

Киральная космологическая модель, включающая тёмную энергию и тёмную материю

Р. Р. Аббязов, С. В. Червон

Кафедра физики

*Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова
Россия, 432700, Ульяновск, площадь 100-летия со дня рождения В.И. Ленина, 4*

Нелинейные сигма-модели с потенциалом взаимодействия (киральные космологические модели) широко применяются для описания различных эпох эволюции Вселенной. Так, при описании эпохи инфляции значительный прогресс в понимании сути этого явления стал возможным благодаря методу построения точных решений модели инфляции. Полученные точные решения рассматриваются как фоновые при изучении космологических возмущений. Однако применение указанного метода для описания Вселенной в современную эпоху, соответствующую преобладанию тёмной материи и тёмной энергии над барионной материей и радиацией, сталкивается со значительными трудностями. В связи с этим одним из возможных подходов к решению данной проблемы является исследование эволюционных свойств кинетического взаимодействия скалярных полей, описывающих тёмную энергию, рассматривая поведение метрических компонент киральных полей в зависимости от масштабного фактора. Такой подход позволяет описать как тёмную энергию, так и тёмную материю, основываясь на специальных свойствах метрики внутреннего пространства нелинейной сигма модели.

Ключевые слова: космологическая модель, сигма модель, тёмная энергия.

1. Введение

Согласно наблюдательным данным [1–3], Вселенная в настоящее время расширяется ускоренно, а также на 96% состоит из тёмной энергии и тёмной материи. В связи с этим было выдвинуто большое количество моделей, в которых предпринималась попытка объяснить упомянутые экспериментальные факты. Одной из наиболее известных среди предложенных моделей является Λ CDM модель [4], в которой однако имеются проблемы иерархий и тонкой настройки. Развитием Λ CDM модели являются модели с динамической тёмной энергией, среди которых одними из наиболее популярных являются модели со скалярными полями [5–7].

Сигма модели благодаря наличию внутреннего пространства (т. н. пространства целей) способны охватить широкий класс моделей, обобщая как модели с квинтэссенцией, фантомными, так и с квинтомными полями [8–12]. Например, в работах [13–15] было предложено рассматривать киральную космологическую модель как модель, объединяющую взаимодействие кинетического и потенциального типа между скалярными полями тёмного сектора: полем тёмной энергии [7, 16, 17], квинтэссенции [5], фантомным и квинтомным полем [9].

Одним из основных методов для исследования уравнений является метод построения точных решений. Однако современный этап эволюции Вселенной характеризуется наличием компонент, традиционно описываемых идеальной жидкостью, добавление которой к уравнениям киральной космологической модели значительно осложняет их решение. Трудности, возникающие при построении точных решений многокомпонентных систем, вынуждают исследователей искать альтернативные пути к решению космологических уравнений, в том числе с применением численных методов. В связи с проблемой построения точных решений представляет интерес подход, предложенный в работе [18], где был представлен оригинальный анзац для кинетических составляющих модели с двумя скалярными полями. Как показано в настоящей работе, аналогичный подход к киральным полям тёмного сектора нелинейной сигма-модели позволяет описывать не только тёмную энергию, но и тёмную материю.

Отправной точкой в наших исследованиях является киральная космологическая модель как обобщение мультикомпонентного скалярного поля [19–22]. Рассмотрев случай двух скалярных полей с постоянным потенциалом, добавляем зависимость потенциала от одного из полей, а также вводим в модель барионную материю и радиацию.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 представлен общий вид уравнений киральной космологической модели, которая взаимодействует с идеальной жидкостью. В разделе 3 обсуждается модель с постоянными потенциалами, а также некоторые космологические следствия, оказывающиеся полезными при выборе анзаца для скалярных полей. В разделе 4 обсуждается анзац для скалярных полей, выводится уравнение Фридмана для σ CDM модели (модели со скалярными полями нелинейной сигма модели и холодной тёмной материей). Раздел 5 посвящён сопоставлению с экспериментальными данными, а также выводу выражений некоторых космологических величин, характеризующих эволюцию Вселенной, описываемой Λ CDM и σ CDM моделями.

2. Основные уравнения модели

Рассмотрим модель гравитационного поля, порождённого киральными полями нелинейной сигма модели и идеальной жидкостью. В этом случае интеграл действия принимает вид

$$S = S_G + \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} h_{AB} \partial_\mu \varphi^A \partial_\nu \varphi^B - V(\varphi^C) \right) + S_{(pf)}. \quad (1)$$

Здесь S_G — действие для гравитационного поля, $S_{(pf)}$ обозначает часть действия, описывающего идеальную жидкость, $h_{AB} = h_{AB}(\varphi^C)$ — метрика пространства целей (внутреннего пространства) нелинейной сигма-модели, зависящая от скалярных полей φ^C , $\frac{\partial \varphi^A}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \varphi^A$ — частные производные по пространственно-временным координатам, $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ — метрика пространства-времени. Греческие индексы α, μ, \dots меняются в пределах от 0 до 3, латинские A, B, \dots — от 1 до N , так что N соответствует числу полей модели (и размерности пространства целей).

Выпишем уравнения Эйнштейна для исследуемой модели

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G (T_{\mu\nu}^{(\sigma)} + T_{\mu\nu}^{(pf)}). \quad (2)$$

Мы используем систему единиц, в которой скорость света $c = 1$. Здесь величина $T_{\mu\nu}^{(\sigma)}$ описывает поля нелинейно сигма-модели, а $T_{\mu\nu}^{(pf)}$ — тензор энергии–импульса идеальной жидкости.

Тензор энергии–импульса нелинейной сигма-модели имеет вид

$$T_{\mu\nu}^{(\sigma)} = h_{AB} \partial_\mu \varphi^A \partial_\nu \varphi^B - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} h_{AB} \partial_\rho \varphi^A \partial_\sigma \varphi^B + V(\varphi^C) \right), \quad (3)$$

где h_{AB} — метрика пространства целей с линейным элементом

$$ds_\sigma^2 = h_{AB}(\varphi^C) d\varphi^A d\varphi^B. \quad (4)$$

В настоящей работе мы исследуем двухкомпонентные модели с компонентами метрики в виде $h_{11} = \text{const}$, $h_{22} = f(\varphi)$.

Тензор энергии–импульса идеальной жидкости имеет вид

$$T_{\mu\nu}^{(pf)} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (5)$$

где p — давление, ρ — плотность энергии, u^μ — 4-скорость движения элементарного объёма жидкости.

Также необходимо включить в рассмотрение закон сохранения тензора энергии-импульса идеальной жидкости

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(pf)} = 0, \quad (6)$$

и уравнения Эйлера–Лагранжа (уравнения движения) [21] для киральных полей нелинейной сигма-модели

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} h_{AB} \partial_\nu \varphi^B g^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{BC}}{\partial \varphi^A} \partial_\mu \varphi^B \partial_\nu \varphi^C g^{\mu\nu} - \frac{\partial V}{\partial \varphi^A} = 0. \quad (7)$$

В качестве метрики пространства–времени выберем метрику Фридмана–Робертсона–Уокера (ФРУ)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)). \quad (8)$$

Выражение для метрики внутреннего пространства нелинейной сигма-модели для решаемой в настоящей работе задачи запишется как

$$ds_\sigma^2 = h_{11} d\varphi^2 + h_{22}(\varphi) d\chi^2. \quad (9)$$

Основным уравнением, связывающим плотности энергии различных компонент, заполняющих Вселенную, с её эволюцией, является уравнение Фридмана

$$H^2 \equiv \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \sum_\alpha \rho_\alpha. \quad (10)$$

3. Точные решения и анзац

Уравнения киральной космологической модели (без учёта идеальной жидкости) в метрике ФРУ (8), при ограничении на компоненты пространства целей $h_{11} = \text{const}$, $h_{22} = f(\varphi)$, запишутся в виде

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2} h_{11} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} h_{22} \dot{\chi}^2 + V(\varphi, \chi) \right], \quad (11)$$

$$\dot{H} = -8\pi G \left[\frac{1}{2} h_{11} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} h_{22} \dot{\chi}^2 \right], \quad (12)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{1}{2h_{11}} \frac{dh_{22}}{d\varphi} \dot{\chi}^2 + \frac{1}{h_{11}} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \quad (13)$$

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} + \frac{1}{h_{22}} \frac{dh_{22}}{d\varphi} \dot{\varphi} \dot{\chi} + \frac{1}{h_{22}} \frac{\partial V}{\partial \chi} = 0. \quad (14)$$

Как упоминалось во введении для такой модели возможно построение точных решений. Примером такого решения является случай, который соответствует экспоненциальному решению для масштабного фактора в моделях инфляции, то есть случай постоянного потенциала: $V = \Lambda = \text{const}$.

Рассматривая следствие уравнений (11)–(14) $3H^2 + \dot{H} = \Lambda$, найдём решение

$$H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \tanh(\sqrt{3\Lambda}t), \quad a = a_* \left[\cosh(\sqrt{3\Lambda}t) \right]^{1/3} \quad (15)$$

Это известное решение, которое описывает Вселенную де Ситтера.

Учитывая ограничения на h_{11} и h_{22} , из (14) можно выразить второе киральное поле χ через масштабный фактор и компоненту метрики h_{22}

$$\dot{\chi}^2 = \frac{2C}{h_{22}^2 a^6}.$$

Используя это выражение в уравнении (11), можно найти решение для обоих полей в случае заданной зависимости h_{22} от φ . Так, например, для аналога $SO(3)$ инвариантной нелинейной сигма-модели, полагая $h_{11} = -1$, $h_{22} = \sin^2 \varphi$, можно найти точное решение для полей

$$\cos \varphi = -\frac{\sqrt{C_1^2 + 2\Lambda}}{\sqrt{2\Lambda}} \sin \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arctg}(\sinh(\sqrt{3\Lambda}t)) + C_2 \right), \quad (16)$$

$$\chi - \chi_0 = \frac{1}{2a_*} \left[\ln \left| \frac{C_1}{\sqrt{2\Lambda}} \operatorname{tg} z + 1 \right| - \ln \left| \frac{C_1}{\sqrt{2\Lambda}} \operatorname{tg} z - 1 \right| \right], \quad (17)$$

$$z = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arctg}(\sinh(\sqrt{3\Lambda}t)) + C_2. \quad (18)$$

Если учесть в модели пылевидную материю и радиацию, то сложность нахождения точного решения возрастёт многократно. Оригинальный подход к рассмотрению тёмной энергии в форме взаимодействующих скалярных полей предложен в работе [18].

Динамика эволюции Вселенной определялась выражением, $\tilde{H}^2(a) = \rho_X(a) + \frac{\Omega_{0m}}{a^3}$, в котором компонента ρ_X описывала тёмную энергию:

$$\rho_X(a) = \left[\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \dot{\xi}^2 + \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \frac{\beta}{2} \dot{\varphi} \dot{\xi}}} + V(\varphi, \xi) \right].$$

Здесь необходимо сделать общее замечание о том, что слагаемые в правой части уравнения Фридмана, отвечающие тёмной энергии, должны меняться (иметь скейлинговое поведение) не быстрее a^{-3} . Тогда Вселенная в своей эволюции непременно будет иметь момент, когда произойдёт переход от стадии доминирования пылевидной материи к стадии доминирования тёмной энергии и, в свою очередь, к ускоренному расширению. Поэтому автор работы [18], предлагая анзац

$$\rho_\varphi^K = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2(a) = \frac{1}{2} \left(f(a) + \sqrt{f^2(a) - k^2} \right),$$

$$\rho_\xi^K = \frac{1}{2} \dot{\xi}^2(a) = \frac{1}{2} \left(f(a) - \sqrt{f^2(a) - k^2} \right), \quad f(a) = Aa^{-\nu} + k,$$

где $A > 0$, $0 < \nu < 3$, оговаривает соответствующие свойства функции $f(a)$.

Мы могли бы прямо использовать такой же анзац в киральной космологической модели, однако в ней имеется киральная метрика h_{AB} , которая, являясь функцией киральных полей, зависит через них от масштабного фактора. Поэтому представляется полезным изучить связь киральной метрики и киральных полей.

Рассмотрим двухкомпонентную киральную модель с $V = V(\varphi)$. В этом случае решение, найденное для $\dot{\chi}$, остаётся в силе

$$\dot{\chi}^2 = \frac{2C}{h_{22}^2 a^6} \quad \text{или, эквивалентно,} \quad \frac{1}{2} h_{22} \dot{\chi}^2 = \frac{C}{h_{22} a^6},$$

при этом первое поле φ , благодаря наличию переменного потенциала $V(\varphi)$, будет описывать вещество с переменным уравнением состояния.

Если $h_{22} \sim a^{-3}$, то $h_{22}\dot{\chi}^2 \sim a^{-3}$ — такое поведение можно приписать пылевидной (тёмной) материи. Теперь мы можем провести интегрирование уравнений и найти динамику эволюции Вселенной, рассмотрев анзац, отличный от предложенного в [18]

$$\frac{1}{2}h_{22}\dot{\chi}^2 = g(a), \quad \frac{1}{2}h_{11}\dot{\varphi}^2 = f(a),$$

здесь $f(a)$, $g(a)$ — функции, управляющие кинетическими составляющими полей и определяющие анзац.

Второе поле, взаимодействуя с первым, может описывать тёмную материю, т.е.

$$\frac{1}{2}h_{22}\dot{\chi}^2 = Ca^{-3}.$$

Для первого поля рассмотрим анзац простейшего вида $\frac{1}{2}h_{11}\dot{\varphi}^2 = B = \text{const}$. Таким образом, будем иметь $f(a) = B = \text{const}$, $g(a) = Ca^{-3}$, а для киральной метрики примем

$$h_{22} = a^{-3}. \quad (19)$$

Отметим, что предложенные ограничения доставляют нам решение системы уравнений (11)–(14). Действительно, подставляя решения для полей

$$\varphi = \sqrt{\frac{2B}{h_{11}}}t + \varphi_0, \quad \chi = \sqrt{2C}t + \chi_0, \quad (20)$$

следующие из анзаца, определяем потенциал $V(a) = -6B \ln a + Ca^{-3} + V_*$, $V_* = \text{const}$.

Решение для масштабного фактора находится из уравнения

$$H^2 = \frac{C_*}{a^6} + 2\kappa \left(\frac{B}{6} - B \ln a + \frac{C}{3a^3} + \frac{V_*}{6} \right), \quad \kappa = 8\pi G. \quad (21)$$

В общем случае получить масштабный фактор в явной форме не удаётся, но предполагая $C_* = 0$ и $C = 0$ (при этом второе поле χ становится постоянным), находим, что Вселенная находится в стадии экспоненциального расширения с $a \propto \exp(Bt^2)$.

4. Плотность энергии и давление скалярных полей

Чтобы определить плотность энергии и давления можно воспользоваться полученными результатами для кинетической и потенциальной энергии.

$$\begin{aligned} \rho_\sigma &= \frac{1}{2}h_{11}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}h_{22}\dot{\chi}^2 + V(\varphi) = B + Ca^{-3} - 6B \ln a + Ca^{-3} + V_*, \\ p_\sigma &= \frac{1}{2}h_{11}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}h_{22}\dot{\chi}^2 - V(\varphi) = B + 6B \ln a - V_*. \end{aligned} \quad (22)$$

Окончательно будем иметь

$$\rho_\sigma = \Lambda - 6B \ln a + 2Ca^{-3}, \quad \Lambda = B + V_*. \quad (23)$$

Приведём также выражение для потенциала с учётом полученного выражения для ρ_σ

$$V = \rho_\sigma - f - g = \Lambda - 6B \ln a + 2Ca^{-3} - B - Ca^{-3} = \Lambda - 6B \ln a + Ca^{-3} - B. \quad (24)$$

Далее необходимо подставить полученные результаты в уравнение Фридмана и получить выражение для параметра Хаббла — величина, которая входит в выражения, позволяющие сопоставить киральную космологическую модель с современными экспериментальными данными.

Теперь примем во внимание величины, которые характеризуют остальные компоненты космологической модели — радиацию и барионную материю. Уравнения состояния для радиации и барионной материи даются выражениями

$$p_r = \frac{1}{3}\rho_r, \quad p_b = 0.$$

Плотности энергии каждой из компонент, выраженные через критическую плотность, таковы

$$\rho_r = \rho_{r0}a^{-4} = \Omega_{r0}\rho_{c0}a^{-4}, \quad \rho_b = \rho_{b0}a^{-3} = \Omega_{b0}\rho_{c0}a^{-3}, \quad \rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}.$$

Здесь введены вклады в критическую плотность $\Omega_0 = \rho_0/\rho_{c0}$, соответствующие современным значениям, т. е. взятым при $a = a_0 = 1$.

Уравнение Фридмана с учётом дополнения запишется так:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_\sigma + \Omega_{b0}a^{-3} + \Omega_{r0}a^{-4}.$$

Мы можем преобразовать это уравнение, подставив ранее найденное выражение для плотности энергии скалярных полей (23)

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{1}{\rho_c} (\Lambda - 6B \ln a + 2Ca^{-3}) + \Omega_{b0}a^{-3} + \Omega_{r0}a^{-4}.$$

Перенормировав константы, входящие в плотность энергии скалярных полей, мы получим выражение для параметра Хаббла, пригодное для сопоставления с наблюдениями.

$$\tilde{H}^2 = \frac{H^2}{H_0^2} = \tilde{\Lambda} - 6\tilde{B} \ln a + 2\tilde{C}a^{-3} + \Omega_{b0}a^{-3} + \Omega_{r0}a^{-4}, \quad (25)$$

где

$$\tilde{B} = \frac{B}{\rho_c}, \quad \tilde{C} = \frac{C}{\rho_c}, \quad \tilde{\Lambda} = \frac{\Lambda}{\rho_c}, \quad \tilde{H}^2 = \frac{H^2}{H_0^2}. \quad (26)$$

Рассмотрев уравнение Фридмана при $a = a_0 = 1$, мы сможем определить константу $\tilde{\Lambda}$, а также ввести в модель холодную тёмную материю (индекс cdm), которая обязана своим существованием второму скалярному полю χ киральной космологической модели и специальному виду киральной метрики h_{22}

$$\tilde{\Lambda} = 1 - 2\tilde{C} - \Omega_{b0} - \Omega_{r0} = \Omega_{\sigma\Lambda 0}, \quad \Omega_{\sigma cdm 0} = 2\tilde{C}, \quad \Omega_{\sigma m 0} = \Omega_{\sigma cdm 0} + \Omega_{b0}. \quad (27)$$

В итоге получим выражение

$$\tilde{H}^2 = \Omega_{\sigma\Lambda 0} - 6\tilde{B} \ln a + \Omega_{\sigma cdm 0}a^{-3} + \Omega_{b0}a^{-3} + \Omega_{r0}a^{-4}. \quad (28)$$

Так как мы предлагаем в настоящей работе модель, альтернативную Λ CDM модели — модели с космологической постоянной и холодной тёмной материей, то имеет смысл назвать такую киральную космологическую модель σ CDM, в которой тёмная энергия характеризуется переменным уравнением состояния. Отметим, что в пределе $\tilde{B} \rightarrow 0$ мы придём к Λ CDM модели, и в присутствии \tilde{B} , вообще говоря, должны измениться значения Ω_{m0} и $\Omega_{\Lambda0}$ по сравнению с их значениями в Λ CDM модели, что мы отразили в добавлении индекса σ . Однако определение значений Ω требует сопоставления с современными наблюдательными данными.

5. Сопоставление с наблюдательными данными

На сегодняшний момент наблюдения, связанные со сверхновыми Ia типа, предоставляют наиболее надёжное свидетельство об ускоренном расширении Вселенной. Общепринятым является утверждение о том, что сверхновые такого типа обладают некоторой внутренней светимостью, в силу чего они могут использоваться в качестве «стандартных свечей». Поэтому, наблюдая красное смещение сверхновых и их вспышки, можно измерить фотометрическое расстояние сверхновых d_L в зависимости от красного смещения z . В то же время фотометрическое расстояние выражается через параметр Хаббла, таким образом, в функции d_L содержится информация об эволюции Вселенной [16]. В настоящей работе мы используем данные о 557 сверхновых из выборки Union2.1 [1]. Сопоставление с наблюдениями осуществляется с помощью функции χ^2 , которая показывает, насколько хорошо предлагаемая космологическая модель, характеризующаяся параметром Хаббла, соответствует экспериментальным данным

$$\chi_{SN}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[\mu_{obs}(z_i) - \mu(z_i)]^2}{\sigma_i^2(z_i)}. \quad (29)$$

В анализе экспериментальных данных по сверхновым используется так называемый модуль расстояния μ , выражающийся через фотометрическое расстояние, который известен для каждой сверхновой из экспериментальной выборки и является функцией красного смещения [16]

$$\mu(z_i) = 5 \log_{10}[D_L(z_i)] + \mu_0, \quad D_L = H_0 d_L, \quad \tilde{H} = H/H_0. \quad (30)$$

Также необходимо сделать замечание, что параметр Хаббла выражается в Mpc^{-1} , в том случае, если используется система единиц со скоростью света равной единице $c = 1$.

$$\mu_0 = 5 \log_{10} \left[\frac{H_0^{-1}}{\text{Mpc}} \right] + 25 = 42,38 - 5 \log_{10} h, \quad H_0 = \frac{h}{2998} \text{Mpc}^{-1}. \quad (31)$$

Для того, чтобы более точно найти значения параметров, наилучшим образом (best-fit) соответствующие наблюдениям, необходимо дополнительно к сверхновым рассмотреть информацию по барионным акустическим осцилляциям (BAO) [3] и космическому микроволновому фоновому излучению [2]. Функция χ^2 для BAO равна

$$\chi_{BAO}^2 = \left(\frac{D_V(z = 0,35)/D_V(z = 0,2) - 1,736}{0,065} \right)^2, \quad (32)$$

где

$$D_A = (1 + z)^{-2} d_L(z) \quad (33)$$

расстояние по угловому размеру, а

$$D_V \equiv \left[(1+z)^2 D_A^2(z) \frac{z}{H(z)} \right]^{1/3} \quad (34)$$

— эффективное расстояние [3].

Функция для χ^2 для СМВ равна

$$\chi_{СМВ}^2 = (x_i^{th} - x_i^{obs})(C^{-1})_{ij}(x_j^{th} - x_j^{obs}), \quad (35)$$

где $x_i = (l_A, R, z_*)$ — вектор величин, которые характеризуют космологическую модель, а $(C^{-1})_{ij}$ — WMAP7 ковариационная матрица, приведённая в [2]. Значения x_i^{obs} также приведены в [2], а x_i^{th} вычисляются для модели, которая сопоставляется с наблюдательными данными. Здесь используется акустический масштаб, определяющий положение первого акустического пика в спектре мощности микроволнового фонового излучения

$$l_A \equiv (1+z_*) \frac{\pi D_A(z_*)}{r_s(z_*)}, \quad (36)$$

взятый в момент времени, соответствующий отделению излучения от вещества z_* , и горизонт звука

$$r_s(z) = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{1/(1+z)} \frac{da}{a^2 H(a) \sqrt{1 + (3\Omega_b/4\Omega_\gamma)a}}. \quad (37)$$

Для более точного определения момента отделения излучения от вещества используется формула [23]

$$z_* = 1048[1 + 0,00124(\Omega_b h^2)^{-0,738}][1 + g_1(\Omega_m h^2)^{g_2}], \quad (38)$$

$$g_1 = \frac{0,0783(\Omega_b h^2)^{-0,238}}{1 + 39,5(\Omega_b h^2)^{0,763}}, \quad g_2 = \frac{0,560}{1 + 21,1(\Omega_b h^2)^{1,81}}. \quad (39)$$

Параметр смещения R определяется выражением

$$R(z_*) = \sqrt{\Omega_{m0} H_0^2 (1+z_*)} D_A(z_*). \quad (40)$$

В задаче об определении best-fit значений параметров \tilde{B} и \tilde{C} минимизируется сумма $\chi_{\text{joint}}^2 = \chi_{SN}^2 + \chi_{BAO}^2 + \chi_{СМВ}^2$. Также фиксированы вклады в критическую плотность барионной материи и радиации $\Omega_{\gamma 0} = 2,469 \cdot 10^{-5} h^{-2}$, $\Omega_{b0} = 0,022765 \cdot 10^{-2}$, $h = 0,742$. Также необходимо учитывать вклад в критическую плотность релятивистских нейтрино $\Omega_{r0} = (1 + N_{\text{eff}})\Omega_{\gamma 0}$, где $N_{\text{eff}} = 3,04$ — эффективное число нейтрино [16]. Результатом минимизации χ_{joint}^2 являются best-fit значения $\tilde{B} = 0,00078$, $\Omega_{\sigma m 0} = \Omega_{b0} + 2\tilde{C} = \Omega_{b0} + \Omega_{\sigma cdm 0} = 0,23398$. Для Λ CDM модели примем best-fit значение $\Omega_{m0} = 0,27$ и $\Omega_{\Lambda 0} = 1 - \Omega_{m0} - \Omega_{r0}$. Для того, чтобы отличать суммарный вклад тёмной и барионной материи в σ CDM модели от соответствующих величин в Λ CDM модели, мы добавили дополнительный индекс σ к Ω .

5.1. Параметр замедления

Одной из величин, определяющих характер расширения Вселенной и момент перехода от стадии замедленного расширения к стадии ускоренного расширения, является параметр замедления, который определяется следующим образом

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = \frac{\frac{4\pi G}{3} (\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} + 3p_{\alpha})}{\frac{8\pi G}{3} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}}.$$

Наличие в определении второй производной масштабного фактора свидетельствует о том, что момент перехода от замедленного к ускоренному расширению соответствует значению $q = 0$.

Преобразуем это выражение, выписав слагаемые в сумме и введя критическую плотность для перехода к параметрам Ω_b

$$q = \frac{1}{2} \frac{\frac{8\pi G}{3H_0^2} (\rho_b + 3p_b + \rho_r + 3p_r + \rho_{\sigma} + 3p_{\sigma})}{\tilde{H}^2}.$$

Используя полученные ранее выражения для давления и плотности энергии скалярных полей, получим выражение для q в σ CDM модели

$$q_{\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\rho_{0c}} (\rho_b + 2\rho_r + 12B \ln a - 2\Lambda + 2Ca^{-3} + 6B)}{\tilde{H}^2},$$

или, переходя к величинам Ω ,

$$q_{\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{\sigma m_0} a^{-3} + 2\Omega_{r_0} a^{-4} + 12\tilde{B} \ln a - 2\Omega_{\sigma\Lambda_0} + 6\tilde{B}}{\tilde{H}^2}.$$

с параметром Хаббла (28). В Λ CDM модели будем иметь для параметра замедления

$$q_{\Lambda CDM} = \frac{1}{2} \frac{(\Omega_{b_0} a^{-3} + 2\Omega_{r_0} a^{-4} + \Omega_{cdm_0} a^{-3} - 2\Omega_{\Lambda_0})}{\tilde{H}^2}$$

с параметром Хаббла $\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{m_0} a^{-3} + \Omega_{b_0} a^{-3} + \Omega_{r_0} a^{-4}$.

Отличия в числителях и знаменателях формул для q проявляются в различной динамике эволюции Вселенной, описываемой σ CDM и Λ CDM моделями, в частности в различных моментах перехода к ускоренному расширению.

5.2. Уравнение состояния и вклады в критическую плотность

Другим важным космологическим параметром, характеризующим эволюцию Вселенной и отражающим доминирование той или иной компоненты на различных стадиях, является вклад в критическую плотность. Определив $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$, будем иметь выражения для вкладов различных компонент σ CDM модели. Выпишем выражение для $\Omega_{\sigma de}$ — величины, которая характеризует вклад в тёмную энергию, описываемую киральными полями

$$\Omega_{\sigma de} = \frac{\Omega_{\sigma\Lambda_0} - 6\tilde{B} \ln a}{\Omega_{\sigma\Lambda_0} + \Omega_{\sigma cdm_0} a^{-3} + \Omega_{b_0} a^{-3} + \Omega_{r_0} a^{-4} - 6\tilde{B} \ln a}.$$

В Λ CDM модели для тёмной энергии, описываемой космологической постоянной, получим

$$\Omega_{de} = \frac{\Omega_{\Lambda_0}}{\Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{m_0} a^{-3} + \Omega_{b_0} a^{-3} + \Omega_{r_0} a^{-4}}.$$

Обратимся также к ω_{eff} — эффективному параметру уравнения состояния всех компонент, определяемому из $\omega_{\text{eff}} = \sum_{\alpha} p_{\alpha} / \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}$.

Для его вычисления нам понадобятся выражения для давлений, плотностей энергий скалярных полей и других компонент (23), (22), и для параметра Хаббла (28)

$$\rho_r = \rho_{r0} a^{-4} = \Omega_{r0} \rho_{c0} a^{-4}, \quad \rho_b = \rho_{b0} a^{-3} = \Omega_{b0} \rho_{c0} a^{-3}, \quad p_r = \frac{1}{3} \rho_r, \quad p_b = 0,$$

$$\omega_{\text{seff}} = \frac{p_r + p_b + p_{\sigma}}{\rho_r + \rho_b + \rho_{\sigma}} = \frac{\frac{1}{3} \Omega_{r0} a^{-4} + (-\Omega_{\sigma\Lambda 0} + 6\tilde{B} \ln a + 2\tilde{B})}{\Omega_{r0} a^{-4} + \Omega_{\sigma m0} a^{-3} + \Omega_{\sigma\Lambda 0} - 6\tilde{B} \ln a},$$

в то время как в Λ CDM модели будем иметь

$$\omega_{\Lambda\text{CDMeff}} = \frac{\frac{1}{3} \Omega_{r0} a^{-4} - \Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{m0} a^{-3} + \Omega_{r0} a^{-4}}.$$

Известно, что Вселенная переходит к ускоренному расширению в момент времени, когда значение ω_{eff} пересекает значение $-1/3$, и этот момент времени (и соответствующие значение масштабного фактора a) должен в точности совпадать с результатом, получаемым из анализа эволюции q . Что касается параметра уравнения состояния тёмной энергии, то в Λ CDM модели он равен $\omega_{\Lambda\text{CDMde}} = -1$. Как видно из рис. 1 и 2 Вселенная, описываемая Λ CDM моделью, переходит к ускоренному расширению позже, чем описываемая σ CDM моделью $a_{\Lambda\text{CDMacc}} > a_{\sigma\text{acc}}$, что хорошо согласуется с результатами, полученными из сопоставления с наблюдениями, а именно с тем, что в Λ CDM модели суммарное количество материи больше количества материи в σ CDM модели $\Omega_{m0} > \Omega_{\sigma m0}$. Другим следствием этого неравенства является то обстоятельство, что этап преобладания (соответствующий значению масштабного фактора, при котором пересекаются кривые вкладов в критическую плотность Ω) материи над радиацией наступает раньше в Λ CDM, по сравнению с σ CDM моделью, что проиллюстрировано на рис. 3.

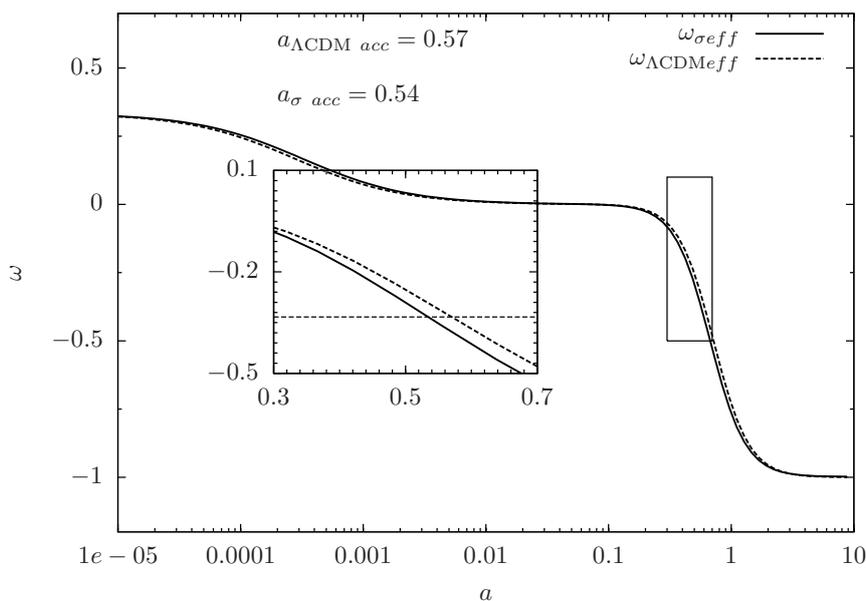


Рис. 1. Эволюция параметров уравнения состояния в Λ CDM и σ CDM моделях

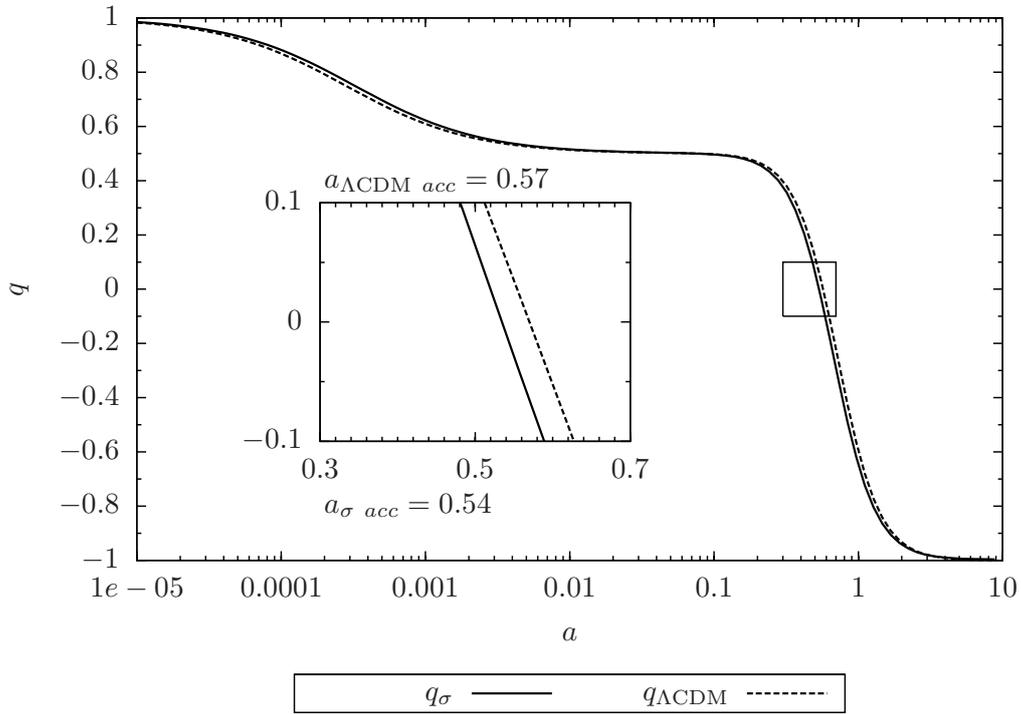


Рис. 2. Параметр замедления Λ CDM и σ CDM моделей

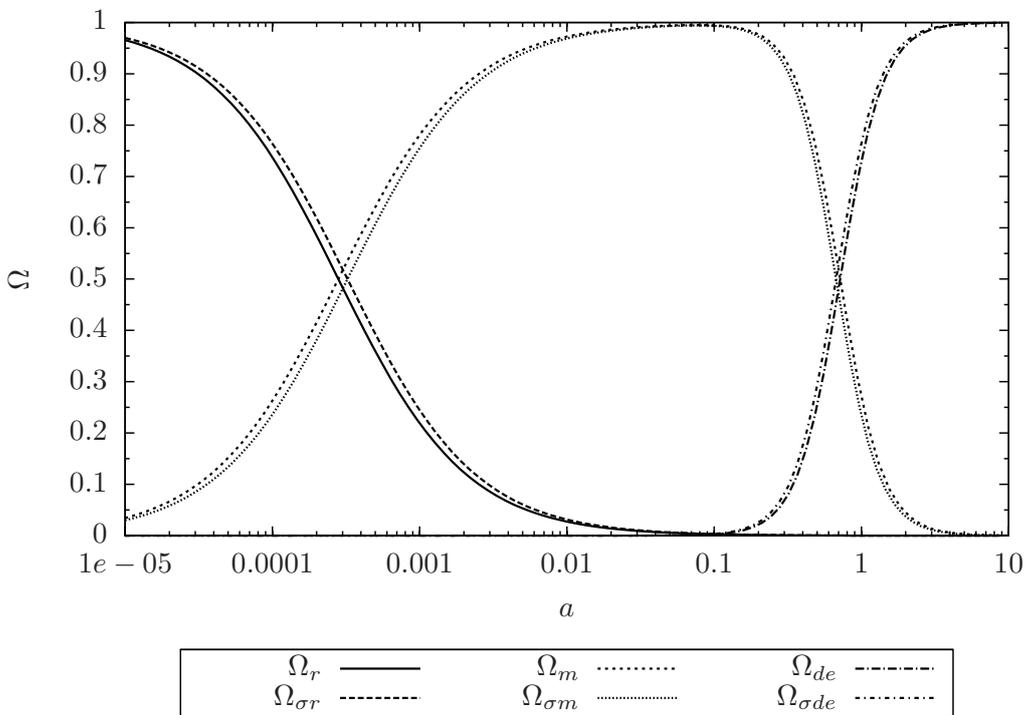


Рис. 3. Вклады в критическую плотность компонент Λ CDM и σ CDM моделей

6. Заключение

В настоящей работе была рассмотрена двумерная киральная космологическая модель с потенциалом самодействия и киральной метрикой специального вида. Основываясь на соображениях, идущих от работ по тёмной энергии, и подходе, использующем особое поведение кинетических энергий скалярных (киральных) полей, мы, с одной стороны, преодолели трудности, существующие в исследовании системы космологических уравнений, описывающих позднюю Вселенную с киральными полями, с другой стороны, мы обнаружили, что поля киральной космологической модели могут описывать не только тёмную энергию, но и тёмную материю. Также был приведён количественный анализ введённой в работе σ CDM модели путём сопоставления с современными экспериментальными данными и отмечены отличия введённой модели от канонической Λ CDM модели.

В недавно опубликованной работе [24] была предложена модель с двумя скалярными полями со специально выбранным потенциалом, что позволило исследовать с помощью неё взаимодействующую тёмную энергию и тёмную материю, без введения для её описания идеальной жидкости. Подход, предложенный в работе, позволяет рассматривать подобную задачу с точки зрения внутреннего пространства киральной модели. Такой подход представляется многообещающим в силу возможности привлечения соображений, основанных на геометрических характеристиках пространства целей [25]. Кроме того, представляется полезным сделать следующее замечание. В связи с тем, что взаимодействие тёмных компонент во Вселенной и «обычной» материи принято описывать экспонентой от скалярного поля (см., например, [26–28]), то подход, предложенный в настоящей работе, может служить основой для рассмотрения моделей со взаимодействующими тёмной материей и тёмной энергией.

С другой стороны, исследования поведения киральной метрики в зависимости от масштабного фактора с последующей реконструкцией позволяет надеяться на то, что полученные результаты могут быть использованы при нахождении точных решений для самосогласованной системы уравнений нелинейной сигма-модели и идеальной жидкости.

Литература

1. The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey: V. Improving the Dark Energy Constraints Above $z = 1$ and Building an Early-Type-Hosted Supernova Sample / N. Suzuki, D. Rubin, C. Lidman et al. // *Astrophys. J.* — 2012. — Vol. 746. — P. 85.
2. Komatsu E. et al. Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation // *Astrophys. J. Suppl.* — 2011. — Vol. 192. — P. 18.
3. Percival W. J. et al. Baryon Acoustic Oscillations in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 Galaxy Sample // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2010. — Vol. 401. — Pp. 2148–2168.
4. Sahni V., Starobinsky A. A. The Case for a Positive Cosmological Lambda Term // *Int. J. Mod. Phys.* — 2000. — Vol. D9. — Pp. 373–444.
5. Copeland E. J., Sami M., Tsujikawa S. Dynamics of Dark Energy // *Int. J. Mod. Phys.* — 2006. — Vol. D15. — Pp. 1753–1936.
6. Tsujikawa S. Dark Energy: Investigation and Modeling. — 2010.
7. Dark Energy / M. Li, X.-D. Li, S. Wang, Y. Wang // *Commun. Theor. Phys.* — 2011. — Vol. 56. — Pp. 525–604.
8. Setare M. R., Saridakis E. N. Quintom Model with O(N) Symmetry // *JCAP.* — 2008. — Vol. 0809. — P. 026.
9. Quintom Cosmology: Theoretical Implications and Observations / Y.-F. Cai, E. N. Saridakis, M. R. Setare, J.-Q. Xia // *Phys. Rept.* — 2010. — Vol. 493. — Pp. 1–60.

10. Internal Space Structure Generalization of the Quintom Cosmological Scenario / L. P. Chimento, M. I. Forte, R. Lazkoz, M. G. Richarte // *Phys. Rev.* — 2009. — Vol. D79. — P. 043502.
11. *Saridakis E. N., Weller J. M.* A Quintom Scenario with Mixed Kinetic Terms // *Phys. Rev.* — 2010. — Vol. D81. — P. 123523.
12. *van de Bruck C., Weller J. M.* Quintessence Dynamics with Two Scalar Fields and Mixed Kinetic Terms // *Phys. Rev.* — 2009. — Vol. D80. — P. 123014.
13. *Червон С. В., Панина О. Г.* О геометрическом взаимодействии инфлатона, тёмной материи и тёмной энергии // *Вестник СамГУ, Естественнонаучная серия.* — 2008. — № 8/1 (67). — С. 611–624. [*Chervon S. V., Panina O. G.* On Geometric Interaction of Inflaton, Dark Matter and Dark Energy // *Vestnik SamGU, Estestvennonauchnaya seriya.* — 2008. — No 8/1(67). — P. 611–624]
14. *Панина О. Г., Червон С. В.* Динамика полей тёмного сектора на фоне космологической инфляции // *Электронный журнал «Исследовано в России».* — 2009. — С. 1190–1194. [*Panina O. G., Chervon S. V.* Chiral Fields Dynamics on the Inflation Background // *Elektronnyi Zhurnal "Issledovano v Rossii"*, <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2009/093.pdf>. — 2009. — P. 1190–1194]
15. *Червон С. В., Панина О. Г.* Эффекты жёсткого воздействия полей тёмного сектора на космологические возмущения // *Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика».* — 2010. — № 4. — С. 121–132. [*Chervon S. V., Panina O. G.* Effects of Stiff Influence Dark Sector Fields on Cosmological Perturbations // *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics"*. — 2010. — No 4. — P. 121–132]
16. *Li M., Li X., Zhang X.* Comparison of Dark Energy Models: A Perspective from the Latest Observational Data // *Sci. China Phys. Mech. Astron.* — 2010. — Vol. 53. — Pp. 1631–1645.
17. *Padmanabhan T.* Cosmological Constant: The Weight of the Vacuum // *Phys. Rept.* — 2003. — Vol. 380. — Pp. 235–320.
18. *Sur S.* Crossing the Cosmological Constant Barrier with Kinetically Interacting Double Quintessence. — 2009.
19. *Chervon S. V.* On the Chiral Model of Cosmological Inflation // *Russ. Phys. J.* — 1995. — Vol. 38. — Pp. 539–543.
20. *Chervon S. V.* Gravitational Field of the Early Universe: 1. Nonlinear Scalar Field as the Source // *Grav. Cosmol.* — 1997. — Vol. 3. — Pp. 145–150.
21. *Червон С. В.* Нелинейные поля в теории гравитации и космологии. — Средневолжский научный центр, УлГУ, 1997. [*Chervon S. V.* Non-Linear Fields in Theory of Gravitation and Cosmology // *Middle-Volga Scientific Centre, Ulyanovsk State University.* 1997]
22. *Bronnikov K. A., Chervon S. V., Sushkov S. V.* Wormholes Supported by Chiral Fields // *Grav. Cosmol.* — 2009. — Vol. 15. — Pp. 241–246.
23. *Hu W., Sugiyama N.* Small Scale Cosmological Perturbations: An Analytic Approach // *Astrophys. J.* — 1996. — Vol. 471. — Pp. 542–570.
24. *Bertolami O., Carrilho P., Paramos J.* A Two Scalar Field Model for the Interaction of Dark Energy and Dark Matter. — 2012.
25. *Bezerra V., Romero C., Chervon S.* Exact Solutions of SO(3) Non-Linear Sigma Model in a Conic Space Background // *Int. J. Mod. Phys.* — 2005. — Vol. D14. — Pp. 1927–1940.
26. *Costa F. E. M., Alcaniz J. S., Jain D.* An Interacting Model for the Cosmological Dark Sector // *Phys. Rev.* — 2012. — Vol. D85. — P. 107302.
27. Coupled Quintessence and the Halo Mass Function / E. R. M. Tarrant, C. van de Bruck, E. J. Copeland, A. M. Green // *Phys. Rev.* — 2012. — Vol. D85. — P. 023503.
28. *Aviles A., Cervantes-Cota J. L.* Dark Matter from Dark Energy-Baryonic Matter Couplings // *Phys. Rev.* — 2011. — Vol. D83. — P. 023510.

UDC 530.12

The Chiral Cosmological Model with Dark Energy and Dark Matter

R. R. Abbyazov, S. V. Chervon

Department of Physics

Ulianovsk State Pedagogical University named after I.N. Ulianov 4, 100 years V.I. Lenin's Birthday sq. Ulyanovsk, 432700, Russia

Nonlinear sigma models with the potential of interactions (chiral cosmological models) are applied widely for description of various epochs of Universe evolution. For example, by considering an inflationary epoch, the essential progress in understanding of the essence of the phenomenon was achieved due to method of exact solutions construction for inflation. Obtained exact solutions are considered as background ones when cosmological perturbations are studied. However, the application of exact solutions construction method to modern Universe with dark energy and dark matter domination over radiation and baryonic matter, faces with considerable difficulties. Therefore one of the possibilities to overcome this difficulties is to investigate evolutionary behavior of kinetic interaction of the scalar fields, describing dark energy, considering the behavior of chiral metric components as a function of a scalar factor. In this way it becomes possible to describe both dark energy and dark matter based on special properties of sigma model inner space metric.

Key words and phrases: cosmological model, sigma model, dark energy.