{d}\mu(\omega).$$

Теорема 1. *Обобщённая система Рисса является обобщённым фреймом.*

Доказательство. Переходя к пределу в определении 6 по теореме о предельном переходе под знаком интеграла и пользуясь определением 4, получим:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f^n_\omega e^\omega_n \mathrm{d}\mu(\omega) = \int\limits_\Omega f_\omega e^\omega \mathrm{d}\mu(\omega) = f.$$

В связи с этим опустим упоминание о пределах. Введём оператор $I : L_2 \to H$, который сопоставляет каждому элементу φ^ω элемент f следующим образом:

$$f = \int\limits_\Omega f(\omega)\varphi^\omega \mathrm{d}\mu(\omega).$$

Учитывая неравенства из определения 6, получаем $\|I\|^2 \leqslant B$, $\|I^{-1}\| \leqslant A^{-1}$.

В силу изоморфизма сепарабельных гильбертовых пространств бесконечной размерности достаточно рассмотреть решение в $L_2[-\pi, \pi]$.

Предъявим в L_2 базис. Система $\left\{\dfrac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}}\right\}$ является ортогональным базисом в $L_2[-\pi, \pi]$. Эта система является полной в L_2, и существует изоморфная ей система в (Ω, Σ, μ), являющаяся полной ортогональной в этом пространстве. Назовём её $\hat{e}^\omega$. Тогда $\varphi^\omega = I(\hat{e}^\omega)$. Отсюда по теореме об обратном операторе следует:

$$\int\limits_\Omega |(f, \varphi^\omega)|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) = \int\limits_\Omega |(f, I\hat{e}^\omega)|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) = \int\limits_\Omega |(I^* f, \hat{e}^\omega)|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) = \|I^* f\|^2_{L_2} \leqslant B\|f\|^2;$$

$$\|f\|^2 = \|I^{*-1} I^* f\|^2 \leqslant 1/A \|I^* f\|^2_{L_2} = \frac{1}{A} \int\limits_\Omega |(I^* f, \hat{e}^\omega)|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) = \frac{1}{A} \int\limits_\Omega |(f, \varphi^\omega)|^2 \mathrm{d}\mu(\omega).$$

Теорема 1 доказана. □

Теорема 2. *Для того, чтобы система $\Phi = \{\varphi^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ была обобщённым фреймом в H с константами A и B, необходимо и достаточно, чтобы нашлось* *гильбертово пространство $H' \supset H$, и в нём обобщённая система Рисса с константами A и B, которая в проекции на H будет давать систему Φ.*

Для доказательства этой теоремы сначала введём вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Если $\{\varphi^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — обобщённый фрейм в H, то для любого $y \in H$ существует единственная с точностью до эквивалентности (совпадения почти всюду) функция $y(\omega)$ на Ω такая, что последовательность функции $y^n_\omega = (y, \varphi^\omega_n)$ сходится к ней в смысле*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega |y^n_\omega|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) = \int\limits_\Omega |y(\omega)|^2 \mathrm{d}\mu(\omega).$$

Доказательство. Для любых натуральных n и m, $n \geqslant m$, и $y \in H$ имеем

$$\int\limits_\Omega |y^\omega_n - y^\omega_m|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) = \int\limits_\Omega |(y, \varphi^\omega_n) - (y, \varphi^\omega_m)|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) =$$

$$= \int\limits_\Omega |(y, P_n\varphi^\omega_n) - (y, P_m\varphi^\omega_m)|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) = \int\limits_\Omega |(P_n y, \varphi^\omega_n) - (P_m y, \varphi^\omega_m)|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) \leqslant$$

$$\leqslant B\|P_n y - P_m y\|^2,$$

где P_n — ортогональная проекция H на подпространство H_n. Так как $\overline{\cup_{n=1}^\infty H_n} = H$, то $P_n y \to y$, n$\to \infty$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что для любых $m, n > N$

$$\int\limits_\Omega |(y, \varphi^\omega_n) - (y, \varphi^\omega_m)|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) < \varepsilon.$$

Значит, существует $y(\omega)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\Omega |y^n_\omega - y(\omega)|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) = 0$. Следовательно, y^n_ω и $y(\omega)$ по норме совпадают. Лемма доказана. □

Теперь приступим к доказательству теоремы 2.

Доказательство. Достаточность. Пусть дана обобщённая система Рисса $\{\psi^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ в H', т.е. $\exists A$ и B, $0 < A \leqslant B < \infty$, такие что для любого $f \in H_n$:

$$A \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega |f^n_\omega|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) \leqslant \| \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f^n_\omega \psi^\omega_n \mathrm{d}\mu(\omega)\|^2 \leqslant B \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega |f^n_\omega|^2 \mathrm{d}\mu(\omega). \tag{1}$$

Так как для некоторой функции $y(\omega)$ $y^n_\omega = (y, e^\omega_n)$, то, в силу леммы, L_2 нормы функций y^n_ω и $y(\omega)$ совпадают. Теперь запись (1) можно переписать в виде:

$$A \int\limits_\Omega |f(\omega)|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) \leqslant \| \int\limits_\Omega f(\omega)\psi(\omega) \mathrm{d}\mu(\omega)\|^2 \leqslant B \int\limits_\Omega |f(\omega)|^2 \mathrm{d}\mu(\omega).$$

По теореме 1 из данной работы обобщённая система Рисса $\{\psi^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ является и обобщённым фреймом в H'. По теореме 8 из работы [10] Лукашенко Т. П. известно, что ортогональная проекция обобщённой системы является обобщённой системой. Таким образом, если $\varphi(\omega) \in H$ и $\varphi(\omega) = P\psi(\omega)$, где оператор P осуществляет ортогональную проекцию H' на H, тогда $\|\varphi(\omega)\|_{H'} = \|\varphi(\omega)\|_H$ и $(f, \varphi(\omega)) = (f, \psi(\omega))$. Тем самым достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $H = L_2(\Omega_1)$. Определим $v^\gamma = \{\varphi^\omega(x_\gamma)\}_{\omega\in\Omega_1}$, где $x_\gamma \in H$. Тогда из

$$A\|y\|_H^2 \leqslant \int\limits_\Omega |(y, \varphi_n^\omega)|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) \leqslant B\|y\|_H^2$$

для любого $y \in H$ имеем: $A\|\alpha\|_H^2 \leqslant \left\|\int\limits_\Omega \alpha_\gamma v^\gamma \mathrm{d}\mu(\gamma)\right\|_H^2 \leqslant B\|\alpha\|_H^2$.

Для любых $\alpha \in L_2(\Omega)$ система $\{v^\gamma\}_{\omega\in\Omega_1}$ является обобщённой системой Рисса в H. Теперь рассмотрим в H обобщённую систему, подобную ортогональной $\{e^\omega\}_{\omega\in\Omega_2}$. Определим $G = \{\gamma^\omega\}_{\omega\in\Omega_1\cup\Omega_2}$ следующим образом: $\gamma^\omega = v^\omega$, при $\omega \in \Omega_1$ и $\gamma^\omega = e^\omega$, при $\omega \in \Omega_2$. Определённая таким образом система G будет являться обобщённой системой Рисса для $L_2(\Omega)$.

Если рассмотреть системы $\tau^\omega = (v^\omega)_\lambda$, при $\omega \in \Omega_1$ и $\tau^\omega = (e^\omega)_\lambda$, при $\omega \in \Omega_2$, а также $\psi^\omega = \{\tau^{\omega,\lambda} : \omega \in \Omega\}$, тогда $\varphi^\omega = P\psi^\omega$, $\omega \in \Omega$, где P является ортогональной проекцией $L_2(\Omega)$ на H. Следовательно, система $\{\psi^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ является обобщённой системой Рисса в $L_2(\Omega)$, так как и G является обобщённой системой Рисса и

$$\left\|\int\limits_\Omega \beta_\omega \psi^\omega \mathrm{d}\mu(\omega)\right\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int\limits_\Omega |(\beta, \varphi^\omega)|^2 \mathrm{d}\mu(\omega).$$

Отсюда имеем $A\int\limits_\Omega |\beta_\omega|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) \leqslant \int\limits_\Omega |(\beta, \varphi^\omega)|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) \leqslant B\int\limits_\Omega |\beta_\omega|^2 \mathrm{d}\mu(\omega)$. Что и требовалось доказать. □

4. Заключительные замечания

Прямым следствием из теоремы является следующее утверждение.

Если $\{\varphi^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — обобщённый фрейм в H, то для любого $y \in H$ выполнено

$$a\|y\|_H^2 \leqslant \int\limits_\Omega |y(\omega)|^2 \mathrm{d}\mu(\omega) \leqslant b\|y\|_H^2.$$

А в случае жёсткого обобщённого фрейма неравенство превращается в аналог равенства Парсеваля $a\|y\|_H^2 = \int\limits_\Omega |y(\omega)|^2 \mathrm{d}\mu(\omega)$.

Литература

1. *Duffin R. J., Schaeffer A. C.* A Class of Nonharmonic Fourier Series. — Transactions of the American Mathematical Society, 1952. — Pp. 341–356.
2. *Бари Н. К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве. — Издательство Московского университета, 1951.
3. *Young R. M.* An Introduction to Nonharmonic Fourier Series. — New York Academic Press, 1980.
4. *Малла С.* Вэйвлеты в обработке сигналов. — Прикладная математика, Мир, 2005.
5. *Daubechies I.* Ten Lectures on Wavelets. — Philadelphia: SIAM, 1992.
6. *Chui C.* An Introduction to Wavelets. — Academic Press, 1992.
7. *Blatter C.* Wavelets: A Primer. — CRC Press, 2002.

8. *Захарова А. А.* Интегральные системы Рисса и их свойства // Вестник Московского университета. — 2004. — Т. 1. «Математика, механика», № 6. — С. 28–33.
9. *Захарова А. А.* Интегральные системы Рисса и их свойства // Тезисы докладов 12-й Саратовской зимней школы. — 2004. — С. 73.
10. *Лукашенко Т. П.* О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным // Математический сборник. — 1997. — Т. 186, № 12. — С. 57–72.

UDC 517.51

Generalized Frames and Riesz Systems

S. V. Tomashevskiy

Mathematical Analysis and Functional Theory Department
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russian Federation, 117198

In this paper a generalization of frame systems is made. First description of systems of this type was made by T. P. Lukashenko. In 1997 he introduced a class of generalized similar to orthogonal systems, and in 2006 proposed an idea to expand of frame-based systems on the generalized space. This question is considered in this paper. Firstly, the paper gives the description of well-studied, as for now, discrete and integral frames, as well as describes the main practical applications of such frame systems. The paper considers generalized systems, similar to orthogonal, introduced by T. P. Lukashenko, and these systems are extended to generalized frames. Given examples indicate that an input class is more inclusive than previously considered discrete and integral frames, and more general than the generalized orthogonal system (examples are Fourier transformation and the Hilbert transformation). The concept of generalized Riesz system is introduced and the relationship between frames and Riesz systems in a generalized way is studied. Two theorems are proved in the work to establish close links between the introduced generalized frames and generalized Riesz systems. The theorem give the necessary and sufficient criteria for the system to be a generalized frame. Parseval's identity analog is deduced for generalized frame systems.

Key words and phrases: exponential system, frames, Riesz system, generalized systems similar to orthogonal, orthogonal projections, Parseval's identity.

References

1. R. J. Duffin, A. C. Schaeffer, A Class of Nonharmonic Fourier Series, Transactions of the American Mathematical Society, 1952, pp. 341–356.
2. N. K. Bari, Biorthogonal Systems and Bases in Hilbert Space, Moscow University, 1951, in Russian.
3. R. M. Young, An Introduction to Nonharmonic Fourier Series, New York Academic Press, 1980.
4. S. Mallat, Wavelets in Signal Processing, Applied Mathematics, World, 2005, in Russian.
5. I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, Philadelphia: SIAM, 1992.
6. C. Chui, An Introduction to Wavelets, Academic Press, 1992.
7. C. Blatter, Wavelets: A Primer, CRC Press, 2002.
8. A. A. Zaharova, Riesz Integral System and Their Properties, Moscow University Bulletin 1, Mathematics and Mechanics (6) (2004) 28–33, in Russian.
9. A. A. Zaharova, Riesz Integral System and Their Properties, in: Abstracts of the Twelfth Saratov Winter School, 2004, p. 73, in Russian.
10. T. P. Lukashenko, On the Coefficients of Expansion Systems Similar to Orthogonal, Mathematics Collection 186 (12) (1997) 57–72, in Russian.