УДК 517.55

Двухточечная задача Дирихле для дифференциально-операторного уравнения второго порядка в локально выпуклом пространстве

Н. А. Аксёнов

Орловский государственный университет
ул. Комсомольская, д.95, г. Орёл, 302026, Россия

В работе описывается метод, позволяющий находить решение задачи Дирихле для дифференциально-операторных уравнений второго порядка в произвольном локально выпуклом пространстве.

Ключевые слова: задача Дирихле, дифференциально-операторное уравнение, локально выпуклое пространство, порядок оператора, тип оператора.

1. Введение

Особое место в теории краевых задач занимает задача Дирихле. Будучи подробно изученной для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, эта задача продолжает вызывать большой интерес. Во многом это обусловлено как дальнейшим развитием самой математики, так и различных её приложений к физике, механике и другим дисциплинам. При этом становится всё более очевидным тот факт, что исследование многочисленных краевых задач (в частности, задачи Дирихле) для дифференциальных, интегро-дифференциальных, разностных и других видов уравнений может быть сведено к решению краевых задач для дифференциально-операторных уравнений в абстрактных пространствах.

За последние несколько десятилетий рассмотрению задачи Дирихле в абстрактном (в основном, банаховом) пространстве посвящено достаточное количество научных работ (например, [1–8]). Как правило, исследование задач для дифференциально-операторных уравнений (в том числе вопросов, связанных с их корректностью) проводится с помощью теории полугрупп [9, 10].

Однако ненормируемость многих функциональных пространств подталкивает к изучению краевых задач в произвольном локально выпуклом пространстве. В пользу подобных исследований свидетельствует и то, что публикации по этой проблематике практически отсутствуют в русскоязычной литературе.

Для исследования поставленной ниже задачи Дирихле мы будем применять характеристики линейного оператора (порядок и тип), а также фиксированного вектора относительно линейного оператора, введённые В.П. Громовым [11, 12] и получившие дальнейшее развитие в работах С.Н. Мишина [13–15].

2. Постановка задачи. Теорема существования и единственности решения

Пусть H — счётно-полное локально выпуклое пространство с топологией, определяемой мультинормой $\{\|\cdot\|_p\}$, $p \in \mathcal{P}$ и пусть $A : H \to H$ — линейный непрерывный оператор. Обозначим $D_\infty(A) = \bigcap\limits_{l \geqslant 0} D(A^l)$, где $D(A^l)$ — область определения оператора A^l, $l \geqslant 0$. Всюду далее предполагается, что $D_\infty(A) \neq \emptyset$.

Рассмотрим уравнение

$$u''(t) = Au(t), \tag{1}$$

Статья поступила в редакцию 18 июня 2009 г.

для которого поставлена двухточечная задача Дирихле: найти вектор-функцию $u(t)$ (см. [16]), удовлетворяющую уравнению (1) и граничным условиям

$$u(a) = x_1, \quad u(b) = x_2, \quad a \neq b, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad x_1, x_2 \in D_\infty(A). \tag{2}$$

Множество

$$M = \{x \in D_\infty(A) : \beta_p(x) \leqslant 0, \forall p, \text{ при } \quad \beta_p(x) = 0 \quad \alpha_p(x) < \pi^2/|b-a|^2, \forall p\}$$

будем называть множеством исходных данных задачи (1)–(2). Здесь $\beta_p(x)$ и $\alpha_p(x)$ — соответственно операторный p-порядок вектора x и операторный p-тип вектора x относительно оператора A [11–13].

Замечание. Если $\exists p_0 : \beta_{p_0}(x) = 0$, то можно считать, что $\beta_p(x) = 0$, $\forall p$.

Действительно, в монографии [13] приведена теорема: Пусть оператор A имеет p-порядки β_p и порядок β. Если для некоторого $p_0 \in \mathcal{P}$, $\beta_{p_0} = b \leqslant \beta$, то можно выбрать такую мультинорму в H, эквивалентную исходной, что $b \leqslant \beta_p \leqslant \beta$, $\forall p$. В [13] также отмечено, что эта теорема справедлива применительно и к операторным порядкам фиксированного вектора. Учитывая, что $x \in M$, имеем $\beta_p(x) \leqslant 0$, $\forall p$. Поэтому, если $\exists p_0 : \beta_{p_0}(x) = 0$, то в силу сказанного выше можно считать, что $\beta_p(x) = 0$, $\forall p$.

Теорема 1. *$\forall x_1, x_2 \in M$ двухточечная задача Дирихле (1)–(2) имеет единственное решение. Оно является целой вектор-функцией $u(t)$ со значениями в H и задаётся формулой*

$$u(t) = \sum_{i=1}^{3} u_i(t), \tag{3}$$

в которой

$$u_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(x_1)}{(2n)!}(t-a)^{2n}, \tag{4}$$

$$u_2(t) = \frac{1}{b-a} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{c_m A^{m+n}(x_2)}{(2n+1)!}(t-a)^{2n+1}, \tag{5}$$

$$u_3(t) = -\frac{1}{b-a} \sum_{n,m,k=0}^{\infty} \frac{c_m (b-a)^{2k} A^{k+m+n}(x_1)}{(2n+1)!(2k)!}(t-a)^{2n+1}, \tag{6}$$

где c_m — коэффициенты ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m \xi^m$, $|\xi| < \pi^2/|b-a|^2$, определяемые равенствами

$$c_0 = 1, \quad c_m = \frac{2(-1)^m (2^{2m-1} - 1)(b-a)^{2m}}{(2m)!} B_m, \quad m \geqslant 1, \tag{7}$$

B_m — числа Бернулли.

Лемма 1. *Пусть $\beta_p(x_j) < 0$, $\forall p$, $j = 1, 2$. Тогда ряды (4)–(6) сходятся абсолютно по топологии пространства H на всей комплексной плоскости и определяют целые вектор-функции $u_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$.*

Доказательство. Оценим общие члены степенных рядов (4)–(6) по топологии пространства H. Из определения операторного p-порядка вектора относительно оператора вытекает оценка [13]

$$\forall p, \forall \varepsilon > 0, \quad \exists C_p(\varepsilon, x), \quad \forall n : \|A^n(x)\|_p < C_p(\varepsilon, x) n^{(\beta_p(x)+\varepsilon)n}. \tag{8}$$

Используя эту оценку и формулу Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\Theta}{12n}}, \quad 0 < \Theta < 1, \tag{9}$$

для общего члена ряда (4) приходим к оценке: $\forall p$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n$

$$\left\|\frac{A^n(x_1)}{(2n)!}\right\|_p < C_p^{(1)}(\varepsilon)\left(\frac{e}{2}\right)^{2n} n^{(\beta_p(x_1)+\varepsilon-2)n}. \tag{10}$$

Из условия $\beta_p(x_1) < 0$, $\forall p$ и произвольности $\varepsilon > 0$ следует, в силу (10) и аналога формулы Коши–Адамара [16]

$$r_p = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x_n\|_p}}, \quad r = \inf_{(p)} r_p, \tag{11}$$

где r — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n t^n$, определяющего вектор-функцию $f(t)$, что степенной ряд (4) сходится абсолютно по топологии пространства H на всей комплексной плоскости и определяет целую вектор-функцию $u_1(t)$.

Согласно (8)–(9), для общего члена ряда (5) имеем: $\forall p$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n$

$$\begin{gathered}\left\|\frac{1}{(2n+1)!}\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^{m+n}(x_2)\right\|_p \leqslant \left\|\frac{1}{(2n)!}\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^{m+n}(x_2)\right\|_p < \\ < \frac{e^{2n}}{4^n n^{2n}}\sum_{m=0}^{\infty}|c_m|\cdot\|A^{m+n}(x_2)\|_p < \frac{C_p^{(2)}(\varepsilon)e^{2n}}{4^n n^{2n}}\sum_{m=0}^{\infty}|c_m|(m+n)^{(\beta_p(x_2)+\varepsilon)(m+n)} = \\ = \frac{C_p^{(2)}(\varepsilon)e^{2n}}{4^n n^{2n}} n^{(\beta_p(x_2)+\varepsilon)n} + \frac{C_p^{(2)}(\varepsilon)e^{2n}}{4^n n^{2n}}\sum_{m=1}^{\infty}|c_m|(m+n)^{(\beta_p(x_2)+\varepsilon)(m+n)}.\end{gathered} \tag{12}$$

Так как c_m — коэффициенты ряда, сходящегося в круге $|\xi| < \pi^2/|b-a|^2$, то $\forall m$ истинно неравенство

$$|c_m| < M\left(\frac{|b-a|^2}{\pi^2}+\varepsilon_1\right)^m, \quad \varepsilon_1 > 0, \quad 0 < M \equiv \mathrm{const}. \tag{13}$$

Поскольку $\beta_p(x_2) < 0$, $\forall p$, из произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что $\beta_p(x_2)+\varepsilon < 0$, $\forall p$, значит, верно неравенство: $(m+n)^{(\beta_p(x_2)+\varepsilon)(m+n)} \leqslant n^{(\beta_p(x_2)+\varepsilon)n} m^{(\beta_p(x_2)+\varepsilon)m}$. Полученное неравенство и (13) преобразуют оценку (12) к виду: $\forall p$, $\forall \varepsilon_1 > 0$, $\forall n$

$$\begin{gathered}\left\|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_m A^{m+n}(x_2)}{(2n+1)!}\right\|_p < \\ < C_p^{(2)}(\varepsilon)\left(\frac{e}{2}\right)^{2n} n^{(\beta_p(x_2)+\varepsilon-2)n}\left(1 + M\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{|b-a|^2}{\pi^2}+\varepsilon_1\right)^m m^{(\beta_p(x_2)+\varepsilon)m}\right).\end{gathered} \tag{14}$$

Очевидно, что числовой ряд с положительными членами, стоящий в правой части (14), сходится по признаку Коши. Обозначив его сумму через $S_1(p,\varepsilon,\varepsilon_1)$, неравенство (14) перепишем так: $\forall p$, $\forall \varepsilon_1 > 0$, $\forall n$

$$\left\|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_m A^{m+n}(x_2)}{(2n+1)!}\right\|_p < C_p^{(2)}(\varepsilon)(1+MS_1(p,\varepsilon,\varepsilon_1))\left(\frac{e}{2}\right)^{2n} n^{(\beta_p(x_2)+\varepsilon-2)n}. \tag{15}$$

Оценка (15) и формула (11) приводят к утверждению леммы для ряда (5).

Для общего члена ряда (6) имеем в силу (8)–(9): $\forall p$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n$

$$\left\| \sum_{m,k=0}^{\infty} \frac{c_m (b-a)^{2k}}{(2n+1)!(2k)!} A^{m+n+k}(x_1) \right\|_p \leqslant \left\| \sum_{m,k=0}^{\infty} \frac{c_m (b-a)^{2k}}{(2n)!(2k)!} A^{m+n+k}(x_1) \right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{2n}}{4^n n^{2n}} \sum_{m=0}^{\infty} |c_m| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|b-a|^{2k}}{(2k)!} \|A^{m+n+k}(x_1)\|_p <$$

$$< \frac{C_p^{(3)}(\varepsilon) e^{2n}}{4^n n^{2n}} \sum_{m=0}^{\infty} |c_m| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|b-a|^{2k}}{(2k)!} (m+n+k)^{(\beta_p(x_1)+\varepsilon)(m+n+k)} =$$

$$= \frac{C_p^{(3)}(\varepsilon) e^{2n}}{4^n n^{2n}} \sum_{m=0}^{\infty} |c_m| (m+n)^{(\beta_p(x_1)+\varepsilon)(m+n)} + \quad (16)$$

$$+ \frac{C_p^{(3)}(\varepsilon) e^{2n}}{4^n n^{2n}} \sum_{m=0}^{\infty} |c_m| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b-a|^{2k}}{(2k)!} (m+n+k)^{(\beta_p(x_1)+\varepsilon)(m+n+k)}. \quad (17)$$

Учитывая, что $\beta_p(x_1) < 0$, $\forall p$, а $\varepsilon > 0$ — произвольно, аналогично предыдущему случаю, для ряда (16) имеем: $\forall p$, $\forall \varepsilon_1 > 0$, $\forall n$

$$\frac{C_p^{(3)}(\varepsilon) e^{2n}}{4^n n^{2n}} \sum_{m=0}^{\infty} |c_m| (m+n)^{(\beta_p(x_1)+\varepsilon)(m+n)} <$$

$$< C_p^{(3)}(\varepsilon)(1 + M S_2(p, \varepsilon, \varepsilon_1)) \left(\frac{e}{2}\right)^{2n} n^{(\beta_p(x_1)+\varepsilon-2)n}, \quad (18)$$

где $S_2(p, \varepsilon, \varepsilon_1)$ — сумма ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \left(\frac{|b-a|^2}{\pi^2} + \varepsilon_1\right)^m m^{(\beta_p(x_1)+\varepsilon)m}$.

Кроме того, из условия $\beta_p(x_1) < 0$, $\forall p$ и произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает справедливость неравенства

$$(m+n+k)^{(\beta_p(x_1)+\varepsilon)(m+n+k)} \leqslant (m+n)^{(\beta_p(x_1)+\varepsilon)(m+n)} k^{(\beta_p(x_1)+\varepsilon)k},$$

которое в сочетании с (18) приводит для ряда (17) к оценке: $\forall p$, $\forall \varepsilon_1 > 0$, $\forall n$

$$\frac{C_p^{(3)}(\varepsilon) e^{2n}}{4^n n^{2n}} \sum_{m=0}^{\infty} |c_m| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b-a|^{2k}}{(2k)!} (m+n+k)^{(\beta_p(x_1)+\varepsilon)(m+n+k)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_p^{(3)}(\varepsilon) e^{2n}}{4^n n^{2n}} \sum_{m=0}^{\infty} |c_m| (m+n)^{(\beta_p(x_1)+\varepsilon)(m+n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b-a|^{2k}}{(2k)!} k^{(\beta_p(x_1)+\varepsilon)k} <$$

$$< C_p^{(3)}(\varepsilon)(1 + M S_2(p, \varepsilon, \varepsilon_1)) \left(\frac{e}{2}\right)^{2n} n^{(\beta_p(x_1)+\varepsilon-2)n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b-a|^{2k}}{(2k)!} k^{(\beta_p(x_1)+\varepsilon)k}. \quad (19)$$

Нетрудно показать, что числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b-a|^{2k}}{(2k)!} k^{(\beta_p(x_1)+\varepsilon)k} \quad (20)$$

мажорируется сходящимся в силу признака Коши числовым рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b-a|^{2k} e^{2k}}{4^k} k^{(\beta_p(x_1)+\varepsilon-2)k}.$$

Пусть $S_1(p,\varepsilon)$ — сумма ряда (20). Тогда из (18)–(19) следует, что $\forall p$, $\forall \varepsilon_1 > 0$, $\forall n$

$$\left\| \sum_{m,k=0}^{\infty} \frac{c_m (b-a)^{2k}}{(2n+1)!(2k)!} A^{m+n+k}(x_1) \right\|_p <$$

$$< C_p^{(3)}(\varepsilon)(1+S_1(p,\varepsilon))(1+MS_2(p,\varepsilon,\varepsilon_1)) \left(\frac{e}{2}\right)^{2n} n^{(\beta_p(x_1)+\varepsilon-2)n}. \quad (21)$$

Из (21) и (11) вытекает абсолютная сходимость степенного ряда (6) по топологии пространства H $\forall t \in \mathbb{C}$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть* $\beta_p(x_j) = 0$, $\alpha_p(x_j) < \pi^2/|b-a|^2$, $\forall p$, $j = 1,2$. *Тогда ряды (4)–(6) сходятся абсолютно по топологии пространства* H *на всей комплексной плоскости и определяют целые вектор-функции* $u_i(t)$, $i = \overline{1,3}$.

Доказательство. Пусть выполняются условия леммы. В этом случае для оценки общих членов рядов (4)–(6) воспользуемся приведённым в [13] неравенством $\forall p$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, C_p(\varepsilon,x)$, $\forall n : \|A^n(x)\|_p < C_p(\varepsilon,x)(\alpha_p(x)+\varepsilon)^n n^{\beta_p(x)n}$, принимающим при $\beta_p(x) = 0$, $\forall p$ вид

$$\forall p,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, C_p(\varepsilon,x),\ \forall n : \|A^n(x)\|_p < C_p(\varepsilon,x)(\alpha_p(x)+\varepsilon)^n. \quad (22)$$

Аналогично лемме 1, для общего члена ряда (4) в силу (22) имеем оценку

$$\left\| \frac{A^n(x_1)}{(2n)!} \right\|_p < C_p^{(4)}(\varepsilon) \left(\frac{e}{2}\right)^{2n} (\alpha_p(x_1)+\varepsilon)^n n^{-2n}, \quad \forall p,\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall n,$$

из которой, с учётом (11), следует абсолютная сходимость ряда (4) по топологии пространства H на всей комплексной плоскости.

Применяя оценку (22) к общему члену ряда (5), имеем: $\forall p$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n$

$$\left\| \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^{m+n}(x_2) \right\|_p \leqslant \left\| \frac{1}{(2n)!} \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^{m+n}(x_2) \right\|_p <$$

$$< \frac{e^{2n}}{4^n n^{2n}} \sum_{m=0}^{\infty} |c_m| \cdot \|A^{m+n}(x_2)\|_p < \frac{C_p^{(5)}(\varepsilon)(\alpha_p(x_2)+\varepsilon)^n e^{2n}}{4^n n^{2n}} \sum_{m=0}^{\infty} |c_m|(\alpha_p(x_2)+\varepsilon)^m.$$

Из оценки (13) для коэффициентов c_m следует, что числовой ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m|(\alpha_p(x_2)+\varepsilon)^m \quad (23)$$

мажорируется суммой бесконечно убывающей (в силу произвольности $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ и условия $\alpha_p(x_2) < \pi^2/|b-a|^2$, $\forall p$) геометрической прогрессии

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{|b-a|^2}{\pi^2} + \varepsilon_1\right)^m (\alpha_p(x_2)+\varepsilon)^m = \frac{1}{1 - \left(\frac{|b-a|^2}{\pi^2} + \varepsilon_1\right)(\alpha_p(x_2)+\varepsilon)}. \quad (24)$$

Пусть $S_2(p,\varepsilon)$ — сумма ряда (23). Тогда $\forall p$, $\forall n$

$$\left\| \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^{m+n}(x_2) \right\|_p < \frac{C_p^{(5)}(\varepsilon) S_2(p,\varepsilon)(\alpha_p(x_2)+\varepsilon)^n e^{2n}}{4^n n^{2n}}. \quad (25)$$

Оценка (25) и формула (11) устанавливают абсолютную сходимость ряда (5) по топологии пространства H на всей комплексной плоскости.

Наконец, из (22) для общего члена ряда (6) имеем: $\forall p$, $\forall \varepsilon > 0, \forall n$

$$\left\| \sum_{m,k=0}^{\infty} \frac{c_m (b-a)^{2k}}{(2n+1)!(2k)!} A^{m+n+k}(x_1) \right\|_p \leqslant \left\| \sum_{m,k=0}^{\infty} \frac{c_m (b-a)^{2k}}{(2n)!(2k)!} A^{m+n+k}(x_1) \right\|_p <$$
$$< \frac{C_p^{(6)}(\varepsilon)(\alpha_p(x_1)+\varepsilon)^n e^{2n}}{4^n n^{2n}} \sum_{m=0}^{\infty} |c_m| (\alpha_p(x_1)+\varepsilon)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|b-a|^{2k}}{(2k)!} (\alpha_p(x_1)+\varepsilon)^k =$$
$$= \operatorname{ch}\left(|b-a|\sqrt{\alpha_p(x_1)+\varepsilon}\right) \frac{C_p^{(6)}(\varepsilon)(\alpha_p(x_1)+\varepsilon)^n e^{2n}}{4^n n^{2n}} \sum_{m=0}^{\infty} |c_m| (\alpha_p(x_1)+\varepsilon)^m. \quad (26)$$

В силу условия $\alpha_p(x_1) < \pi^2/|b-a|^2$, $\forall p$, ряд, стоящий в (26), мажорируется рядом (24), в котором следует заменить x_2 на x_1. Обозначая через $S_3(p,\varepsilon)$ сумму ряда (23), в котором x_2 заменено на x_1, перепишем (26) следующим образом: $\forall p, \forall n$

$$\left\| \sum_{m,k=0}^{\infty} \frac{c_m (b-a)^{2k}}{(2n+1)!(2k)!} A^{m+n+k}(x_1) \right\|_p <$$
$$< \operatorname{ch}\left(|b-a|\sqrt{\alpha_p(x_1)+\varepsilon}\right) \frac{C_p^{(6)}(\varepsilon) S_3(p,\varepsilon)(\alpha_p(x_1)+\varepsilon)^n e^{2n}}{4^n n^{2n}}. \quad (27)$$

Из (11) и (27) вытекает справедливость утверждения леммы для ряда (6). Лемма доказана. □

Доказательство (теоремы 1). Известно [17, 18], что единственное решение задачи Коши $u''(t) = Au(t)$, $u(0) = y_1$, $u'(0) = y_2$, $y_1, y_2 \in D_\infty(A)$, имеет вид

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(y_1)}{(2n)!} t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(y_2)}{(2n+1)!} t^{2n+1}.$$

Легко убедиться, что задача Коши с начальными условиями $u(a) = y_1$, $u'(a) = y_2$ будет иметь единственное решение

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(y_1)}{(2n)!} (t-a)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(y_2)}{(2n+1)!} (t-a)^{2n+1}. \quad (28)$$

Как отмечено в [17, 18], вектор-функция (28) является целой при $\beta_p(y_i) < 2$, $\forall p$, $i = 1, 2$. Очевидно, в нашем случае это условие выполнено (так как векторы $y_1, y_2 \in M$). Поэтому значение функции $u(t)$ определено в любой точке комплексной плоскости. Используя (2) и (28), приходим к уравнению относительно y_2 (легко видеть, что $y_1 = x_1$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n+1)!} A^n(y_2) = x_2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b-a)^{2n}}{(2n)!} A^n(x_1). \quad (29)$$

Поскольку $a \neq b$, уравнение (29) представимо в виде:

$$\varphi(A)(y_2) = \overline{y}, \tag{30}$$

где

$$\varphi(A) = E - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A^n, \tag{31}$$

$$\lambda_n = -\frac{(b-a)^{2n}}{(2n+1)!}, \tag{32}$$

$$\overline{y} = \frac{1}{b-a}\left(x_2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b-a)^{2n}}{(2n)!} A^n(x_1)\right), \tag{33}$$

а E — тождественный оператор.

Оператор $\varphi(A)$ имеет характеристическую функцию $\varphi(\xi) = 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \xi^n$, сходящуюся для λ_n из (32) на всей комплексной плоскости. Согласно [13], если функция $\varphi(\xi)$ является аналитической в окрестности нуля, то функция $\psi(\xi) = (\varphi(\xi))^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n$ также является аналитической в окрестности нуля. В этом случае уравнение (30) имеет единственное решение [13]

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n(\overline{y}). \tag{34}$$

Очевидно,

$$\varphi(\xi) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \xi^n = \frac{\operatorname{sh}((b-a)\sqrt{\xi})}{(b-a)\sqrt{\xi}},$$

поэтому

$$\psi(\xi) = \frac{(b-a)\sqrt{\xi}}{\operatorname{sh}((b-a)\sqrt{\xi})}. \tag{35}$$

Пользуясь разложением [19]

$$\frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m(2^{2m-1}-1)}{(2m)!} B_m x^{2m-1}, \quad 0 < |x| < \pi,$$

получаем представление функции (35) степенным рядом

$$\psi(\xi) = \frac{(b-a)\sqrt{\xi}}{\operatorname{sh}((b-a)\sqrt{\xi})} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \xi^m, \quad |\xi| < \pi^2/|b-a|^2, \tag{36}$$

коэффициенты c_m которого определяются равенствами (7).

Подставляя (33) в (34), находим y_2 :

$$y_2 = \frac{1}{b-a}\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m(x_2) - \frac{1}{b-a}\sum_{m,k=0}^{\infty} \frac{c_m (b-a)^{2k}}{(2k)!} A^{k+m}(x_1). \tag{37}$$

Учитывая $y_1 = x_1$ и (37) в (28), приходим к равенствам (3)–(6).

В силу доказанных выше лемм 1–2 степенные ряды (4)–(6) сходятся абсолютно и равномерно по топологии пространства H на всех компактах комплексной плоскости, а потому допускают почленное дифференцирование по переменной t любое число раз. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что функция $u(t)$, задаваемая равенствами (3)–(6), удовлетворяет уравнению (1) и граничным условиям (2).

Единственность решения задачи является следствием его голоморфности. Теорема доказана. $\square$

3. Теорема устойчивости

Теорема 2. *Пусть оператор A имеет порядок $\beta \leqslant 0$, при $\beta = 0$ его тип $\alpha < \pi^2/|b-a|^2$. Тогда решение задачи (1)–(2) непрерывно зависит от краевых значений x_j, $j = 1, 2$, то есть является устойчивым.*

Доказательство. Пусть условия теоремы имеют место. Из определений порядка и типа оператора [11–13] следуют неравенства $\beta_p \leqslant \beta$, $\alpha_p \leqslant \alpha$, $\forall p$, где β_p — p-порядок оператора A, а α_p — p-тип оператора A. Рассмотрим два случая.

1. Если $\beta < 0$, то из оценки [13] $\forall p$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, C_p(\varepsilon)$, $\exists\, q(p,\varepsilon)$, $\forall x \in H$, $\forall n : \|A^n(x)\|_p < C_p n^{(\beta_p+\varepsilon)n}\|x\|_q$, в круге $|t-a| < r$, $r < \infty$, для общих членов рядов (4)–(6), аналогично доказательству лемм 1–2, соответственно имеем:
1) для ряда (4): $\forall p$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n$, $\forall x_1 \in H$

$$\max_{|t-a|<r}\left\|\frac{A^n(x_1)}{(2n)!}(t-a)^{2n}\right\|_p < C_p^{(7)}(\varepsilon)\left(\frac{e}{2}\right)^{2n} n^{(\beta_p+\varepsilon-2)n}\|x_1\|_q r^{2n}; \tag{38}$$

2) для ряда (5): $\forall p$, $\forall \varepsilon_1 > 0$, $\forall n$, $\forall x_2 \in H$

$$\max_{|t-a|<r}\left\|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_m A^{m+n}(x_2)}{(2n+1)!}(t-a)^{2n+1}\right\|_p <$$
$$< C_p^{(8)}(\varepsilon)(1 + MS_3(p,\varepsilon,\varepsilon_1))\left(\frac{e}{2}\right)^{2n} n^{(\beta_p+\varepsilon-2)n}\|x_2\|_q r^{2n+1}, \tag{39}$$

где $S_3(p,\varepsilon,\varepsilon_1)$ — сумма ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{|b-a|^2}{\pi^2}+\varepsilon_1\right)^m m^{(\beta_p+\varepsilon)m}; \tag{40}$$

3) для ряда (6): $\forall p$, $\forall \varepsilon_1 > 0$, $\forall n$, $\forall x_1 \in H$

$$\max_{|t-a|<r}\left\|\sum_{m,k=0}^{\infty}\frac{c_m(b-a)^{2k}A^{k+m+n}(x_1)}{(2n+1)!(2k)!}(t-a)^{2n+1}\right\|_p <$$
$$< C_p^{(9)}(\varepsilon)(1+S_4(p,\varepsilon))(1 + MS_3(p,\varepsilon,\varepsilon_1))\left(\frac{e}{2}\right)^{2n} n^{(\beta_p+\varepsilon-2)n}\|x_1\|_q r^{2n+1}, \tag{41}$$

где $S_3(p,\varepsilon,\varepsilon_1)$ — сумма ряда (40), а $S_4(p,\varepsilon)$ — сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|b-a|^{2k}}{(2k)!}k^{(\beta_p+\varepsilon)k}$.

2. Если $\beta = 0$, то в силу замечания и определения порядка оператора можно считать, что $\beta_p = 0$, $\forall p$. Применяя оценку [13]

$$\forall p,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, C_p(\varepsilon),\ \exists\, q(p,\varepsilon),\ \forall x \in H,\ \forall n : \|A^n(x)\|_p < C_p(\alpha_p+\varepsilon)^n n^{\beta_p n}\|x\|_q$$

к общим членам рядов (4)–(6) при $\alpha_p < \pi^2/|b-a|^2$, $\forall p$, в круге $|t-a| < r$, $r < \infty$, соответственно получаем:

1) для ряда (4): $\forall p$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n$, $\forall x_1 \in H$

$$\max_{|t-a|<r} \left\| \frac{A^n(x_1)}{(2n)!}(t-a)^{2n} \right\|_p < C_p^{(10)}(\varepsilon) \left(\frac{e}{2}\right)^{2n} (\alpha_p+\varepsilon)^n n^{-2n} \|x_1\|_q r^{2n}; \tag{42}$$

2) для ряда (5): $\forall p$, $\forall n$, $\forall x_2 \in H$

$$\max_{|t-a|<r} \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m A^{m+n}(x_2)}{(2n+1)!}(t-a)^{2n+1} \right\|_p < \\ < \frac{C_p^{(11)}(\varepsilon) S_5(p,\varepsilon)(\alpha_p+\varepsilon)^n e^{2n}}{4^n n^{2n}} \|x_2\|_q r^{2n+1}, \tag{43}$$

где $S_5(p,\varepsilon)$ — сумма ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m|(\alpha_p+\varepsilon)^m; \tag{44}$$

3) для ряда (6): $\forall p$, $\forall n$, $\forall x_1 \in H$

$$\max_{|t-a|<r} \left\| \sum_{m,k=0}^{\infty} \frac{c_m (b-a)^{2k} A^{k+m+n}(x_1)}{(2n+1)!(2k)!}(t-a)^{2n+1} \right\|_p < \\ < \operatorname{ch}\left(|b-a|\sqrt{\alpha_p+\varepsilon}\right) \frac{C_p^{(12)}(\varepsilon) S_5(p,\varepsilon)(\alpha_p+\varepsilon)^n e^{2n}}{4^n n^{2n}} \|x_1\|_q r^{2n+1}, \tag{45}$$

где $S_5(p,\varepsilon)$ — сумма ряда (44).

Из оценок (38)–(39), (41)–(43) и (45) следует, что в условиях теоремы ряды (4)–(6) сходятся абсолютно и равномерно по топологии пространства H и непрерывно зависят от краевых значений x_j, $j = 1, 2$. Теорема доказана. □

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие применение теорем 1–2.

Пример 1. В пространстве $H = H(\mathbb{C})$ всех целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах найдём решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} = 0, \tag{46}$$

удовлетворяющее условиям: $x_1 = u(0) = \cos z$, $x_2 = u(1) = \sin z$.

Для оператора $A = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}$ по индукции легко установить равенства $A^n(\cos z) = \cos z$, $A^n(\sin z) = \sin z$. Решение рассматриваемой задачи представляется, в силу теоремы 1, рядами

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(\cos z)}{(2n)!} t^{2n} + \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{c_m A^{m+n}(\sin z)}{(2n+1)!} t^{2n+1} - \\ - \sum_{n,m,k=0}^{\infty} \frac{c_m A^{k+m+n}(\cos z)}{(2n+1)!(2k)!} t^{2n+1} = \cos z \operatorname{ch} t + \sin z \operatorname{sh} t \sum_{m=0}^{\infty} c_m - \cos z \operatorname{ch} 1 \operatorname{sh} t \sum_{m=0}^{\infty} c_m = \\ = \cos z \operatorname{ch} t + \frac{\sin z \operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} 1} - \frac{\operatorname{ch} 1}{\operatorname{sh} 1} \cos z \operatorname{sh} t, \tag{47}$$

поскольку при $a = 0$, $b = 1$, $\xi = 1$ из (36) следует, что $\sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m = 1/\operatorname{sh} 1$. Используя определение p-порядка и p-типа вектора относительно оператора [13]

$$\beta_p(x) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \|A^n(x)\|_p}{n \ln n}, \quad \alpha_p(x) = \varlimsup_{n\to\infty} n^{-\beta_p(x)} \sqrt[n]{\|A^n(x)\|_p}, \tag{48}$$

нетрудно показать, что $\beta_p(x_1) = \beta_p(x_2) = 0$, $\alpha_p(x_1) = \alpha_p(x_2) = 1 < \pi^2$, т.е. вектор-функция (47) является целой.

Пример 2. Пусть $H = [1, 1]$ — пространство целых функций, порядок роста которых $\rho \leqslant 1$, а при порядке $\rho = 1$ тип $\sigma \leqslant 1$. Топология на $[1, 1]$ определяется системой норм $\|F(z)\|_\varepsilon = \sup\limits_{r>0} \left\{ \max\limits_{|z|\leqslant r} |F(z)| e^{-(1+\varepsilon)r} \right\}$, $\forall F(z) \in [1, 1]$, $\forall \varepsilon > 0$. Пусть $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ — оператор дифференцирования. Найдём решение задачи Дирихле для уравнения (1) с условиями $x_1 = u(0) = \sin z$, $x_2 = u(-i) = e^z$. По теореме 1 решение задачи имеет вид

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(\sin z)}{(2n)!} t^{2n} + i \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{c_m A^{m+n}(e^z)}{(2n+1)!} t^{2n+1} - \\ - i \sum_{n,m,k=0}^{\infty} \frac{c_m (-1)^k A^{k+m+n}(\sin z)}{(2n+1)!(2k)!} t^{2n+1}.$$

По индукции легко установить, что $(\sin z)^{(n)} = \sin(z + \pi n/2)$, поэтому

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(z + \frac{\pi n}{2}\right)}{(2n)!} t^{2n} + i \frac{e^z \operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} 1} - \\ - i \sum_{n,m,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_m}{(2n+1)!(2k)!} \sin\left(z + \frac{\pi}{2}(k+m+n)\right) t^{2n+1}, \tag{49}$$

где коэффициенты c_m определяются равенствами (7).

В [13] доказано, что $F \in [\rho, \sigma] : 0 < \rho(F) < \rho$, $\rho(F) = \rho \leqslant 1$, имеет операторные ε-порядки и ε-типы относительно оператора дифференцирования $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$

$$\beta_\varepsilon\left(F, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) = \frac{\rho(F) - 1}{\rho(F)} = \beta\left(F, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right),$$

$$\alpha_\varepsilon\left(F, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) = e^{\frac{1-\rho(F)}{\rho(F)}} (\rho(F)\sigma(F))^{\frac{1}{\rho(F)}} = \alpha\left(F, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right),$$

где $\rho(F)$ и $\sigma(F)$ — соответственно порядок и тип целой скалярной функции F.

Поскольку $\rho(\sin z) = \rho(e^z) = 1$, $\sigma(\sin z) = \sigma(e^z) = 1$, имеем $\beta_\varepsilon(\sin z) = \beta_\varepsilon(e^z) = 0$, а также $\alpha_\varepsilon(\sin z) = \alpha_\varepsilon(e^z) = 1 < \pi^2$. Следовательно, (49) — целая вектор-функция.

Отметим также (см. [13]), что оператор дифференцирования $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} : [\rho, \sigma] \to [\rho, \sigma]$ имеет порядок $\beta = (\rho - 1)/\rho$ и тип $\alpha = e^{-1}(\sigma e \rho)^{1/\rho}$, $\rho \leqslant 1$. Тогда в нашем случае $\beta = 0$, $\alpha = 1 < \pi^2$, т.е. по теореме 2 решение задачи устойчиво.

Пример 3. Пусть $H = H(|z| < 2)$ — пространство всех функций, аналитических в круге $|z| < 2$ с топологией равномерной сходимости на компактах: $\|f(z)\|_p = \max\limits_{|z|\leqslant p} |f(z)|$, $p < 2$. Пусть $A = zE$ — оператор умножения. Построим решение задачи Дирихле для уравнения (1) с условиями $x_1 = u(i) = z$, $x_2 = u(i+2) = e^z$.

Обращаясь к теореме 1, получаем решение задачи

$$u(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(2n)!}(t-i)^{2n}+\frac{1}{2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{c_m z^{m+n}e^z}{(2n+1)!}(t-i)^{2n+1}-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{n,m,k=0}^{\infty}\frac{c_m 2^{2k}z^{k+m+n+1}}{(2n+1)!(2k)!}(t-i)^{2n+1}.$$

Обращаясь к равенству (36) при $a=2$, $b=i+2$, приходим к следующему представлению функции $u(t)$:

$$u(t)=z\operatorname{ch}(\sqrt{z}(t-i))+\frac{e^z-z\operatorname{ch}(2\sqrt{z})}{\operatorname{sh}(2\sqrt{z})}\operatorname{sh}(\sqrt{z}(t-i)),\quad |z|<\frac{\pi^2}{4}. \qquad (50)$$

Нетрудно проверить, что решение (50) удовлетворяет уравнению и заданным условиям. Полученное решение является целым по переменной t ($\beta_p(z)=\beta_p(e^z)=0$, $\alpha_p(z)=\alpha_p(e^z)=p<2<\pi^2/4$) и принадлежит по переменной z пространству $H(|z|<2)$.

Пример 4. Рассмотрим в пространстве $H=H(\mathbb{C})$ всех целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах задачу Дирихле для интегро-дифференциального уравнения

$$u_{tt}(t,z)=\int\limits_1^z e^{z^2-\xi^2}u(t,\xi)\mathrm{d}\xi, \qquad (51)$$

с условиями

$$x_1=u(2i)=e^{z^2-2},\quad x_2=u(3i)=e^{z^2}. \qquad (52)$$

Применяя теорему 1 и учитывая, что методом математической индукции для интегрального оператора $Af(z)=\int\limits_1^z e^{z^2-\xi^2}f(\xi)\mathrm{d}\xi$ нетрудно установить равенства

$$A^n(e^{z^2-2})=e^{z^2-2}\frac{(z-1)^n}{n!},\quad A^n(e^{z^2})=e^{z^2}\frac{(z-1)^n}{n!},\ \forall n\geqslant 1,$$

приходим к следующему представлению решения задачи (51)–(52):

$$u(t)=e^{z^2-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n(t-2i)^{2n}}{n!(2n)!}-ie^{z^2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{c_m(z-1)^{m+n}(t-2i)^{2n+1}}{(2n+1)!(m+n)!}+$$
$$+ie^{z^2-2}\sum_{n,m,k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k c_m(z-1)^{k+m+n}(t-2i)^{2n+1}}{(2k)!(2n+1)!(k+m+n)!}. \qquad (53)$$

При этом найденная вектор-функция (53) является целой, поскольку $\beta_p(x_1)=\beta_p(x_2)=-1$.

4. Заключение

Отметим, что рассмотренный выше операторный метод обладает высокой степенью общности, так как позволяет исследовать задачи Дирихле для различных (как традиционных, так и не относящихся к ним) типов уравнений в общем виде. Кроме того, пространство, в котором действует оператор A, в нашем методе имеет довольно широкую свободу выбора. Но вместе с тем следует отметить, что, несмотря на столь большую степень общности, предлагаемый метод имеет некоторое ограничение. Дело в том, что выполнение условий теоремы 1 гарантирует, что решение задачи (1)–(2) — целая вектор функция. В остальных ситуациях вопрос о характере решения и его существовании пока остаётся открытым.

Литература

1. *Валицкий Ю. Н.* Четырёхточечная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Функц. анализ и его прил. — 1981. — Т. 15, № 4. — С. 69–70.
2. *Иванов В. К., Мельникова И. В., Филинков А. И.* Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. — М.: Физматлит, 1995. — 176 с.
3. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
4. *Князюк А. В.* Задача Дирихле для дифференциальных уравнений второго порядка с операторными коэффициентами // Укр. мат. журн. — 1985. — Т. 37, № 3. — С. 256–260.
5. *Мельникова И. В.* Связь между задачами Дирихле и Коши // Дифференц. уравнения. — 1980. — Т. 16, № 2. — С. 311–316.
6. *Мельникова И. В., Кудрявцев А. Г.* О корректности задачи Дирихле для уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Изв. вузов. Математика. — 1986. — № 8. — С. 46–52.
7. *Филинков А. И.* Регуляризация некорректной задачи Дирихле методом краевых задач с комплексным параметром. — Урал. ун-т. – Свердловск, 1989. — 7 с. — Деп. в ВИНИТИ, №1224-89.
8. *Шишатский С. П.* Граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве в гиперболическом случае // Математические проблемы геофизики. — 1969. — Вып. 1. — С. 103–124.
9. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
10. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962. — 829 с.
11. *Громов В. П.* Порядок и тип линейного оператора и разложение в ряд по собственным функциям // ДАН СССР. Сер. матем. — 1986. — Т. 228, № 1. — С. 27–31.
12. *Громов В. П.* Порядок и тип оператора и целые векторнозначные функции // Ученые записки ОГУ. — 1999. — Вып. 1. — С. 6–23.
13. *Громов В. П., Мишин С. Н., Панюшкин С. В.* Операторы конечного порядка и дифференциально-операторные уравнения. — Орел: ОГУ, 2009. — 430 с.
14. *Мишин С. Н.* О порядке и типе оператора // ДАН РФ. Сер. матем. — 2001. — Т. 381, № 3. — С. 309–312.
15. *Мишин С. Н.* Операторы конечного порядка в локально выпуклых пространствах и их применение: Дисс. ... к. ф.-м. н.: 01.01.01: Кандидатская диссертация / Орел. — 2002. — 116 С..
16. *Хой Ле Хай.* Векторнозначные функции и дифференциальные операторы бесконечного порядка. — Ростов-на-Дону: РГУ, 1981. — 54 с.
17. *Громов В. П.* Операторный метод решения линейных уравнений // Ученые записки ОГУ. — 2002. — Вып. 3. — С. 4–36.
18. *Громов В. П.* Аналитические решения дифференциально-операторных уравнений в локально выпуклых пространствах // ДАН РФ. Сер. матем. — 2004. — Т. 394, № 3. — С. 305–307.
19. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике: для инженеров и уч-ся втузов. — М.: Наука, 1986. — 544 с.

UDC 517.55

Two-Points Dirichlet Problem for the Second Order Differential-Operator Equation in Locally Convex Space

N. A. Aksyonov

Orel State University
95, Komsomolskaya str., 302026, Orel, Russia

This paper gives an account of method, that allows to find a solution of the Dirichlet problem for the second order differential-operator equations in arbitrary locally convex space.

Key words and phrases: Dirichlet problem, differential-operator equation, locally convex space, operator order, operator type.