УДК 517.51

Неравенство типа Харди для интегральных операторов с переменными пределами интегрирования в пространствах Лебега с мерами

Альхалил Айман

Кафедра математического анализа и теории функций
Российский университет дружбы народов
ул. Маклухо-Маклая, д.6, Москва, 117198, Россия

В работе рассматривается задача о нахождении необходимых и достаточных условий выполнения неравенства Харди для интегральных операторов с переменными пределами интегрирования в пространствах Лебега с произвольными борелевскими мерами.

Ключевые слова: неравенство типа Харди, пространство Лебега, интегральный оператор.

1. Введение

Пусть $0 < p, q < +\infty$, и λ, ν, μ — борелевские σ-конечные меры на $(0, \infty)$. Обозначим через $\mathfrak{M}^+$ множество неотрицательных борелевских функций $f\colon (0,\infty) \to [0, +\infty]$.

В работе рассматривается задача о нахождении необходимых и достаточных условий выполнения неравенства Харди вида

$$\left(\int\limits_{(0,\infty)} v(x)\left(\int\limits_{[a(x),b(x)]} uf\mathrm{d}\lambda\right)^q \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(\int\limits_{(0,\infty)} f^p\mathrm{d}\nu\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{для всех } f \in \mathfrak{M}^+, \tag{1}$$

где $u, v \in \mathfrak{M}^+$ и на граничные функции $a(x)$ и $b(x)$ накладываются следующие условия:

$$\begin{gathered} a(x) \text{ и } b(x) \text{ непрерывны и строго возрастают на } (0,\infty); \\ a(x) < b(x) \text{ для любого } x \in (0,\infty),\ a(0) = b(0) = 0,\ a(\infty) = b(\infty) = \infty. \end{gathered} \tag{2}$$

Константу $C \geqslant 0$ в (1) считаем выбранной наименьшей из возможных.

Случай абсолютно непрерывных относительно меры Лебега мер λ, μ, ν (весовое неравенство Харди) имеет длинную историю, восходящую к классической монографии [1], и к настоящему времени полностью изучен. Необходимую информацию можно найти в работах Б. Мукенхоупта [2], Дж. Брэдли [3], С. Блума и Р. Кермана [4], Г. Хайнига и Г. Синнамона [5], В. Кокилашвили [6], Дж. Таленти [7], Д. Томаселли [8], Г. Синнамона [9], Г. Синнамона и В. Степанова [10], других авторов [11–15] и монографиях [16] и [17].

Для более общих мер В. Мазья и А. Розин [16, § 1.3] техникой весовых неравенств охарактеризовали неравенство (1) в случае, когда λ есть мера Лебега и $u = v \equiv 1$. В недавней работе [18] Г. Синнамон установил связь неравенства (1) при $\nu = \lambda$ и $u = v \equiv 1$ с неравенством на монотонных функциях и, в частности, получил несколько различных по форме критериев выполнения неравенства (1) в этом случае. Полностью неравенство Харди (1) при $a(x) = a, b(x) = x$ с тремя мерами изучено в работе [19] и в случае абсолютно непрерывных мер изучено в работе [20]. Целью нашей работы является обобщение результатов работы [19, 20] на случай интегральных операторов с переменными пределами интегрирования с

Статья поступила в редакцию 25 октября 2009 г.

произвольными борелевскими мерами. Для этого сначала обобщается ряд ключевых лемм из работ [19, 20], а затем с помощью этих лемм находятся требуемые критерии.

Обозначим через L^p_λ пространство Лебега всех λ-измеримых функций, для которых $\|f\|_{L^p_\lambda} := \left(\int_{(0,\infty)} |f|^p \mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Соотношения $A \ll B$ и $B \gg A$ означают $A \leqslant cB$ с константой c, зависящей только от p и q, $A \approx B$ равносильно $A \ll B \ll A$. Символы $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и обозначают соответственно множество всех натуральных чисел, целых чисел . χ_E суть характеристическая функция (индикатор) множества $E \subset (0,\infty)$.

2. Вспомогательные леммы

Лемма 1. *Пусть λ — борелевская σ-конечная мера на $[b(c), b(d)] \subset (0,\infty)$ и μ — борелевская σ-конечная мера на $[c,d] \subset (0,\infty)$, $f \in \mathfrak{M}^+[b(c), b(d)]$ и $H_b f(x) := \int_{[b(c),b(x)]} u(y) f(y) \mathrm{d}\lambda(y)$. Тогда неравенство*

$$\left(\int\limits_{[c,d]} v(x)\left(H_b f(x)\right)^q \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\int\limits_{[b(c),b(d)]} f^p \mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall f \in \mathfrak{M}^+[b(c), b(d)], \tag{3}$$

при $1 < p \leqslant q < \infty$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$\|H_b\|_{L^p_\lambda \to L^q_\mu} \approx \sup_{t\in[c,d]} \left(\int\limits_{[t,d]} v \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{[b(c),b(t)]} u^{p'} \mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Доказательство. Сделаем замену $y = b(s)$ в выражении $H_b f(x)$. Тогда

$$\int\limits_{[b(c),b(x)]} u(y) f(y) \mathrm{d}\lambda(y) = \int\limits_{[c,x]} u(b(s)) f(b(s)) \mathrm{d}\lambda(b(s)) =: \bar{H}\bar{f}(x), \tag{4}$$

где $\bar{f}(x) := f(b(s))$ и $\bar{u}(x) := u(b(s))$. Аналогично,

$$\left(\int\limits_{[b(c),b(d)]} (f(y))^p \mathrm{d}\lambda(y)\right) = \left(\int\limits_{[c,d]} \left(f(b(s))\right)^p \mathrm{d}\lambda(b(s))\right) = \left(\int\limits_{[c,d]} (\bar{f}(x))^p \, \mathrm{d}\bar{\lambda}(x)\right), \tag{5}$$

где $\mathrm{d}\bar{\lambda}(x) = \mathrm{d}\lambda(b(s))$. Подставляя (4) и (5) в неравенство (3), получим

$$\left(\int\limits_{[c,d]} v(x)\left(\bar{H}\bar{f}(x)\right)^q \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\int\limits_{[c,d]} (\bar{f}(x))^p \, \mathrm{d}\bar{\lambda}(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Из ([19], теорема 1) получим

$$C \approx \sup_{t\in[c,d]} \left(\int\limits_{[t,d]} v \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{[c,t]} \bar{u}^{p'} \mathrm{d}\bar{\lambda}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Сделаем обратную замену во втором сомножителе, тогда

$$C \approx \sup_{t\in[c,d]} \left(\int\limits_{[t,d]} v \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{[b(c),b(t)]} u^{p'} \mathrm{d}\lambda \right)^{\frac{1}{p'}},$$

что следует из утверждения леммы, поскольку наименьшая константа C в (3) совпадает с нормой $\|H_b\|_{L^p_\lambda \to L^q_\mu}$. □

Справедливо аналогичное утверждение для интеграла с переменным нижним пределом.

Лемма 2. *Пусть λ — борелевская σ-конечная мера на $[a(c), a(d)] \subset (0,\infty)$ и μ — борелевская σ-конечная мера на $[c,d] \subset (0,\infty)$, $f \in \mathfrak{M}^+[a(c), a(d)]$ и*

$$H_a f(x) := \int\limits_{[a(x),a(d)]} u(y) f(y) \,\mathrm{d}\lambda(y).$$

Тогда неравенство

$$\left(\int\limits_{[c,d]} v(x) \left(H_a f(x)\right)^q \mathrm{d}\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\int\limits_{[a(c),a(d)]} f^p \mathrm{d}\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall f \in \mathfrak{M}^+[a(c), a(d)] \tag{6}$$

при $1 < p \leqslant q < \infty$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$\|H_a\|_{L^p_\lambda \to L^q_\mu} \approx \sup_{t\in[c,d]} \left(\int\limits_{[c,t]} v \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{[a(t),a(d)]} u^{p'} \mathrm{d}\lambda \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

3. Блочно-диагональный метод

Для заданных функций $a(x)$ и $b(x)$, удовлетворяющих условию (2), выберем последовательность точек $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset (0,\infty)$ такую, что $\xi_0 = 1$, $\xi_k = (a^{-1} \circ b)^k(1)$, $k \in \mathbb{Z}$ и положим $\eta_k = a(\xi_k) = b(\xi_{k-1})$, $\Delta_k = [\xi_k, \xi_{k+1}]$, $\delta_k = [\eta_k, \eta_{k+1}]$, $k \in \mathbb{Z}$. Разбивая полуось $(0,\infty)$ точками последовательности $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, получаем представление оператора H вида $Hf(x) := \int_{[a(x),b(x)]} u(y) f(y) \mathrm{d}\lambda(y)$ в виде суммы $H = T + S$ блочно-диагональных операторов T и S таких, что

$$T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} T_k, \quad S = \sum_{k\in\mathbb{Z}} S_k,$$

где

$$T_k f(x) := \int\limits_{[a(x),a(\xi_{k+1}))} uf \,\mathrm{d}\lambda, T_k : L^p_\lambda[a(\xi_k), a(\xi_{k+1})) \to cL^q_\mu[\xi_k, \xi_{k+1}), \tag{7}$$

$$S_k f(x) := \int\limits_{[b(\xi_k),b(x)]} uf \,\mathrm{d}\lambda, S_k : L^p_\lambda[b(\xi_k), b(\xi_{k+1})) \to L^q_\mu[\xi_k, \xi_{k+1}). \tag{8}$$

Для блочно-диагональных операторов имеет место следующее утверждение [12].

Лемма 3. *Пусть* $0 < p \leqslant q < \infty$ *и* $U = \bigsqcup_k U_k$ *и* $V = \bigsqcup_k V_k$ *и* $T = \sum_k T_k$, *где* $T_k : L^p_\lambda(U_k) \to L^q_\mu(V_k)$ *тогда* $\|T\|_{L^p_\lambda(U)\to L^q_\mu(V)} = \sup_k \|T\|_{L^p_\lambda(U_k)\to L^q_\mu(V_k)}$.

4. Случай $\lambda = \nu$

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \leqslant q < +\infty$, *и* λ, μ — σ*-конечные борелевские меры на* $(0,\infty)$, $u, v \in \mathfrak{M}^+$. *Неравенство*

$$\left(\int\limits_{(0,\infty)} v(x) \left(\int\limits_{[a(x),b(x)]} f u \,\mathrm{d}\lambda\right)^q \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\int\limits_{(0,\infty)} f^p \mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall f \in \mathfrak{M}^+ \tag{9}$$

выполнено тогда и только тогда, когда $A := \sup\limits_{s>0} \sup\limits_{s\leqslant t\leqslant a^{-1}(b(s))} A(s,t) < \infty$, *где*

$$A(s,t) := \left(\int\limits_{[s,t]} v \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{[a(t),b(s)]} u^{p'} \mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Более того, для наименьшей константы C *в неравенстве* (9) *справедливо соотношение* $C \approx A$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть выполнено неравенство (9) и $s > 0$. Полагая $f = u^{\frac{\acute{p}}{p}} \chi_{[a(t),b(s)]}$ в (9) для любого $t \in (s, a^{-1}(b(s)))$, находим

$$C \left(\int\limits_{[a(t),b(s)]} (u^{\frac{\acute{p}}{p}})^p \mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\int\limits_{(0,\infty)} \left(\int\limits_{[a(x),b(x)]} u(u^{\frac{\acute{p}}{p}}) \chi_{[a(t),b(s)]} \mathrm{d}\lambda\right)^q v(x) \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\int\limits_{[b^{-1}(a(t)),a^{-1}(b(s))]} \left(\int\limits_{[a(x),b(x)]} u(u^{\frac{\acute{p}}{p}}) \chi_{[a(t),b(s)]} \mathrm{d}\lambda\right)^q v(x) \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\int\limits_{[s,t)]} \left(\int\limits_{[a(t),b(s)]} u^{\acute{p}} \mathrm{d}\lambda\right)^q v(x) \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Отсюда для любого $t > 0$ следует

$$C \gg \sup_{t\in(s,a^{-1}(b(s)))} \left(\int\limits_{[s,t]} v d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{[a(t),b(s)]} u^{\acute{p}} \mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{\acute{p}}},$$

откуда $C \gg \sup\limits_{s>0} \sup\limits_{s\leqslant t\leqslant a^{-1}b(s)} A(s,t) = A$.

Достаточность. Пусть $A < +\infty$. Запишем оператор H для любого $x \in \Delta_k = (\xi_k, \xi_{k+1})$, в виде $Hf(x) = T_k f(x) + S_k f(x)$. Тогда

$$\|Hf\|^q_{L^q_\mu} = \sum_k \|Hf\|^q_{L^q_\mu(\Delta_k)} \leqslant 2^{q-1} \left(\sum_k \|T_k f\|^q_{L^q_\mu(\Delta_k)} + \sum_k \|S_k f\|^q_{L^q_\mu(\Delta_k)}\right) =$$

$$= 2^{q-1}\left(\|Tf\|^q_{L^q_\mu} + \|Sf\|^q_{L^q_\mu}\right) \leqslant 2^{q-1}\left(\|T\|^q + \|S\|^q\right)\|f\|^q_{L^p_\lambda}.$$

Отсюда следует, что $\|H\| \ll (\|T\|^q + \|S\|^q)^{\frac{1}{q}}$, а из неравенства Йенсена и леммы 3 получаем $\|H\| \leqslant \|T\| + \|S\| = \sup\limits_k\|T_k\| + \sup\limits_k\|S_k\|$.

Из леммы 2 имеем

$$\|T_k\| \ll \sup_{t\in[\xi_k,\xi_{k+1}]}\left(\int\limits_{[\xi_k,t]} v\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{[a(t),b(\xi_k)]} u^{p'}\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant A,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Следовательно

$$\sup_k\|T_k\| \leqslant A. \tag{10}$$

Из леммы 1 имеем

$$\|S_k\| \approx \sup_{t\in[\xi_k,\xi_{k+1}]}\left(\int\limits_{[t,\xi_{k+1}]} v\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{[a(\xi_{k+1}),b(t)]} u^{p'}\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p'}} = \sup_{\xi_k<t<\xi_{k+1}} A(t,\xi_{k+1}) \leqslant A.$$

Поскольку $0 < s < t < a^{-1}(b(s))$ эквивалентно $b^{-1}(a(t)) < s < t$, то $A = \sup\limits_{t>o}\sup\limits_{b^{-1}(a(t))<s<t} A(s,t)$. Отсюда следует, что $\sup\limits_k \sup\limits_{\xi_k<t<\xi_{k+1}} A(t,\xi_{k+1}) \leqslant A$. Поэтому

$$\sup_k\|S_k\| \leqslant A. \tag{11}$$

Отсюда и из (10) и (11) по лемме 3 получаем $C \ll A$. □

5. Неравенство Харди с тремя мерами

Для операторов интегрирования с переменными пределами из ([19], лемма 5) вытекает следующее утверждение

Лемма 4. *Пусть $0 < p, q < +\infty$, и λ,μ — борелевская σ-конечная мера на $(0,\infty)$ $u, v, \tau \in \mathfrak{M}^+$. Тогда неравенство*

$$\left(\int\limits_{(0,\infty)} v(x)\left(\int\limits_{[a(x),b(x)]} fu\tau\,\mathrm{d}\lambda\right)^q \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(\int\limits_{(0,\infty)} f^p\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall f\in\mathfrak{M}^+ \tag{12}$$

выполнено, если и только если выполнено неравенство

$$\left(\int\limits_{(0,\infty)} v(x)\left(\int\limits_{[a(x),b(x)]} gu\,\mathrm{d}\lambda\right)^q \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(\int\limits_{(0,\infty)} g^p\tau^{-p}\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall g\in\mathfrak{M}^+. \tag{13}$$

Теорема 2. *Пусть $1 < p \leqslant q < +\infty$; λ , ν и μ — борелевские σ-конечные меры на $(0,\infty)$ и $f\in\mathfrak{M}^+$; (ν_a,ν_s) — разложение Лебега меры ν относительно λ, т.е. $\nu = \nu_a + \nu_s$, где ν_a абсолютно непрерывна относительно λ, а ν_s и λ взаимно сингулярны и $\frac{\mathrm{d}\nu_a}{\mathrm{d}\lambda}$ — производная Радона–Никодима ν_a относительно λ.*

Если $p \leqslant q$, то неравенство

$$\left(\int\limits_{(0,\infty)} v(x)\left(\int\limits_{[a(x),b(x)]} uf\,\mathrm{d}\lambda\right)^q \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(\int\limits_{(0,\infty)} f^p\,\mathrm{d}\nu\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall f \in \mathfrak{M}^+ \tag{14}$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{A} := \sup_{s>0}\sup_{t\in[s,a^{-1}(b(s))]}\left(\int\limits_{[s,t]} v\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{[a(t),b(s)]} u^{p'}\left(\frac{\mathrm{d}\nu_a}{\mathrm{d}\lambda}\right)^{1-p'}\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p'}} < +\infty.$$

Более того, для наименьшей константы C в неравенстве (14) *справедливо соотношение $C \approx \mathcal{A}$.*

Доказательство. Следуем рассуждениям из доказательств теоремы 4 [19]. Неравенство (14) равносильно неравенству

$$\left(\int\limits_{(0,\infty)} v(x)\left(\int\limits_{[a(x),b(x)]} uf\,\mathrm{d}\lambda\right)^q \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(\int\limits_{(0,\infty)} f^p\,\mathrm{d}\nu_a\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall f \in \mathfrak{M}^+. \tag{15}$$

Действительно, (15) влечёт (14). Обратно, пусть выполнено (14). Фиксируем произвольную $f \in \mathfrak{M}^+$. Так как ν_s и λ взаимно сингулярны, то существует борелевское множество $A \subset (0,\infty)$ такое, что $\lambda(A) = 0$ и ν_s сконцентрировано на A. Так как ν_a абсолютно непрерывна относительно λ и $\lambda(E) = 0$ для любого борелевского $E \subset A$, то ν_a сконцентрировано на $(0,\infty)\setminus A$. Положим $\tilde{f} := f\chi_{[a(x),b(x)]\setminus A}$. Тогда

$$\left(\int\limits_{(0,\infty)} v(x)\left(\int\limits_{[a(x),b(x)]} uf\mathrm{d}\lambda\right)^q \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int\limits_{(0,\infty)} v(x)\left(\int\limits_{[a(x),b(x)]} u\tilde{f}\mathrm{d}\lambda\right)^q \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\int\limits_{(0,\infty)} \tilde{f}^p\,\mathrm{d}\nu\right)^{\frac{1}{p}} = C\left(\int\limits_{(0,\infty)} \tilde{f}^p\mathrm{d}\nu_a + \int\limits_{(0,\infty)} \tilde{f}^p\mathrm{d}\nu_s\right)^{\frac{1}{p}} = C\left(\int\limits_{(0,\infty)} f^p\mathrm{d}\nu_a\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Неравенство (15) можно переписать в виде

$$\left(\int\limits_{(0,\infty)} v(x)\left(\int\limits_{[a(x),b(x)]} uf\,\mathrm{d}\lambda\right)^q \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(\int\limits_{(0,\infty)} f^p\left(\frac{\mathrm{d}\nu_a}{\mathrm{d}\lambda}\right)\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Данное неравенство по лемме 4 равносильно неравенству

$$\left(\int\limits_{(0,\infty)} v(x)\left(\int\limits_{[a(x),b(x)]} uf\left(\frac{\mathrm{d}\nu_a}{\mathrm{d}\lambda}\right)^{-\frac{1}{p}}\mathrm{d}\lambda\right)^q \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(\int\limits_{(0,\infty)} f^p\mathrm{d}\lambda\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Применение к последнему неравенству теоремы 1 заканчивает доказательство теоремы. $\square$

Литература

1. *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. — М: ИЛ, 1948.
2. *Muckenhoupt B.* Hardy's Inequalities with Weights // Studia Math. — 1972. — Vol. 34, No 1. — Pp. 31–38.
3. *Bradley J. S.* Hardy Inequalities with Mixed Norms // Canad. Math. Bull. — 1978. — Vol. 21, No 1. — Pp. 405–408.
4. *Bloom S., Kerman R.* Weighted L_Φ-integral Inequalities for Operators of Hardy Type // Studia Math. — 1994. — Vol. 110, No 1. — Pp. 35–52.
5. *Heining H. P., Sinnamon G.* Mapping Properties of Integral Averaging Operators // Studia Math. — 1998. — Vol. 129. — Pp. 157–177.
6. *Кокилашвили В. М.* О неравенствах Харди в весовых пространствах // Сообщ. АН ГССР. — 1979. — Vol. 96, No 1. — Pp. 37–40.
7. *Talenti G.* Osservazione Sopra una Classe di Disuguaglianze // Rend. Sem. Mat. Fis. Milano. — 1969. — Vol. 39. — Pp. 171–185.
8. *Tomaselli G.* A Class of Inequalities // Boll. Un. Mat. Ital. — 1969. — Vol. 2. — Pp. 622–631.
9. *Sinnamon G.* Weighted Hardy and Opial-type Inequalities // Math. Anal. Appl. — 1991. — Vol. 160. — Pp. 434–445.
10. *Sinnamon G., Stepanov V. D.* The Weighted Hardy Inequality: new Proofs and the Case $p = 1$ // London Math. Soc. — 1996. — Vol. 54. — Pp. 89–101.
11. *Imm C.* — Semilinear ODEs and Hardy's Inequality with Weights. — M.s. thesis, Univ. of Missouri, Columbia, 1997.
12. *Stepanov V. D., Ushakova E. P.* Hardy Operator with Variable Limits on Monotone Functions // Function Spaces Appl. — 2003. — Vol. 1. — Pp. 1–15.
13. *Lai Q.* Weighted Modular Inequalities for Hardy Type Operators. — 1999.
14. *Manakov V. M.* On the Best Constant in Weighted Inequalities for Riemann-Liouville Integrals // Bull. London Math. Soc. — 1992. — Vol. 24. — Pp. 442–448.
15. *Stepanov V. D.* Weighted Norm Inequalities for Integral Operators and Related Topics // Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications. — Vol. 5. — Prometheus Prague,: 1994. — Pp. 139–176.
16. *Мазъя В. Г.* Пространства С.Л. Соболева. — Л.: ЛГУ, 1985.
17. *Opic B., Kufner A.* Hardy-type Inequalities. — Longman, Harlow, 1990.
18. *Sinnamon G.* Hardy's Inequality and Monotonicity // FSDONA, Prague. — 2005. — Vol. 5. — Pp. 292–310.
19. *Прохоров Д. В.* Неравенства Харди с тремя мерами // Труды Матем. ин-та РАН. — 2006. — № 255. — С. 233–245.
20. *Степанов В. Д., Ушакова Е. П.* Об интегральных операторах с переменными пределами интегрирования // Труды Матем. ин-та РАН. — 2001. — № 232. — С. 298–317.

UDC 517.51

Inequality of Hardy Type for Integral Operators with Variable Limits of Integration in the Lebesgue Spaces with Measures

Alkhliel Aiman

Mathematical Analysis and Functiona Theory Department
Peoples friendship university of Russia
6, Miklukho Maklai str., 117198, Moscow, Russia

In the work we prove necessary and sufficient conditions for the inequality of Hardy type for integral operators with variable limita of integration in the Lebesgue spaces with measures.

Key words and phrases: Hardy inequality, Lebesgue space, integral operator.