УДК 519.633.2

О решениях уравнений Максвелла на базе геометрической оптики

М. Д. Малых

Факультет наук о материалах
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Ленинские Горы, Корпус «Б», Москва, Россия, 119991
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Традиционно средства геометрической оптики применяют для отыскания приближенных решений, соответствующих высокочастотному переделу, хотя известно, что, например, разрывы решений уравнений Максвелла распространяются тоже по закону Гюйгенса. В настоящей работе описывается класс точных решений уравнений Максвелла, для описания которых может быть все ещё употреблена геометрическая оптика.

Рассмотрены решения уравнений Максвелла, с которыми можно связать ортогональную систему координат (x_1, x_2, x_3) так, чтобы вектор $\vec{E}$ был направлен по $\vec{e}_2$, а вектор $\vec{H}$ — по $\vec{e}_3$. Найдены условия, которым должны удовлетворять коэффициенты Ламе этой системы координат: $\sqrt{\epsilon\mu}h_1$ не должен зависеть от x_2 и x_3, а логарифмические производные $\epsilon h_1 \dfrac{h_3}{h_2}$ и $\mu h_1 \dfrac{h_2}{h_3}$ по x_1 не должны зависеть от x_2 и x_3 соответственно. Первое условие означает, что x_1-линиями служат лучи геометрической оптики, и это даёт повод называть такие системы координат лучевыми по аналогии с тем, как это принято в геометрической оптике. При этом само решение уравнений Максвелла может быть описано как волна, распространяющая вдоль луча, т.е. как решение двумерного гиперболического уравнения.

Указаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы с решением уравнений Максвелла можно было ассоциировать такую систему координат. Оказывается, что направления векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ не должны меняться со временем, должны быть ортогональны друг другу и состоять в инволюции, то есть $\left(\vec{E} \times \vec{H}, \operatorname{rot}\left[\vec{E} \times \vec{H}\right]\right) = 0$.

Ключевые слова: геометрическая оптика, уравнения Максвелла, лучи, волновой фронт, принцип Ферма.

1. Введение

Традиционно геометрическую оптику употребляют для описания решений уравнений Максвелла в высокочастотном пределе [1], однако её формулы пригодны и в других случаях, например, для описания эволюции разрывов решения этих уравнений [2]. Более того, для слоистых сред идея искать решения уравнений Максвелла в том виде, который подсказывает геометрическая оптика, оказалась очень плодотворной [3]. Однако нельзя ли выделить класс решений уравнений Максвелла, для описания которого все ещё можно употреблять геометрическую оптику при всех $k = \omega/c$? — В настоящей статье мы опишем один такой класс, воспользовавшись техникой, позаимствованной из теории функции Боргниса [4].

2. Лучевая система координат, ассоциированная с электромагнитным полем

Пусть в некоторой области G трёхмерного евклидова пространства задано электромагнитное поле $\vec{E}$ и $\vec{H}$, удовлетворяющее системе уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\mathrm{d}t\vec{E}, \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\mathrm{d}t\vec{H}, \tag{1}$$

Статья поступила в редакцию 10 сентября 2014 г.

где характеризующие среду величины ε, μ будем считать известными скалярными функциями пространственных переменных. Будем предполагать, что с этим решением можно связать ортогональную криволинейную систему координат x_1, x_2, x_3, по ортам которой направлены векторы $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}, \vec{E}$ и $\vec{H}$. Эту новую систему координат будем называть *лучевой системой координат*, ассоциированной с рассматриваемым решением уравнений Максвелла, по причинам ср. [1], §1.3. Разумеется, не с каждым решением уравнений Максвелла можно ассоциировать лучевую систему координат. Например, для плоской волны лучевой системой координат будет декартова система координат, а для суперпозиции двух плоских волн можно построить лучевую систему координат лишь в частных случаях.

Как обычно, обозначим коэффициенты Ламе лучевой системы координат как h_1, h_2, h_3, как $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — векторы, указывающие направления координатных линий, тогда $\vec{E} = E_2\vec{e}_2$, $\vec{H} = H_3\vec{e}_3$. Уравнение $\mathrm{rot}\vec{H} = \varepsilon \mathrm{d}t\vec{H}$ в криволинейной системе координат даёт

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h_2 h_3}\dfrac{\partial}{\partial x_2} h_3 H_3 = 0, \\ \dfrac{c}{h_1 h_3}\dfrac{\partial}{\partial x_1} h_3 H_3 = -\varepsilon \mathrm{d}t E_2, \\ 0 = 0, \end{cases}$$

а уравнение $\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu \mathrm{d}t\vec{H}$ даёт

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h_2 h_3}\dfrac{\partial}{\partial x_3} h_2 E_2 = 0, \\ 0 = 0, \\ \dfrac{c}{h_1 h_2}\dfrac{\partial}{\partial x_1} h_2 E_2 = -\mu \mathrm{d}t H_3. \end{cases}$$

Полагая для краткости $h_2 E_2 = E$, $h_3 H_3 = H$, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_1} E + \dfrac{\mu}{c}\dfrac{h_1 h_2}{h_3}\mathrm{d}t H = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} H + \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{h_1 h_3}{h_2}\mathrm{d}t E = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} E = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} H = 0 \end{cases} \tag{2}$$

как систему, эквивалентную уравнениям Максвелла.

Положим для краткости $m_e = \dfrac{\mu}{c}\dfrac{h_1 h_2}{h_3}$, $\quad m_h = \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{h_1 h_3}{h_2}$ и продифференцируем первое уравнение по x_1:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2} = -\frac{\partial m_e}{\partial x_1}\mathrm{d}t H - m_e \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_1} Hn = \frac{1}{m_e}\frac{\partial m_e}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} E + m_e m_h \frac{\partial^2}{\partial t^2} E.$$

Таким образом, E удовлетворяет гиперболическому уравнению

$$\frac{\partial^2 E}{\partial^2 x_1} - \frac{\varepsilon \mu h_1^2}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial \ln m_e}{\partial x_1}\frac{\partial E}{\partial x_1}. \tag{3}$$

Переменные x_2 и x_3 входят в это уравнение только как параметры, от которых могут зависит его коэффициенты $\varepsilon\mu h_1^2$ и $\dfrac{\partial \ln m_e}{\partial x_1}$.

Третье уравнение в системе (2) означает, что решение этого уравнения не должно зависеть от x_3, что возможно лишь тогда, когда его коэффициенты не зависят от x_3. Аналогично, H удовлетворяет гиперболическому уравнению

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} - \frac{\varepsilon\mu h_1^2}{c^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{\partial \ln m_h}{\partial x_1}\frac{\partial H}{\partial x_1}, \tag{4}$$

коэффициенты которого в силу четвёртого уравнения системы (2) не должны зависеть от x_2. Суммируя вместе найденные условия, видим, что коэффициенты Ламе лучевой системы координат непременно удовлетворяют трём условиям:
1) $\sqrt{\varepsilon\mu}h_1$ не зависит от x_2 и x_3;
2) логарифмическая производная $m_h = \varepsilon h_1 \dfrac{h_3}{h_2}$ по x_1 не зависит от x_2;
3) логарифмическая производная $m_e = \mu h_1 \dfrac{h_2}{h_3}$ по x_1 не зависит от x_3.

Проделывая выкладки в обратном порядке, можно убедиться в том, что всякой ортогональной системе координат, удовлетворяющей трём выписанным свойствам, отвечает решение уравнений Максвелла.

Пример. Рассмотрим сферическую систему координат в предположении, что ε и μ постоянны. Имеем $x_1 = r$, $x_2 = \theta, x_3 = \varphi$, $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r\sin\theta$, тогда $\frac{h_2}{h_3} = \csc\theta$ и производная этого ворожения по r равна нулю. Значит, все три условия выполнены, и в нашем распоряжение появляется хорошо известное решение уравнений Максвелла — сферическая волна. Переменные θ и φ можно менять ролями, но их нельзя взять за x_1, поскольку линии x_1 — всегда лучи геометрической оптики, то есть при постоянных ε и μ — прямые.

Первое из выписанных условий означает, что координатные линии x_1 представляют собой лучи геометрической оптики, что и оправдывает использованное выше называние для рассматриваемой криволинейной системы координат. В самом деле, пусть точки A и B лежат на одной координатной кривой x_1, тогда оптическая длина дуги произвольной кривой, соединяющей эти точки, равна

$$\int\limits_A^B \sqrt{\varepsilon\mu}\mathrm{d}s = \int \sqrt{\varepsilon\mu h_1^2 + \varepsilon\mu h_2^2\left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\right)^2 + \varepsilon\mu h_3^2\left(\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}x_1}\right)^2}\mathrm{d}x_1.$$

Эта величина будет минимальной, если взять в качестве кривой дугу самой координатной кривой, когда

$$\int\limits_A^B \sqrt{\varepsilon\mu}\mathrm{d}s = \int\limits_{x_1=a}^{b} \sqrt{\varepsilon\mu}h_1\mathrm{d}x_1.$$

Разумеется, координатные поверхности $x_1 = a$ и $x_1 = b$ отстоят друг от друга на постоянную величину

$$\int\limits_{x_1=a}^{b} \sqrt{\varepsilon\mu}h_1\mathrm{d}x_1$$

и представляют собой волновую поверхность (поверхность постоянной фазы).

Уравнение (3) представляет собой уравнение колебаний, дополненное ещё одним членом с m_e. Поэтому можно сказать, что поле $\vec{E}$, равно как и поле $\vec{H}$, представляют собой волны, распространяющиеся вдоль лучей. Эти волны могут иметь разрывы, динамику которых описал Люнебург, а могут зависеть от t как $\sin(\omega t)$. В этом случае нетрудно выписать решение (3) в виде асимптотического ряда по степеням $k = \omega/c \gg 1$.

По методу ВКБ решение уравнения

$$u'' - \frac{m'}{m}u' + k^2 n^2 u = 0 \tag{5}$$

при больших k ищут в виде ряда по степеням $\dfrac{1}{k}$:

$$u = e^{k\int(u_0 + u_1 k^{-1} + \dots)\mathrm{d}x}.$$

Для отыскания коэффициентов $u_0, u_1, \dots,$ составим

$$u' = u(ku_0 + u_1 + \dots),$$
$$u'' = u(ku_0 + u_1 + \dots)^2 + u(ku_0' + u_1' + \dots) = u(k^2 u_0^2 + k(2u_0 u_1 + u_0') + \dots).$$

Подставив эти выражение в уравнение и сравнив коэффициенты при k^2 и k, получим

$$u_0^2 = -n^2, \quad (2u_0 u_1 + u_0') - \frac{m'}{m}u_0 = 0,$$

откуда

$$u_0 = \pm in, \quad u_1 = \frac{m'}{2m} \mp \frac{n'}{2n}.$$

Последнее означает, что

$$\int u_1 \mathrm{d}x = \ln\sqrt{m} - \ln\sqrt{n}.$$

Таким образом, получаются два решения уравнения

$$u = \sqrt{\frac{m}{n}} e^{\pm ik\int n\mathrm{d}x}.$$

Полагая в уравнение (3) $Ee^{-i\omega t}$ вместо E, получим уравнение (5), коэффициентами в котором служат

$$m = m_e = \mu h_1 \frac{h_2}{h_3}, \quad n = \sqrt{\varepsilon\mu}h_1,$$

а x_1 играет роль x. Это уравнение допускает два решения

$$\sqrt[4]{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{\frac{h_2}{h_3}} e^{\pm ik\int\sqrt{\varepsilon\mu}h_1\mathrm{d}x_1},$$

а значит, решение, представляющее собой волну частоты ω, бегущую вдоль луча, можно представить только как

$$E = g(x_3)\sqrt[4]{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{\frac{h_2}{h_3}}\sin\left(k\int\sqrt{\varepsilon\mu}h_1\mathrm{d}x_1 - \omega t\right),$$

где g — несущественная для нас функция, которая не может быть произвольной, поскольку через E можно выразить H, а эта функция не зависит от x_3.

3. Условия, при которых с полем можно ассоциировать лучевую систему координат

Если с решением уравнений Максвелла можно ассоциировать лучевую систему координат, то, во-первых, направления векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ не должны меняться со временем, поскольку лучевая не должна зависеть от t. Поскольку система координат должна быть вещественной, мы здесь избегаем записи полей в комплексной форме.

Во-вторых, векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ должны быть ортогональны друг другу с тем, чтобы лучевая система могла быть ортогональной. Если не выполнено это условие, поле нельзя считать подобным плоской волне даже в малом, а между тем это предположение делают очень часто. Нельзя не заметить, что ортогональность $\vec{E}$ и $\vec{H}$ имеет и весьма нетривиальный геометрический смысл. Как известно, величины $\vec{E}$ и $\vec{B}$, описывающие электромагнитное поле, нельзя считать векторами в полном смысле этого слова, правильным объектом является лишь составленный из них шестивектор

$$(F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Однако если векторное поле можно вообразить как множество стрелок, то шестивектору не отвечает какой-либо наглядный геометрический объект. Если обратиться к предыстории, то можно заметить, что впервые шестивекторы возникли в работах Юлиуса Плюкера (Julius Plücker) как координаты проективных прямых в $\mathbb{P}^3$ [5]. Однако шестивектору отвечает прямая лишь в том случае, если его компоненты удовлетворяют уравнению Плюкера

$$F_{12}F_{34} + F_{13}F_{42} + F_{14}F_{23} = 0,$$

которое в данном случае означает, что

$$0 = F_{12}F_{34} - F_{13}F_{24} + F_{23}F_{14} = -cB_z iE_z - cB_y iE_y - cB_x iE_x = -ic(\vec{E}, \vec{B}).$$

Иными словами, электромагнитное поле, в котором $\vec{E}$ и $\vec{B}$ ортогональны друг другу во всех рассматриваемых точках пространства и в любое время, можно вообразить как сопоставление точке пространства и моменту времени прямой в $\mathbb{P}^3$. Такие поля будем называть далее *плюкеровыми*. В нашей работе [6] было показано, что всякое плюкерово поле, удовлетворяющее первой четвёрке уравнений Максвелла $\mathrm{rot} F = 0$, выражается через две скалярные функции. Однако получить обозримые следствия второй четвёрки уравнений Максвелла в декартовой системе координат не удалось.

В-третьих, поверхности постоянной фазы $\varphi(x, y, z) = \mathrm{const}$ ортогональны обоим векторам $\vec{E}$ и $\vec{H}$, то есть система уравнений

$$(\vec{E}, \nabla\varphi) = 0, \quad (\vec{H}, \nabla\varphi) = 0 \tag{6}$$

имеет непостоянное решение. В силу теоремы Фробениуса [7] система уравнений

$$(\vec{A}, \nabla\varphi) = 0, \quad (\vec{B}, \nabla\varphi) = 0$$

имеет непостоянное решение в том и только в том случае, когда поля $\vec{A}$ и $\vec{B}$ состоят в инволюции, то есть когда коммутатор $(\vec{A},\nabla)\vec{B}-(\vec{B},\nabla)\vec{A}$ принадлежит линейно оболочке, натянутой на векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$. В интересующем нас случае трёх измерений, это означает, что

$$([\vec{A}\times\vec{B}],(\vec{A},\nabla)\vec{B}-(\vec{B},\nabla)\vec{A})=0.$$

Используя известное выражение для ротора

$$\mathrm{rot}[\vec{A}\times\vec{B}]=(\vec{B},\nabla)\vec{A}-(\vec{A},\nabla)\vec{B})+\left(\div\vec{B}\right)\vec{A}-\left(\div\vec{A}\right)\vec{B},$$

условие инволюции можно переписать кратко так

$$([\vec{A}\times\vec{B}],\mathrm{rot}[\vec{A}\times\vec{B}])=0.$$

Это позволяет переписать условие разрешимости (6) в виде легко обозримого равенства

$$(\vec{S},\mathrm{rot}\vec{S})=0, \tag{7}$$

где $\vec{S}=[\vec{E}\times\vec{H}]$ — вектор Умова.

По аналогии с третьим условием можно высказать ещё два. Замена переменных

$$x_1=\varphi_1(x,y,z),\quad x_2=\varphi_2(x,y,z),\quad x_3=\varphi_3(x,y,z)$$

задаёт три семейства поверхностей

$$\varphi_1(x,y,z)=C_1,\quad \varphi_2(x,y,z)=C_2,\quad \varphi_3(x,y,z)=C_3,$$

касающихся двух из трёх векторов $\vec{E},\vec{H}$ и $\vec{S}$. Поэтому пара векторов $\vec{H}$ и $\vec{S}$, равно как пара $\vec{E}$ и $\vec{S}$, должны состоять в инволюции. Но эти условия несущественны, поскольку для плюкеровых полей векторы $\vec{H}$ и $\vec{S}$, равно как $\vec{E}$ и $\vec{S}$, всегда состоят в инволюции. В самом деле, найдётся такой скаляр α, что

$$[\vec{H}\times\vec{S}]=\alpha\vec{E},$$

поэтому $([\vec{H}\times\vec{S}],\mathrm{rot}[\vec{H}\times\vec{S}])=\alpha(\vec{E},\alpha\mathrm{rot}\vec{E}-[\vec{E}\times\nabla\alpha])=\alpha^2(\vec{E},\mathrm{rot}\vec{E})$. В силу уравнений Максвелла вектор $\mathrm{rot}\vec{E}$ направлен по $\vec{H}$, а значит, выписанное скалярное произведение равно нулю.

Нетрудно доказать, что, по крайне мере локально, этих трёх условий достаточно для существования лучевой системы координат. В самом деле, третье условие позволит задать три семейства поверхностей

$$\varphi_1(x,y,z)=C_1,\quad \varphi_2(x,y,z)=C_2,\quad \varphi_3(x,y,z)=C_3,$$

касающихся двух из трёх векторов $\vec{E},\vec{H}$ и $\vec{S}$, ортогональных в силу второго условия. Поэтому замена переменных $x_1=\varphi_1(x,y,z)$, $x_2=\varphi_2(x,y,z)$, $x_3=\varphi_3(x,y,z)$ даст ортогональную систему координат, обладающую всеми свойствами лучевой системы.

4. Заключение

Собирая вмести утверждения последних двух разделов, имеем следующее: с некоторыми частными решениями уравнений Максвелла (1) можно связать специальные системы ортогональных координат (x_1,x_2,x_3), в которых x_1-линиями служат лучи геометрической оптики, вдоль которых распространяются электромагнитные волны, описываемые одномерным волновым уравнением (3). Эти системы координат была названы выше лучевыми. Для того, чтобы с решением уравнений Максвелла можно было ассоциировать такую систему координат, необходимо и достаточно, чтобы направления векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$

1) не менялись со временем;
2) были ортогональны;
3) состояли в инволюции, т.е.

$$\left(\vec{E} \times \vec{H}, \mathrm{rot}\left[\vec{E} \times \vec{H}\right]\right) = 0.$$

Литература

1. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — Москва: Наука, 1972.
2. *Luneburg R. K.* Mathematical Theory of Optics. — Providence, Rhode Island: Brown University, 1944.
3. Адиабатические моды плавно-нерегулярного оптического волновода: нулевое приближение векторной теории / А. А. Егоров, А. Л. Севастьянов, Э. А. Айрян и др. // Математическое моделирование. — 2010. — Т. 22, № 8. — С. 42–54.
4. *Свешников А. Г., Могилевский И. Е.* Математические задачи теории дифракции. — Москва: Физический факультет МГУ, 2010.
5. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. — Т. 2.
6. *Малых М. Д.* Геометрическая интерпретация тензора электромагнитного поля с ортогональными компонентами $\vec{E}$ и $\vec{B}$ // Вестник МГУ. Сер. 3. — 2008. — № 3. — С. 6–9.
7. *Каратеодори К.* Вариационное исчисление и дифференциальные уравнения первого порядка в частных производных. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012.

UDC 519.633.2

On Solutions of the Maxwell's Equations from the Viewpoint of Geometrical Optics

M. D. Malykh

Faculty of Materials Sciences
Lomonosov Moscow State University
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, Russian Federation, 119991
Department of Applied Informatics and Probability Theory
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russian Federation, 117198

Traditionally ideas of geometrical optics apply to research of the approximate solutions corresponding to high-frequency limit, but it is known that, e.g. jumps of solutions of the equations of Maxwell satisfy to Huygens's law also. In the article we indicate the class of exact solutions of the Maxwell's equations for which the approach of the geometrical optics can be still used.

We consider solutions of the Maxwell's equations with which it is possible to associate orthogonal system of coordinates of (x_1, x_2, x_3) so that the directions of vectors $\vec{E}$ and $\vec{e}_2$ and also $\vec{H}$ and $\vec{e}_3$ are coincided. Conditions on Lamé coefficients of this system of coordinates are found: $\sqrt{\varepsilon\mu}h_1$ doesn't depend on x_2 and x_3 and logarithmic derivatives $\varepsilon h_1 \dfrac{h_3}{h_2}$ and $\mu h_1 \dfrac{h_2}{h_3}$ with respect to x_1 don't depend on x_2 and x_3 respectively. The first condition means that x_1-lines are rays of geometrical optics and it gives a reason to call such systems of coordinates as ray systems how it is accepted in geometrical optics. Thus the solution of the Maxwell's equations can be described as a wave extending along a ray, that is as the solution of the two-dimensional hyperbolic equation. Necessary and sufficient conditions are found for association of such coordinates systems with the solution of the equations of Maxwell: the directions of vectors $\vec{E}$ and $\vec{H}$ don't change over time, they are orthogonal each other and consist in involution, that is $\left(\vec{E} \times \vec{H}, \operatorname{rot}\left[\vec{E} \times \vec{H}\right]\right) = 0$.

Key words and phrases: geometrical optics, Maxwell's equations, rays, wavefront, Fermat's principle.

References

1. V. M. Babich, V. S. Buldyrev, Asymptotic Methods in Problems of Shortwaves Diffraction, Nauka, Moskva, 1972, in Russian.
2. R. K. Luneburg, Mathematical Theory of Optics, Brown University, Providence, Rhode Island, 1944.
3. A. A. Egorov, A. L. Sevastyanov, E. A. Ayryan, K. P. Loveckiy, L. A. Sevastyanov, Adiabatic Modes of a Smooth and Irregular Optical Wave Guide, Mathematical Models and Computer Simulations 22 (8) (2010) 42–54, in Russian.
4. A. G. Sveshnikov, I. E. Mogilevskiy, Mathematical Problems of the Theory of Diffraction, MSU, Moskva, 2010, in Russian.
5. F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Vol. 2, Julius Springer Verlag, Berlin, 1927.
6. M. D. Malyh, Geometric interpretation of the tensor of an electromagnetic field with orthogonal components e and b, Moscow University Physics Bulletin 63 (6) (2008) 374–377, in Russian.
7. K. Caratéodory, Variationsrechnungen und partielle Differentialgleichungen ersten Ordnung, Vol. 1, B.G. Teubner, Leipzig, 1956.