УДК 513.73; 531.31

Обратные краевые задачи динамики на многообразиях

Л. А. Кондратьева

Кафедра математической кибернетики
Московский авиационный институт
Волоколамское шоссе, 4, А-80, ГСП-3, Москва, 125993, Россия

Ставится обратная краевая задача, когда по заданным двум точкам на многообразии и кривой на этом многообразии строится динамическая система (векторное поле) на нём, для которой данная кривая служит интегральной. При этом многообразие предполагается абстрактным, т.е. не являющимся непременно вложенным в евклидово пространство, и обладающим дифференциальной структурой. В качестве примера построена динамическая система для летательного аппарата (моделируемого материальной точкой), движущегося по локсодроме вблизи поверхности Земли, которая предполагается многообразием с дифференцируемыми картами.

Ключевые слова: динамика, дифференцируемое многообразие, обратная задача, краевая задача, локсодрома.

1. Понятие обратных краевых задач

Как известно, под обратными задачами динамики [1] понимаются задачи об определении активных сил, действующих на механическую систему, а также её параметров и связей, наложенных на систему, при которых движение с заданными свойствами является одним из возможных движений этой системы.

Развитая во многих работах теория решения таких задач основывается на методах теории дифференциальных уравнений, причём, как правило, в основе решения лежат методы исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений при заданных начальных значениях, удовлетворяющих условиям Коши. Вместе с тем широкий круг задач управления, имеющий «непустое пересечение» с обратными задачами, определяет востребованность постановки граничных условий и, соответственно, краевых задач.

Именно задача определения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным граничным условиям, называется краевой задачей [2]. Наиболее развита теория краевых задач, когда на отрезке $[a, b]$ задано линейное уравнение вида [3]

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = r(x) \tag{1}$$

при условиях, которые называются граничными:

$$U_\nu(y) \equiv \alpha_0 y_a + \alpha_1 y'_a + \ldots + \alpha_{n-1} y_a^{(n-1)} + \beta_0 y_b + \beta_1 y'_b + \ldots + \beta_{n-1} y_b^{(n-1)} = u_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, l < 2n, \tag{2}$$

где величины u_ν являются постоянными, а также постоянными являются коэффициенты $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \ldots, \beta_{n-1}$ перед значениями функции y и её первых n (односторонних) производных в точках a и b соответственно.

Ниже будет сформулирована обратная задача для общего случая, когда дифференциальное уравнение априори не является линейным, а взамен отрезка вещественной прямой выбирается некоторое, вообще говоря, абстрактное многообразие; при этом будет использоваться терминология монографии [4].

Статья поступила в редакцию 14 июля 2009 г.
Автор благодарен И.А. Галиуллину за постановку задачи и внимание к работе.

Под многообразием M^m размерности m понимается непустое отделимое топологическое пространство со счётной базой, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому множеству в $\mathbb{R}^m$. Ниже используются понятия, определённые в [4], а именно, понятие дифференцируемого многообразия, соответственно, атласа $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ дифференцируемых карт M^m, функций перехода $\varphi_j \varphi_i^{-1}$, т.е. дифференцируемых отображений $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ в $\varphi_j(U_i \cap U_j)$, далее, касательного пространства $T_x(M)$ в точке $x \in M^m$, касательного пространства $T(M)$ многообразия M^m и касательного вектора.

Дифференцируемая кривая $c(t)$ в M^m — это образ отображения отрезка I в M^m, вектор $\dot{c}(t) \in T_{c(t)}(M)$ называется касательным вектором кривой c в точке $c(t)$. Пусть, наконец, X — векторное поле на M^m. Интегральной кривой поля X называется дифференцируемая кривая $c : I \to M^m$, такая, что $\dot{c}(t) = X(c(t))$ для любого $t \in I$. Для каждой системы локальных координат на множестве U из атласа $\mathcal{A}$ интегральная кривая является решением обыкновенного дифференциального уравнения в $\mathbb{R}^m$, поэтому термины: векторное поле, динамическая система, дифференциальное уравнение (первого порядка), — здесь представляют собой синонимы.

2. Постановка и решение задачи

Задача. *Пусть A и B — две произвольные точки многообразия M^m и c — кривая на этом многообразии, содержащая эти точки. Построить на M^m такую динамическую систему X, для которой кривая $c = c(t)$ была бы интегральной.*

Несмотря на то, что согласно одной из фундаментальных теорем дифференциальной геометрии абстрактное многообразие размерности m может быть вложено в евклидово пространство вдвое большей размерности, именно вследствие этого последнего обстоятельства «экономнее» проводить построение [5] правых частей систем дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^m$ для каждой карты U_i, обеспечивая совпадение соответствующих полей на пересечениях $U_i \cap U_j$. Указанное построение имеет разработанную методику [1] и состоит в следующем.

Если заданное многообразие M^m размерности m является подмногообразием евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n > m$ и определяется системой неявных уравнений

$$\omega_\mu(x) = 0, \quad \mu = 1, \ldots, k; \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n = m + k, \tag{3}$$

то множество векторов $\omega_\mu^\perp = \mathrm{grad}\omega_\mu$ образует базис k-мерного пространства $\mathbb{E}_x^\perp$, в каждой точке $x \in M^m$ являющегося ортогональным дополнением к пространству $T_x(M)$, касательному к M^m в точке x.

Методика соответствующего построения описана, в частности, в [1]. Пусть требуется найти явные выражения для правых частей уравнений

$$\dot{x}^\nu = X^\nu(x_1, \ldots, x_n), \quad \nu = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

обладающих интегральным многообразием M^m, определяемым указанными выше функциями ω_μ. Тогда уравнения, полученные дифференцированием соответствующих равенств:

$$(\mathrm{grad}\,\omega_\mu \cdot \bar{X}) = \Phi_\mu \tag{5}$$

(где $\bar{X} = (X^1, \ldots, X^n)$, Φ_μ — функции, обращающиеся в нуль на интегральном многообразии), — определяют выражения для искомых X^ν.

Построение векторного поля X по заданной кривой $c(t)$ производится в предположении, что каждое открытое множество U_i атласа $\mathcal{A}$ многообразия M^m содержит только один связный кусок кривой $c(t)$, причём ему отвечает только один связный кусок кривой в $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^m$, так что $\varphi_i(c(t)) \equiv \psi_i(t) \subset \mathbb{R}^m$.

Теперь $\psi_i(t)$ рассматривается как интегральная кривая в области $\varphi_i(U_i)$, и соответствующая динамическая система (векторное поле) Y_i в $\mathbb{R}^m$ строится указанным выше способом, а именно, если $\psi_i(t)$ определяется координатами $\psi_i^1, \ldots, \psi_i^m$, то компоненты поля Y_i имеют вид $Y_i^1 = \dot{\psi}_i^1, \ldots, Y_i^m = \dot{\psi}_i^m$.

Согласно [4], если h — некоторый диффеоморфизм одного дифференцируемого многообразия в другое дифференцируемое многообразие, то он индуцирует на втором из них векторное поле, которое предполагается существующим на первом. Таким образом на U_i строится векторное поле X_i.

Совпадение полей на $U_i \cap U_j$ вытекает из следующего утверждения [5].

Утверждение. Пусть M^m — дифференцируемое многообразие, $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ — его атлас. Тогда два векторных поля X_i и X_j, полученные отображением полей Y_i и Y_j соответственно на образах карт $\varphi_i(U_i)$ и $\varphi_j(U_j)$, совпадают на пересечении $U_i \cap U_j$ этих карт.

Заметим, наконец, что если существование решения задачи с начальными условиями имеет место при весьма широких условиях, а решение обратной задачи в её общепринятом в настоящее время варианте предполагает известную неоднозначность, то решение краевой задачи часто требует условий, накладываемых на параметры системы, на само многообразие и т.п.

3. Движение по локсодроме

Рассмотрим в качестве примера материальную точку с массой m_0, которая должна переместиться из точки A в точку B земной поверхности по заданной траектории, при этом Земля будет предполагаться шарообразной с радиусом R и вращающейся с угловой скоростью σ. Сама точка может служить моделью для некоторого летательного аппарата с небольшой высотой полёта, так что его траектория располагается на сфере, имеющей тот же радиус R; это может быть самолётом малых размеров или крылатой ракетой.

Пусть кривой перелёта является локсодрома (локсодромия) — так называется кривая на поверхности вращения, которая пересекает все её меридианы под одним и тем же углом. Если такая поверхность — сфера, то в естественным образом определённых сферических координатах уравнение локсодромы будет [1]

$$\omega \equiv \ln\left[\mathrm{tg}(\varphi/2)\ \mathrm{ctg}(\varphi_0/2)\right] - (\psi - \psi_0)\ \mathrm{ctg}\,\alpha = 0, \tag{6}$$

где α — указанные выше постоянный угол; в частности, для Земли угол ψ — долгота точки, угол $(\pi/2 - \varphi)$ — широта, а ψ_0 и φ_0 — их начальные значения.

Задача определения компонент F_φ и F_ψ силы, под действием которой материальная точка движется по указанной траектории, решена в [1] в предположении, что шарообразная Земля находится в объемлющем трёхмерном пространстве. Здесь рассматривается более общая постановка, обусловленная тем, что для планеты недостаточно одной карты. Последнее возможно, если перелёт совершается лишь в северном или только в южном полушарии; в общем случае следует воспринимать сферическую поверхность Земли как (компактное) многообразие S^2 размерности 2.

Действительно, его структура определяется шестью картами $(U_{i,\varepsilon}, \varphi_{i,\varepsilon})$, где открытые множества $U_{i,\varepsilon}$ $(i = 1, 2, 3;\ \varepsilon = \pm 1)$ образуют поверхность S^2, и чтобы яснее обозначить атлас, удобно считать, что сфера содержится в $\mathbb{R}^3\{x_1, x_2, x_3, \}$. Тогда указанные множества описываются неравенствами $\varepsilon x_i > 0$, а отображения

$$\begin{aligned} \varphi_{1,\varepsilon}:\ U_{1,\varepsilon} \to \mathbb{R}^2 \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_3) \\ \varphi_{2,\varepsilon}:\ U_{2,\varepsilon} \to \mathbb{R}^2 \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_3) \\ \varphi_{3,\varepsilon}:\ U_{3,\varepsilon} \to \mathbb{R}^2 \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2) \end{aligned} \tag{7}$$

вкупе с ними составляют атлас S^2.

Для получения явных выражений для F_φ и F_ψ необходимо использовать уравнения Лагранжа, каждое из которых является дифференциальным уравнением второго порядка, поэтому векторное поле строится на многообразии $F^4 = S^2 \times \mathbb{R}^2\{\dot\varphi, \dot\psi\}$ размерности 4, представляющем собой произведение двух многообразий размерности 2.

Воспринимая φ и ψ как обобщённые координаты и пренебрегая орбитальным движением Земли и силами солнечно-лунного притяжения, можно получить лагранжевы уравнения в следующем виде

$$\begin{aligned} m_0\, R\, (\ddot\varphi - (\dot\psi + \sigma)^2\, \sin\varphi \cos\varphi) &= F_\varphi \\ m_0\, R\, (\ddot\psi\, \sin\varphi + 2\, \dot\varphi\, (\dot\psi + \sigma)\, \cos\varphi) &= F_\psi, \end{aligned} \tag{8}$$

где абсолютная скорость вращения точки вокруг земной оси при сделанных предположениях получена как сумма $\dot\psi + \sigma$.

В рассматриваемой задаче допустимо заменить S^2 другим многообразием $\tilde S^2$, удалив из земной сферы северный и южный полюсы. Тогда атлас $\tilde S^2$ будет состоять лишь из одной карты $(U^2, \tilde\varphi)$ с открытым множеством U^2, где $\tilde\varphi(U^2) \subset \mathbb{R}^2\{\varphi, \psi\}$. Если теперь в четырёхмерном векторном пространстве $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2\{\varphi, \psi\} \times \mathbb{R}^2\{\dot\varphi, \dot\psi\}$ ввести координаты

$$y_1 = \varphi, \quad y_2 = \dot\varphi, \quad y_3 = \psi, \quad y_4 = \dot\psi \tag{9}$$

(и для простоты положить $m_0 R = 1$), то уравнения

$$\begin{aligned} \dot y_1 = y_2, \quad \dot y_2 &= F_\varphi + (y_4 + \sigma)^2\, \sin y_1 \cos y_1, \\ \dot y_3 = y_4, \quad \dot y_4 &= F_\psi\, \sin^{-1} y_1 - 2\, y_2\, (y_4 + \sigma)\, \operatorname{ctg} y_1 \end{aligned} \tag{10}$$

образуют динамическую систему, которая, как показано выше, обратным диффеоморфизмом индуцирует на $\tilde S^2$ искомое векторное поле.

В выражениях (10) функции F_φ и F_ψ зависят от y_1, y_2, y_3, y_4 и их формулы связаны между собой. Для того, чтобы определить эту связь, прежде всего надо продифференцировать исходное соотношение (6):

$$\dot\psi\, \sin\varphi - \dot\varphi\, \operatorname{tg}\alpha = \tilde\Phi(\varphi, \psi),$$

где правая часть обращается в нуль на точках локсодромы, или в новых обозначениях:

$$y_4\, \sin y_1 - y_2\, \operatorname{tg}\alpha = \Phi(y_1, y_3). \tag{11}$$

Повторное дифференцирование в силу системы (10) даёт искомое соотношение между $F_\varphi(y_1, y_2, y_3, y_4)$ и $F_\psi(y_1, y_2, y_3, y_4)$ в виде следующего равенства, которое содержит в правой части производную $\dot\Phi$ в силу системы

$$\begin{aligned} F_\psi\, \sin y_1 - y_2\, (y_4 + \sigma)\, \cos y_1 - [F_\varphi + (1/2)\, (y_4 + \sigma)^2\, \sin 2y_1]\, \operatorname{tg}\alpha = \\ = \Phi'_{y_1}(y_1, y_3)\, y_2 + \Phi'_{y_3}(y_1, y_3)\, y_4. \end{aligned} \tag{12}$$

Далее, сама поставленная задача требует предварительного исследования, а именно, определению векторного поля на сфере должно предшествовать условие корректности задачи. Действительно, если положить в выражении (6) $\varphi_0 = \varphi_A$, $\psi_0 = \psi_A$, то условие того, что точка B лежит на локсодроме заключается в выполнении соотношения

$$\ln\left[\operatorname{tg}(\varphi_B/2)\, \operatorname{ctg}(\varphi_A/2)\right] - (\psi_B - \psi_A)\operatorname{ctg}\alpha = 0. \tag{13}$$

Таким образом, координаты точки B можно задавать произвольно, а подходящий угол α выбирается из условия (11).

Литература

1. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. — М.: Наука, 1986. — С. 224.
2. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980. — С. 232.
3. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — С. 526.
4. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. — М.: "Мир 1973. — С. 188.
5. *Галиуллин И. А.* Построение динамических систем на многообразиях // Дифференц. уравнения. — 1991. — Т. 27, вып. 12. — С. 2053–2058.

UDC 513.73; 531.31

The Inverse Boundary-Values Problems of Dynamics on Manifolds

L. A. Kondratyeva

Department of Mathematical Cybernetics
Moscow aviation institute
4, Volokolamskoe Chaussee, 125993, Moscow, Russia

The unverse boundary-values problem is formulated in supposition that the differentiable manifold, two points and the curve on it are given and there is required to construct the dynamical system on this manifold so that the curve is an integral one for this dynamical system. An example is considered: the motion of the material point along the loxodrome on the Earth surface.

Key words and phrases: dynamics, differentiable manifold, inverse problem, boundary-values problem, loxodrome.