Математика

УДК 517.5

О теореме вложения для пространств Соболева со смешанной нормой для предельных показателей

Н. Б. Викторова, И. Л. Куценко

Кафедра нелинейного анализа и оптимизации
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо–Маклая, д.6, Москва, 117198, Россия

Доказана теорема вложения в двумерном случае для предельных показателей.

Ключевые слова: теорема вложения, пространство Соболева, смешанная норма.

1. Введение

Определение 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, где $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $i = \overline{1, n}$. Говорят, что функция $f \in \mathrm{L}_{\overline{p}}(\mathbb{R}^n)$, если f измерима на $\mathbb{R}^n$ и конечна следующая смешанная норма

$$\|f\|_{p_1,\ldots,p_n} \equiv \|f\|_{\mathrm{L}_{\overline{p}(\mathbb{R}^n)}} =$$
$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\ldots \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, \ldots, x_n)|^{p_1} \mathrm{d}x_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \mathrm{d}x_2 \right)^{\frac{p_3}{p_2}} \ldots \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} \mathrm{d}x_n \right)^{\frac{1}{p_n}}.$$

Если некоторое $p_i = \infty$, то в этом выражении вместо интеграла по x_i понимается существенная верхняя грань по этой переменной.

Основные свойства пространства $\mathrm{L}_{\overline{p}}((R)^n)$ изложены, например, в [1, 2].

Определение 2. Пусть $l \in \mathbb{N}$, $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, где $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $i = \overline{1, n}$. Говорят,что функция $f \in \mathrm{W}^l_{\overline{p}}(\mathbb{R}^n)$, если $f \in \mathrm{L}_{\overline{p}}(\mathbb{R}^n)$, для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = l$ существуют обобщённые производные $D^\alpha f$ и конечна норма $\|f\|_{\mathrm{W}^l_{\overline{p}}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{\mathrm{L}_{\overline{p}}(\mathbb{R}^n)} + \sum\limits_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_{\mathrm{L}_{\overline{p}}(\mathbb{R}^n)}$.

Определение 3. Говорят, что нормированное пространство Z_1 вложено в нормированное пространство Z_2 ($\mathrm{Z}_1 \hookrightarrow \mathrm{Z}_2$), если
1. $\mathrm{Z}_1 \subset \mathrm{Z}_2$;
2. Существует такое $C > 0$, что для любых $f \in \mathrm{Z}_1$ $\|f\|_{\mathrm{Z}_2} \leqslant C \|f\|_{\mathrm{Z}_1}$

(т.е. оператор вложения $I : \mathrm{Z}_1 \to \mathrm{Z}_2$ непрерывен).

Свойства пространств Соболева со смешанной нормой $\mathrm{W}^l_{\overline{p}}(\mathbb{R}^n)$ и теорема вложения для них изложены в [2, 3].

Будем рассматривать вопрос о том, при каких условиях на параметры справедлива теорема вложения
$$\mathrm{W}^l_{\overline{p}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathrm{L}_{\overline{q}}(\mathbb{R}^n). \tag{1}$$

Простые примеры показывают, что для справедливости этого выражения необходимо, чтобы
$$1 \leqslant p_i \leqslant q_i \leqslant \infty, \quad i = \overline{1, n} \tag{2}$$

Статья поступила в редакцию 14 сентября 2009 г.

и чтобы
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}\right)\leqslant l. \tag{3}$$

В непредельном случае, когда $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}\right)<l$, в [3] доказано, что при выполнении условия (2) вложение (1) имеет место. В предельном случае, когда
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}\right)=l, \tag{4}$$
в [3] справедливость вложения (1) установлена при некоторых дополнительных предположениях, а именно доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть*
$$l\in\mathbb{N},\quad 1\leqslant p_i\leqslant q_i\leqslant\infty,\quad i=\overline{1,n-1}, \tag{5}$$
$$1<p_n<q_n<\infty\quad \textit{при}\quad 1=p_n<q_n=\infty, \tag{6}$$
и выполнено соотношение (4), тогда имеет место вложение (1).

В [3] теорема вложения 1 доказывается на основе некоторого интегрального представления функции f через её производные. Непредельный случай не вызывает особых затруднений: достаточно воспользоваться n раз обобщённым неравенством Минковского и неравенством Юнга для свёрток. В предельном случае дело обстоит иначе. На первых $(n-1)$ шагах применяются обобщённое неравенство Минковского и неравенство Юнга, а на последнем n-м шаге применяется неравенство Харди–Литтлвуда, что и приводит к ограничению $1<p_n<q_n<\infty$ (случай $p_n=1$ и $q_n=\infty$ не требуют дополнительных оценок).

Отметим, что условие (6) не является необходимым для справедливости вложения (1), как это следует, например, из более раннего результата, полученного в [4], который на языке пространств со смешанной нормой может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 2. *Пусть $l\in\mathbb{N}$, $1\leqslant m\leqslant n$, $p_1=\ldots=p_n=p$, $q_1=\ldots=q_m=q$, $q_{m+1}=\ldots=q_n=\infty$, причём $1\leqslant p<q<\infty$, и выполняется условие (4), принимающее вид*
$$\frac{n}{p}-\frac{m}{q}=l. \tag{4$'$}$$
Тогда имеет место вложение (1), теперь записанное следующим образом
$$\mathrm{W}^{l}_{(\underbrace{p,\ldots,p}_{n})}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow \mathrm{L}_{(\underbrace{q,\ldots,q}_{m},\infty,\ldots,\infty)}(\mathbb{R}^n). \tag{1$'$}$$

В связи с указанными соображениями возникает вопрос о том, насколько существенным является условие (6) и нельзя ли заменить его условием $1\leqslant p_n\leqslant q_n\leqslant\infty$. Целью настоящей работы является доказательство того, что во всяком случае при $n=2$ это сделать можно.

Отметим, что при $n=2$ из условий (2) и (4) следует, что $l=1$ или $l=2$, причём при $l=2$ $p_1=p_2=1$ и $q_1=q_2=\infty$. В последнем случае (это случай несмешанной нормы) $\mathrm{W}^2_{(1,1)}(\mathbb{R}^2)\hookrightarrow\mathrm{L}_{(\infty,\infty)}(\mathbb{R}^2)$, причём
$$\|f\|_{\infty,\infty}\leqslant\frac{1}{4}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\right\|_{1,1}. \tag{7}$$
Таким образом, достаточно рассмотреть случай $l=1$.

2. Основные результаты

Теорема 3. *Пусть*

$$1 \leqslant p_1 \leqslant q_1 \leqslant \infty, \quad 1 \leqslant p_2 \leqslant q_2 \leqslant \infty \tag{8}$$

и

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} = 1, \tag{9}$$

причём при $q_1 = q_2 = \infty$ *дополнительно предполагается, что* $p_1 = 1$, $p_2 = \infty$ *или наоборот* $p_1 = \infty$, $p_2 = 1$. *Тогда*

$$\mathrm{W}^1_{(p_1,p_2)}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow \mathrm{L}_{(q_1,q_2)}(\mathbb{R}^2), \tag{10}$$

причём для любых $f \in \mathrm{W}^1_{(p_1,p_2)}(\mathbb{R}^2)$

$$\|f\|_{q_1,q_2} \leqslant C_1 \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{p_1,p_2}^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}} \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\|_{p_1,p_2}^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}}, \tag{11}$$

где

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1 \right)^{-\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)} \cdot p_2^{1 - 2\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)}, \tag{12}$$

если $q_1 < \infty$ *или* $q_2 < \infty$, *и*

$$C_1 = \frac{1}{2}, \tag{13}$$

если $q_1 = q_2 = \infty$ *(при этом* $p_1 = \infty$, $p_2 = 1$ *или* $p_1 = 1$, $p_2 = \infty$*).*

Замечание. Будем говорить, что $f \in \mathrm{W}^1_{p,r}(\mathbb{R})$, где $1 \leqslant p, r \leqslant \infty$, если $f \in \mathrm{L}_p(\mathbb{R})$ и существует обобщённая производная $f' \in \mathrm{L}_r(\mathbb{R})$.

Положим $\|f\|_{\mathrm{W}^1_{p,r}(\mathbb{R})} = \|f\|_{\mathrm{L}_p(\mathbb{R})} + \|f'\|_{\mathrm{L}_r(\mathbb{R})}$. Пусть $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$. Известно, что для того, чтобы $\mathrm{W}^l_{p,r}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{L}_q(\mathbb{R})$, необходимо и достаточно, чтобы $p \leqslant q$ [5].

Лемма 1. *Пусть* $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$, *причём* $p < q$. *Тогда для любых* $f \in \mathrm{W}^1_{p,r}(\mathbb{R})$

$$\|f\|_q \leqslant C_2 \|f\|_p^{1-\alpha} \cdot \|f'\|_r, \tag{14}$$

где

$$\alpha = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r'} \right)^{-1} \tag{15}$$

(r' *— показатель, сопряжённый к* r*), а*

$$C_2 = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{p}{r'} \right) \right]^{\alpha}. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $q = \infty$. Тогда для $\xi > 0$

$$\|f\|_\infty = \left\| |f|^\xi \right\|_\infty^{\frac{1}{\xi}} \leqslant \left(\frac{1}{2} \left\| \left(|f|^\xi\right)' \right\|_1 \right)^{\frac{1}{\xi}} =$$

$$= \left(\frac{\xi}{2} \right)^{\frac{1}{\xi}} \left\| |f|^{\xi-1} \cdot f' \right\|_1^{\frac{1}{\xi}} \leqslant \left(\frac{\xi}{2} \right)^{\frac{1}{\xi}} \left(\|f\|_{(\xi-1)r'} \cdot \|f'\|_r \right)^{\frac{1}{\xi}}.$$

Выбирая ξ так, чтобы $(\xi-1)r' = p$, получим, что

$$\|f\|_\infty \leqslant \left(\frac{p+r'}{2r'}\right)^{\frac{r'}{p+r'}} \|f\|_p^{\frac{p}{p+r'}} \cdot \|f'\|_r^{\frac{r'}{p+r'}}, \tag{14'}$$

что совпадает с (14) при $q=\infty$.

Если $q<\infty$, то достаточно учесть, что при $q>p$ $\|f\|_q \leqslant \|f\|_p^{\frac{p}{q}} \cdot \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{q}}$ и воспользоваться (14′). □

Лемма 2. *Пусть* $1\leqslant p\leqslant q<\infty$, $f\in \mathrm{W}^1_{q,p}(\mathbb{R})$ *и* $g\in \mathrm{L}_p(\mathbb{R})$.

Тогда

$$\left\||f|^{q-1}\cdot g\right\|_1 \leqslant C_3 \|f\|_q^{q-1-\beta}\cdot \|f'\|_p^\beta \cdot \|g\|_p, \tag{17}$$

где

$$\beta = \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\cdot\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\right)^{-1}, \tag{18}$$

а

$$C_3 = \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{q}{p'}\right)\right]^\beta. \tag{19}$$

Доказательство. Так как

$$\sup_{g\in \mathrm{L}_p(\mathbb{R}) g\nsim 0} \frac{\left\||f|^{g-1}g\right\|_1}{\|g\|_p} = \left\||f|^{q-1}\right\|_{p'} = \|f\|_{(q-1)p'}^{q-1},$$

то (17) с произвольными $f\in \mathrm{W}^1_{q,p}(\mathbb{R})$ и $g\in \mathrm{L}_p(\mathbb{R})$ эквивалентно неравенству

$$\|f\|_{(q-1)p'}^{q-1} \leqslant C_3 \|f\|_q^{q-1-\beta}\cdot\|f'\|_p^\beta \tag{20}$$

с произвольными $f\in \mathrm{W}^1_{q,p}(\mathbb{R})$.

А далее достаточно воспользоваться леммой 1. □

Лемма 3. *Пусть* $1\leqslant p_1\leqslant q_1<\infty$, $1\leqslant p_2\leqslant\infty$, $f\in \mathrm{W}^1_{(p_1,p_2)}(\mathbb{R}^2)$.

Тогда для почти всех $x_2\in\mathbb{R}$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\|f(\cdot,x_2)\|_{q_1}^{1+\gamma}\right)\right| \leqslant C_4 \left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\cdot,x_2)\right\|_{p_1}^\gamma \cdot \left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}(\cdot,x_2)\right\|_{p_1}, \tag{21}$$

где

$$\gamma = \left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\left(\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{q_1}\right)^{-1}, \tag{22}$$

а

$$C_4 = \left(\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{q_1}\right)^{-1}\left[\frac{q_1}{2}\left(\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{q_1}\right)\right]^\gamma. \tag{23}$$

Доказательство.

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x_1,x_2)|^{q_1}\,\mathrm{d}x_1 = q_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x_1,x_2)|^{q_1-1}\,\mathrm{sign}f(x_1,x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1.$$

По лемме (2)

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x_1,x_2)|^{q_1}\,\mathrm{d}x_1\right| \leqslant q_1\cdot\tilde{C}_3\,\|f(\cdot,x_2)\|_{q_1}^{q_1-1-\gamma}\cdot\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\cdot,x_2)\right\|_{p_1}^{\gamma}\cdot\left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}(\cdot,x_2)\right\|_{p_1}.$$

$\tilde{C}_3$ вычисляется по (19) с заменой p на p_1 и q на q_1.

Далее учитываем, что

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\|f(\cdot,x_2)\|_{q_1}^{1+\gamma}\right) = \frac{1}{q_1}\left(\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{q_1}\right)^{-1}\|f(\cdot,x_2)\|_{q_1}^{1+\gamma-q_1}\,\frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x_1,x_2)|_1^{q}\,\mathrm{d}x_1.$$

Лемма 4. *Пусть* $1\leqslant p_1\leqslant q_1<\infty$, $1\leqslant p_2\leqslant\infty$ *и*

$$\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}+\frac{1}{p_2}=1 \tag{24}$$

или $q_1=\infty$, *и при этом* $p_1=1$, $p_2=\infty$ *или* $p_1=\infty$, $p_2=1$.

Тогда для любых $f\in \mathrm{W}^1_{(p_1,p_2)}(\mathbb{R}^2)$ *справедливо неравенство (11), принимающее вид*

$$\|f\|_{q_1,\infty}\leqslant C_5\cdot\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_{p_1,p_2}^{\frac{1}{p_2'}}\cdot\left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_{p_1,p_2}^{\frac{1}{p_2}},\ \text{где } C_5=\frac{1}{2}\,q_1^{\frac{1}{p_2'}}\,p_2^{\frac{2}{p_2}-1} \tag{25}$$

при $q_1<\infty$ *и* $C_5=\frac{1}{2}$, *если* $q_1=\infty$.

Доказательство. Пусть $q_1<\infty$. Тогда

$$\|f\|_{q_1,\infty}^{p_2}=\left\|\|f\|_{q_1}^{p_2}\right\|_{\infty}\leqslant\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial}{\partial x_2}\|f\|_{q_1}^{p_2}\right\|_1\leqslant\frac{C_4}{2}\left\|\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_{p_1}^{p_2-1}\cdot\left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_{p_1}\right\|_1\leqslant$$
$$\leqslant\frac{c_4}{2}\left\|\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_{p_1}^{p_2-1}\right\|_{p_2'}\cdot\left\|\left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_{p_1}\right\|_{p_2}=\frac{C_4}{2}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_{p_1,p_2}^{p_2-1}\cdot\left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_{p_1,p_2},$$

откуда и следует (25).

Если $p_2=\infty$, то $q_1=\infty$, $p_1=1$.

Пусть $q_1=\infty$. Тогда при $p_1=1$, $p_2=\infty$ неравенство (25) принимает вид

$$\|f\|_{\infty,\infty}\leqslant\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_{1,\infty}.$$

При $p_1=\infty$, $p_2=1$ (25) имеет аналогичный вид. □

Лемма 5. *Пусть* $1\leqslant p_1\leqslant\infty$, $1\leqslant p_2\leqslant q_2<\infty$ *и*

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}=1 \tag{26}$$

или $q_2=\infty$ *и при этом* $p_1=1$, $p_2=\infty$ *или наоборот. Тогда для любых* $f\in \mathrm{W}^1_{(p_1,p_2)}(\mathbb{R}^2)$ *справедливо неравенство (11), принимающее вид*

$$\|f\|_{\infty,q_2}\leqslant C_6\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_{p_1,p_2}^{\frac{1}{p_1}}\cdot\left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_{p_1,p_2}^{\frac{1}{p_1}},\quad C_6=\frac{1}{2}q_2^{\frac{1}{p_1}}\,p_2^{1-\frac{2}{p_1}} \tag{27}$$

при $q_2<\infty$ *и* $C_6=\frac{1}{2}$ *при* $q_2=\infty$.

В доказательстве повторяются выкладки, изложенные при доказательстве леммы 1. Применяя окончательно лемму 4, получим искомое неравенство (27).

Докажем теорему 3.

Доказательство. Случай $q_1 = q_2 = \infty$ (тогда $p_1 = 1$, $p_2 = \infty$ или $p_1 = \infty$, $p_2 = 1$) рассмотрен в лемме 4.

Пусть $q_1 < \infty$ или $q_2 < \infty$. Тогда $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1$. Положим $r = \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1\right)^{-1}$. Тогда $\frac{1}{r} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$. Выберем $\theta = \frac{1}{q_2}\left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}\right)^{-1}$. Так как $\frac{1}{q_1} = \frac{1-\theta}{r} + \frac{\theta}{\infty}$, $\frac{1}{q_2} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{r}$, то $\|f\|_{q_1,q_2} \leqslant \|f\|_{r,\infty}^{1-\theta} \cdot \|f\|_{\infty,r}^{\theta}$.

Применяя леммы 4 и 5, имеем

$$\|f\|_{q_1,q_2} \leqslant C_5^{1-\theta} \cdot C_6^{\theta} \cdot \left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_{p_1,p_2}^{\frac{1-\theta}{p_2'}+\frac{\theta}{p_1}} \cdot \left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_{p_1,p_2}^{\frac{1-\theta}{p_2}+\frac{\theta}{p_1'}} = C_5^{1-\theta} \cdot C_6^{\theta} \cdot \left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_{p_1,p_2}^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}} \cdot \left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_{p_1,p_2}^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}},$$

откуда следует (11) с $C_1 = C_5^{1-\theta} \cdot C_6^{\theta}$. □

3. Заключение

В работе доказана теорема вложения $\mathrm{W}^1_{(p_1,p_2)}(\mathbb{R}^2)$ в $\mathrm{L}_{(q_1,q_2)}(\mathbb{R}^2)$ при всех допустимых значениях параметров, включая неисследованные ранее.

Литература

1. *Benedec A., Panzone R.* The Space L^p with Mixed Norm // Duke Math. J. — 1961. — Vol. 28, No 3. — Pp. 301–324.
2. *Гудиев А. Х.* Теорема вложения для следа в абстрактных функциях // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 147, № 4. — С. 764–767.
3. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теорема вложения. — М.: Наука, 1975.
4. *Gagliazdo E.* Proprieta di Alcune Classi di Funzioni in Piu Variabili // Ricerche di Mat. — 1958. — Vol. 7, No 1. — Pp. 102–137.
5. *Габушин В. Н.* Неравенства для норм функции и её производных в метриках L_p // Математ. заметки. — 1967. — Т. 1, № 3. — С. 291–298.

UDC 517.5

About Embedding Theorem for Sobolev Spaces with Mixed Norm for Extreme Indices

N. B. Victorova, I. L. Kutsenko

Department of Optimization and Nonlinear Analysis
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., 117198, Moscow, Russia

The embedding theorem is proved for extreme indices in two-dimensional case.

Key words and phrases: embedding theorem, Sobolev space, mixed norm.