УДК 519.711.3, 531

Управление динамикой связанных систем и обратные задачи динамики

Р. Г. Мухарлямов, Е. А. Горшков

Кафедра теоретической физики и механики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Решается задача управления динамикой системы, содержащей элементы различной физической природы. Используя известные динамические аналогии, процессы в сложной системе описываются уравнениями классической механики. Соответствующие дифференциально-алгебраические уравнения включают в себя уравнения динамики, уравнения связей и формулировку целей управления. Динамика системы описывается уравнениями Лагранжа или уравнениями в канонических переменных, содержащими неопределённые множители в правых частях. Задача определения множителей Лагранжа или управляющих функций, соответствующих уравнениям связей, сводится к построению множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданные частные интегралы. Приводится определение устойчивости решений уравнений динамики по отношению к уравнениям связей. Для обеспечения асимптотической устойчивости и стабилизации связей при численном решении дифференциальных уравнений вводятся динамические показатели, учитывающие отклонения от уравнений связей. Строится расширенная система уравнений динамики, состоящая из уравнений динамики исходной системы и уравнений возмущений связей. Уравнения возмущений связей, построенные по модифицированным динамическим показателям, позволяют определить условия устойчивости и стабилизации связей. Приводятся условия стабилизации связей, соответствующие численному решению уравнений динамики методом Эйлера и методом Рунге–Кутта. Предлагается решение задачи стабилизации вертикального положения стержня, закреплённого шарнирно на тележке, совершающей прямолинейное движение. Управление осуществляется посредством действующей на тележку силы и момента, приложенного к стержню.

Ключевые слова: динамика, управление, устойчивость, стабилизация, связи, связанные системы, обратные задачи.

1. Введение

Известные кинематические и динамические аналогии в элементах различной физической природы позволяют использовать уравнения и методы классической механики и современные методы моделирования для решения задач управления сложными системами. Введением унифицированных переменных [1, 2] динамические процессы в этих системах могут быть описаны дифференциально-алгебраическими уравнениями, составленными из кинематических соотношений, целей управления, уравнений связей и уравнений динамики. Задачи моделирования процессов в экономических системах [3] решаются по аналогии динамических процессов в простейшем экономическом объекте движению точки переменной массы. Развитие задач управления программным движением точки и тела переменной массы [4, 5] с использованием методов решения обратных задач дифференциальных уравнений [6–10] явились основой для разработки методов решения задач динамики [11, 12], управления со стабилизацией связей [13] и численных методов решения дифференциально-алгебраических уравнений [14]. Методы решения задач управления со стабилизацией связей оказались эффективными для решения задач управления портфелями финансовых активов [15].

Основу унифицированного множества переменных составляют перемещение, расход, импульс и усилие [2]. Процесс исследования динамики и решения задачи управления состоит из двух частей. На первом этапе, исходя из постановки задачи

Статья поступила в редакцию 13 декабря 2014 г.
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 13-08-00535.

и соответствующих законов динамики, составляются дифференциальные уравнения. На следующем этапе определяется решение или проводится качественное исследование решений системы дифференциальных уравнений и решается соответствующая задача управления.

Для построения уравнений динамики используются величины, которые характеризуют динамическое поведение систем различной физической природы. Среди динамических величин возможно провести некоторую классификацию. Уравнения динамики системы могут быть составлены в форме уравнений Лагранжа, Гамильтона или в других формах, используемых в современной механике и теоретической физике.

Одним из основных положений естественных наук является принцип сохранения энергии. В механической системе и в технических системах энергия обычно представляется в трёх видах: кинетическая, потенциальная и тепловая энергия. Кинетическая энергия системы обусловливается её скоростью, потенциальная энергия обусловливается конфигурацией системы или её деформацией. В рассеивающей части системы энергия превращается в тепло и определяется функцией рассеяния, или диссипативной функцией.

Уравнения динамики механической системы составляются в соответствии с её принципами, выраженными через динамические показатели. Наиболее распространённой формой уравнений движения механических систем является система уравнений, представленная уравнениями Лагранжа относительно обобщённых координат и скоростей или уравнениями Гамильтона, записанными в канонических переменных. Некоторая классификация динамических показателей позволяет также установить соответствующие аналогии.

Кинетическая энергия и диссипативная функция являются функциями скорости v или в унифицированных переменных функциями расхода f. В [2] под кинетической энергией предлагается понимать энергию, выраженную через импульс $T = T(p, q, t)$, а кинетическую энергию, определяемую через расход $T^* = T^*(f, q, t)$ называть кинетической коэнергией. Аналогично определяются понятия потенциальной коэнергии $V = V(q,\, t)$ и потенциальной энергии $V^* = V^*(e, t)$, а также диссипативной кофункции $D^* = D^*(f,\, t)$ и диссипативной функции $D = D(p,\, t)$. Так, прямолинейному движению тела под действием силы упругости $F_c = -cx$ и с сопротивлением пропорциональным скорости $F_k = -kv$ соответствуют

$$V^* = V = -\frac{1}{2}cx^2, \quad D^* = \frac{1}{2}kv^2, \quad D = \frac{kp^2}{2m}.$$

Аналогичные выражения определяются для электрической цепи, составленной из индуктивности L, сопротивления R и ёмкости C:

$$V^* = V = \frac{1}{2C}q^2, \quad D^* = \frac{1}{2}Ri^2, \quad D = \frac{R\lambda^2}{2L^2}.$$

2. Уравнения динамики

Пусть состояние системы определяется обобщёнными координатами $q^1, \ldots, q^n$ и скоростями $v^1, \ldots, v^n$, $v^i = \mathrm{d}q^i/\mathrm{d}t$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяющими уравнениям связей

$$f(q,t) = 0, \quad f = (f^1, \ldots, f^m), \quad q = (q^1, \ldots, q^n) \tag{1}$$

$$f'(q,v,t) = 0, \quad f' = \left(\varphi^{m+1}, \ldots, \varphi^r\right), \quad v = \left(v^1, \ldots, v^n\right), \quad m + r \leqslant n. \tag{2}$$

Если известны кинетическая коэнергия, потенциальная коэнергия, диссипативная кофункция и действующие на систему непотенциальные обобщённые силы, то динамика системы может быть описана уравнениями Лагранжа с неопределёнными множителями $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = v, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial v} - \frac{\partial T^*}{\partial q} = -\frac{\partial V^*}{\partial q} - \frac{\partial D^*}{\partial v} + Q + R, \tag{3}$$

$$R = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^T \lambda, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r), \quad \varphi_\mu = \frac{\partial f_\mu}{\partial q_i} v_i + \frac{\partial f_\mu}{\partial t}, \quad \mu = 1, \ldots, m.$$

Здесь и в дальнейшем по одинаковым индексам производится суммирование. Непосредственное использование уравнений (1)–(3) связано с накоплением ошибок численного интегрирования, что приводит к неустойчивости решения по отношению к уравнениям связей (1), (2). Общий подход к решению проблемы стабилизации связей сводится к модификации определения выражений множителей Лагранжа для обеспечения стабилизации связей. В конечном итоге подстановка модифицированных множителей Лагранжа в правые части уравнений динамики соответствует построению системы дифференциальных уравнений по известным частным интегралам [6–9].

Для решения задачи стабилизации связей введём добавочные переменные y, z, определяемые равенствами

$$y = f(q, t), \tag{4}$$

$$z = \varphi(q, v, t), \quad z = (\dot{y}, y'), \quad \dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}. \tag{5}$$

С учётом новых переменных будем рассматривать расширенную систему, которой соответствуют лагранжиан $L = L(q, v, y, z, t)$, $L = T - V$, и диссипативная функция $D = D(q, v, y, z, t)$, удовлетворяющие условиям $L(q, v, 0, 0, t) = L^*(q, v, t)$, $L^* = T^* - V^*$, $D(q, v, 0, 0, t) = D^*(q, v, t)$, и на которую действуют силы $Q + R$. Динамика расширенной системы будет описываться уравнениями

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = v, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial v} + Q + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^T \lambda, \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{y}}, \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial y'} = -\frac{\partial D}{\partial y'}, \tag{8}$$

$$y = f(q, t), \quad y' = f'(q, v, t).$$

Если $2L = v^T M(q) v + z^T A(q) z - 2V(q, y)$, то система (6)–(8) принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = v, \quad M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial v} + Q + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^T \lambda,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y}, \quad A\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial D}{\partial z},$$

и легко приводится к виду, разрешённому относительно производных:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = v \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a(q, v, t) + B(q, v, t)\lambda, \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = w(q, v, y, z, t), \tag{10}$$

$$a = M^{-1}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial D}{\partial v} + Q\right), \quad B = M^{-1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^T, \quad w = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} \\ -\frac{\partial D}{\partial y'} \end{pmatrix}.$$

Уравнения (10) составляют систему уравнений возмущений связей. Вектор λ определяется решением уравнения, полученного дифференцированием равенства (5) с учётом уравнений (9), (10):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} v + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a + B\lambda) + \varphi_t = w, \tag{11}$$

После определения вектора λ из выражения (11) система (9) принимает вид:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = v, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = p + B\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}B\right)^{-1} w, \tag{12}$$

$$p = a - B\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}B\right)^{-1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q}v + \frac{\partial \varphi}{\partial v}a + \varphi_t\right).$$

Система (12) в силу построения допускает частные интегралы, определяемые равенствами (1), (2). Если значения q^0, v^0 удовлетворяют условиям $f\left(q^0, t_0\right) = 0$, $\varphi\left(q^0, v^0 t_0\right) = 0$, то при начальных значениях $q\left(t_0\right) = q^0$, $v\left(t_0\right) = v^0$ решение уравнений (12) будет удовлетворять уравнениям связей (1), (2) при всех $t > t_0$, при которых оно существует. Если же $f\left(q^0, t_0\right) = y^0$, $\varphi\left(q^0, v^0 t_0\right) = z^0$, то изменение соответствующего решения будет зависеть от правых частей уравнений возмущений связей (10), определяемых выбором функций $L = L(q, v, y, z, t)$ и $D = D(q, v, y, z, t)$.

3. Устойчивость по отношению к уравнениям связи

Необходимым условием стабилизации связей, заданных уравнениями (1), (2), является асимптотическая устойчивость решений уравнений (12) по отношению к уравнениям связей (1), (2), которая определяется соответствующей устойчивостью тривиального решения $y = 0$, $z = 0$ системы уравнений возмущений связей (10).

Определение 1. Движение, соответствующее решению уравнений (12), устойчиво по отношению к уравнениям связей (1), (2), если для любого ε существует такое δ, что при любых начальных условиях $q\left(t_0\right) = q^0$, $v\left(t_0\right) = v^0$, удовлетворяющих условию $\left\|y^0\right\| + \left\|z^0\right\| \leqslant \delta$, при всех $t > t_0$ будет выполняться неравенство $\|y(t)\| + \|z(t)\| \leqslant \varepsilon$.

Определение 2. Движение, соответствующее решению уравнений (12), асимптотически устойчиво по отношению к уравнениям связей (1), (2), если оно устойчиво и выполняется условие $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\|y(t)\| + \|z(t)\|\right) = 0$.

Таким образом, решение уравнений (12) устойчиво по отношению к уравнениям связей (1), (2), если соответствующим свойством обладает тривиальное решение уравнений возмущений связей (10). Полагая переменные y, z малыми по величине, представим функцию $w(q, v, y, z, t)$ разложением в ряд, ограничиваясь членами первого порядка малости:

$$w = C(q, v, t)y + K(q, v, t)z + W^{(2)}.$$

В общем случае условия устойчивости тривиального решения системы (10) определяются методом функций Ляпунова [10]. Соответствующим выбором функций L, D уравнения возмущений связей непосредственно можно представить в виде системы уравнений, линейных по отношению к переменным y, z:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = C(q,v,t)y + K(q,v,t)z. \tag{13}$$

В случае, когда матрицы C, K являются постоянными и корни характеристического уравнения системы (13) имеют отрицательные действительные части, тривиальное решение $y = 0$, $z = 0$ является устойчивым асимптотически. Обычно для стабилизации связей используются простейшие уравнения из множества, заданного выражениями (13). Так, в [11] множители Лагранжа определяются из уравнений с постоянными коэффициентами ω, $\alpha > 0$, $k > 0$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \dot{f}, \quad \frac{\mathrm{d}\dot{f}}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 f - 2\alpha\dot{f}, \quad \frac{\mathrm{d}f'}{\mathrm{d}t} = -kf'.$$

Уравнения

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \dot{f}, \quad \frac{\mathrm{d}\dot{f}}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 f - 2\omega\dot{f}$$

используются в [16] для стабилизации голономных связей, наложенных на механическую систему.

4. Стабилизация связей

Представим уравнения (4), (5), (12), (13) в виде:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = b(x,t) + G(x,t)u, \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = H(x,t)u, \tag{15}$$

$$u = h(x,t), \tag{16}$$

$$x = \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} f \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}B\right)^{-1} H \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & S \\ C & K \end{pmatrix}, \quad S = (I_m \; 0),$$

Стабилизация связей позволяет обеспечить устойчивость по отношению к уравнениям связей (1), (2) даже при использовании простейших численных методов решения уравнений (14), (16). Пусть начальные значения q^0, v^0 удовлетворяют условию $\left\|u^0\right\| \leqslant \varepsilon$, $u^0 = h\left(x^0, t_0\right)$, и для решения уравнения (14) используется метод Эйлера:

$$x^{k+1} = x^k + \tau X^k,$$

$$X^k = b\left(x^k, t_k\right) + G\left(x^k, t_k\right)u^k, \quad u^k = h\left(x^k, t_k\right), \quad \tau = t_{k+1} - t_k.$$

Тогда, учитывая разложение функции $u^{k+1} = h\left(x^{k+1}, t_{k+1}\right)$ в ряд и уравнение (15), имеем:

$$u^{k+1} = \left(I_{2m+r} + \tau H^k\right)u^k + U^{(k2)}, \tag{17}$$

где $U^{(k2)}$ — погрешность, определяемая остаточным членом разложения в ряд и погрешностями округления. Оценивая правую часть равенства (17), получаем

$$\left\|u^{k+1}\right\| = \left\|\left(I_{2m+r} + \tau H^k\right)\right\| \left\|u^k\right\| + \left\|U^{(k2)}\right\|. \tag{18}$$

Следовательно, если $\left\|u^k\right\| \leqslant \varepsilon$, $\left\|U^{(k2)}\right\| \leqslant (1-\gamma)\varepsilon$ и матрица $H(x,t)$ при всех допустимых значениях x, t удовлетворяет условию $\left\|\left(I_{2m+r} + \tau H^k\right)\right\| \leqslant \gamma < 1$, то будет выполняться ограничение $\left\|u^{k+1}\right\| \leqslant \varepsilon$. Последнее заключение означает, условие $\left\|u^k\right\| \leqslant \varepsilon$ будет выполняться при всех $k = 1, 2, \ldots$.

Если для решения уравнений (14), (16) используется разностная схема второго порядка точности

$$x^k = x^k + \Delta x^k, \quad \Delta x^k = \tau(1-\sigma)X^k + \tau\sigma\bar{X}^k, \quad \sigma > 0, \tag{19}$$

$$\bar{X}^k = b\left(\bar{x}^k, t_k + \alpha\tau\right) + G\left(\bar{x}^k, t_k + \alpha\tau\right)\bar{u}^k,$$

$$\bar{x}^k = x^k + \alpha\tau X^k, \quad \alpha > 0, \quad 2\alpha\sigma = 1,$$

то оценка правых частей равенств (19) позволяет утверждать, что условие $\left\|u^k\right\| \leqslant \varepsilon$ будет выполняться для всех $k = 1, 2, \ldots$ при выполнении ограничений

$$\left\| U^{k(3)} \right\| \leqslant (1-\gamma)\varepsilon, \qquad \left\| \left(I_{2m+r} + \tau H^k + \frac{1}{2}\left(\left(H^k\right)^2\right) + \left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right)^k \right) \right\| \leqslant \gamma < 1.$$

Ограничения, накладываемые на коэффициенты уравнений возмущений связей при использовании метода Рунге-Кутта, получены в [17]. Для разностной схемы четвёртого порядка они составляют неравенства

$$\left\| U^{k(5)} \right\| \leqslant (1-\gamma)\varepsilon, \quad \left\| I_{2m+r} + \sum_{s=1}^{4} \frac{\tau^s}{s!} H_s^k \right\| \leqslant \gamma < 1,$$

$$H_1 = H, \quad H_2 = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} + H^2, \quad H_3 = \frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}H + H^3,$$

$$H_4 = \frac{\mathrm{d}^3 H}{\mathrm{d}t^3} + 4\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}t^2}H + 3\left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 6\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}H^2 + H^4.$$

5. Задача баланса стержня

Тележка массы m_1 в однородном поле силы тяжести может совершать прямолинейное движение вдоль горизонтальной оси Ox прямоугольной системы координат Oxy под действием силы F. Положение тележки на оси Ox определяется координатой x точки O_1, в которой шарнирно закреплён однородный стержень O_1A длины $2l$ и массы m_2 (рис. 1).

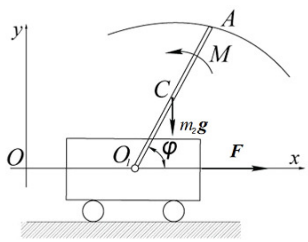

Рис. 1. Мобильный робот

Определить величину F силы и значение вращающего момента M, приложенного к стержню, необходимых для перевода тележки из положения $x(0) = x_0$ в начало координат $x = 0$ с сохранением вертикального положения стержня.

Динамика системы описывается уравнениями

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v, \quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega, \tag{20}$$

$$lD(\varphi)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m_2 l\cos\varphi\left(4l\omega^2 - 3g\sin\varphi\right) + 4lF + 3\sin\varphi M, \tag{21}$$

$$l^2 D(\varphi)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 3m_2 l^2\omega^2\sin 2\varphi - 3gl\left(m_1+m_2\right)\cos\varphi + (3l\sin\varphi)F + \frac{3\left(m_1+m_2\right)}{m_2}M,$$
$$D(\varphi) = 4m_1 + m_2\left(1+3\cos^2\varphi\right), \tag{22}$$

где φ — угол наклона стержня, по отношению к оси Ox, g — ускорение свободно падающего тела. За уравнения связей примем равенства

$$x = 0, \quad \varphi - \frac{\pi}{2} = 0, \tag{23}$$

соответствующие конечному состоянию системы. Функции F и M в правых частях уравнений (21), (22) являются управляющими воздействиями, которые должны обеспечить стабилизацию связей (23). Полагая величины

$$f_1 = x, \quad f_2 = \varphi - \pi/2 \tag{24}$$

возмущениями связей, представим уравнения возмущений линейной системой

$$\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t} = g_1, \quad \frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}t} = -k_{11}f_1 - k_{12}g_1, \tag{25}$$

$$\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}t} = g_2, \quad \frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}t} = -k_{21}f_2 - k_{22}g_2, \quad k_{ij} > 0, \quad i,j = 1,2. \tag{26}$$

Из (19)–(25) определяются выражения управляющих воздействий F, M:

$$F = m_2 l\sin\varphi\big(k_{21}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + k_{22}\omega\big) - m_2 l\omega^2\cos\varphi - \left(m_1+m_2\right)\left(k_{11}x + k_{12}v\right), \tag{27}$$

$$M = m_2 l\left(g\cos\varphi - \left(k_{11}x + k_{12}v\right)\sin\varphi + \frac{4l}{3}\left(k_{21}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + k_{22}\omega\right)\right). \tag{28}$$

Подстановка полученных выражений (27), (28) в правые части уравнений динамики (20)–(22) позволяет получить закон движения системы и решение уравнений возмущений связей, соответствующие начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad v(0) = v_0, \quad \omega(0) = \omega_0,$$

$$f_1(0) = x_0, \quad f_2(0) = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}, \quad g_1(0) = v_0, \quad g_2(0) = \omega_0.$$

Численный эксперимент проведён при значениях параметров $l = 1$, $m_1 = 10$, $m_2 = 1$, $g = 9{,}81$ и при начальных условиях $x_0 = 0{,}1$, $v_0 = 0$, $\varphi_0 = \frac{5}{12}\pi$, $\omega_0 = 0$. При значениях коэффициентов уравнений возмущений связей $k_{11} = 1$, $k_{12} = 0{,}3$, $k_{21} = 0{,}05$, $k_{22} = 0{,}1$ характеристическое уравнение системы (24), (25) имеет корни $\lambda_{1,2} = -0{,}15 \pm 0{,}9887\,i$, $\lambda_{3,4} = -0{,}05 \pm 0{,}2179\,i$, и тривиальное решение $f_1 = f_2 = g_1 = g_2 = 0$ устойчиво асимптотически. Представлены графики изменения переменных $x = x(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ и фазовый портрет системы в осях (x, φ), полученные решением системы (20)–(22) методом Эйлера с шагом интегрирования $h = 0{,}01$ с использованием системы Maple (рис. 2, 3).

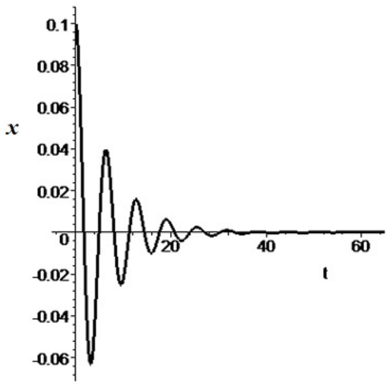

Рис. 2. Изменение центра тележки во времени

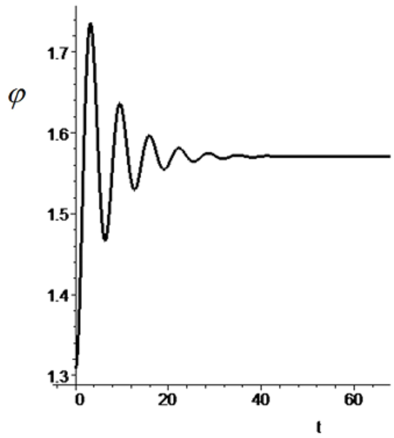

Рис. 3. Изменение угла наклона стержня во времени

Литература

1. *Ольсон Г.* Динамические аналогии. — М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1947. — 224 с.
2. *Layton R. A.* Principles of Analytical System Dynamics. — New York: Springer, 1998. — 158 p.
3. *Сиразетдинов Т. К.* Динамическое моделирование экономических объектов. — Казань: Фэн, 1996. — 223 с.
4. *Галиуллин А. С.* Некоторые вопросы устойчивости программного движения. — Казань: Таткнигоиздат, 1960. — 86 с.
5. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. — М.: Наука, 1986. — 224 с.
6. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикладная математика и механика. — 1952. — Т. 21, № 6. — С. 659–670.
7. *Мухарлямов Р. Г.* Построение множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданные интегралы // Дифференциальные уравнения. — 1967. — Т. 3, № 2. — С. 180–192.
8. *Мухарлямов Р. Г.* К обратным задачам качественной теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1967. — Т. 3, № 10. — С. 1673–1681.
9. *Мухарлямов Р. Г.* О построении дифференциальных уравнений оптимального движения по заданному многообразию // Дифференциальные уравнения. — 1971. — Т. 7, № 10. — С. 1825–1834.
10. *Мухарлямов Р. Г.* О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Дифференциальные уравнения. — 1969. — Т. 5, № 4. — С. 688–699.
11. *Baumgarte J.* Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1972. — No 1. — Pp. 1–16.
12. *Мухарлямов Р. Г.* О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39, № 3. — С. 343–353.
13. *Мухарлямов Р. Г.* Стабилизация движений механических систем на заданных многообразиях фазового пространства // Прикладная математика и механика. — 2006. — Т. 70, № 2. — С. 236–249.

14. *Мухарлямов Р. Г.* Дифференциально-алгебраические уравнения программных движений лагранжевых динамических систем // Известия РАН. Механика твёрдого тела. — 2011. — № 4. — С. 50–61.
15. *Шорохов С. Г.* Математические модели оценки финансовых активов. Учебное пособие. — М.: РУДН, 2012. — 100 с.
16. Stabilization of Constrained Mechanical Systems with DAEs and Invariant Manifolds / U. M. Ascher, Hongsheng, Chin et al. // Journal of Mechanics of Structures and Machines. — 1995. — No 23. — Pp. 135–158.
17. *Mukharlyamov R. G., Assaye W. B.* Solving Differential Equation of Motion for Constrained Mechanical Systems // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics". — 2013. — No 3. — Pp. 81–92.

UDC 519.711.3, 531

Dynamic Control of Constrained Systems and Inverse Problems of Dynamics

R. G. Mukharlyamov, E. A. Gorschkov

Department of Theoretical physics and Mechanics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

The control problem of dynamic system, containing different physical elements, is solved. Using known dynamic analogies, processes in difficult system are described by the differential-algebraic equations of the classical mechanics. The corresponding differential-algebraic equations include the dynamic equations, the constraints equations and the formulation of purpose of control. Dynamics of system is described by Lagrange equations or by equations in the canonical variables, containing indeterminate multipliers in the right hand sides. The problem of definition of Lagrange multipliers or control functions corresponding to the constraints equations, is reduced to construction of the differential equations systems having partial integrals. Definition of solutions stability of the dynamics equations in relation to the constraints equations is given. The dynamic indicators considering deviations from the constraints equations are entered for ensuring asymptotic stability and constraints stabilization at the numerical solution of the differential equations. The expanded system of dynamics equations, consisting of the initial system dynamics equations and the constraints perturbations equations is under construction. The constraints perturbations equations, constructed on the modified dynamic indicators, allow to define stability conditions and constraints stabilization. Conditions of constraints stabilization, corresponding to the numerical solution of the dynamics equations are given by Euler method and Runge–Kutta method. The solution of a problem of stabilization of vertical position of the rod fixed by cylindrical joint on the cart, making rectilinear movement, is proposed. The control is performed by force acting on the cart and moment applied to the rod.

Key words and phrases: dynamics, control, stability, stabilization, constraints, constrained systems, inverse problems.

References

1. G. Olson, Dynamic Analogies, State Publishing House of Foreign Literature, Moscow, 1947, in Russian.
2. R. A. Layton, Principles of Analytical System Dynamics, Springer, New York, 1998.
3. T. K. Cirazetdinov, Dynamic Modeling of Economic Objects, Feng, Kazan, 1996, in Russian.
4. A. C. Galiullin, Some Issues of Stability of Programmed Motion, Tatknigoizdat, Kazan, 1960, in Russian.
5. A. C. Galiullin, Methods of Solving Inverse Problems of Dynamics, Nauka, Moscow, 1986, in Russian.

6. N. P. Erugin, Constructing All Sets of Systems of Differential Equations Having a Given Integral Curve, Applied Mathematics and Mechanics 21 (6) (1952) 659–670, in Russian.
7. R. G. Mukharlyamov, Constructing Systems of Differential Equations with Given Integrals, Differential Equations 3 (2) (1967) 180–192, in Russian.
8. R. G. Mukharlyamov, Qualitative Theory of Differential Equations to Inverse Problems, Differential Equations 3 (10) (1967) 1673–1681, in Russian.
9. R. G. Mukharlyamov, On the Construction of Differential Equations of Optimal Motion on a Given Manifold, Differential Equations 7 (10) (1971) 1825–1834, in Russian.
10. R. G. Mukharlyamov, On the Construction of the Set of Systems of Differential Equations of Stable Motion on an Integral Manifold, Differential Equations 5 (4) (1969) 688–699, in Russian.
11. J. Baumgarte, Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (1) (1972) 1–16.
12. R. G. Mukharlyamov, On the Construction of Systems of Differential Equations of Motion of Mechanical Systems, Differential Equations 39 (3) (2003) 343–353, in Russian.
13. R. G. Mukharlyamov, Stabilization of Mechanical Systems on a Given Phase Space Manifold, Applied Mathematics and Mechanics 70 (2) (2006) 236–249, in Russian.
14. R. G. Mukharlyamov, Differential-Algebraic Equations of Programmed Motion in Lagrangian Dynamic Systems, Proceedings of the Academy of Sciences. Solid State Mechanics (4) (2011) 50–61, in Russian.
15. S. G. Shorakov, Mathematical Models for Financial Assets. Textbook, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, 2012, in Russian.
16. U. M. Ascher, Hongsheng, Chin, L. R. Petzold, S. Reich, Stabilization of Constrained Mechanical Systems with DAEs and Invariant Manifolds, Journal of Mechanics of Structures and Machines (23) (1995) 135–158.
17. R. G. Mukharlyamov, W. B. Assaye, Solving Differential Equation of Motion for Constrained Mechanical Systems, Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics" (3) (2013) 81–92.