Теоретическая механика

УДК 531.31; 519.21

О построении дифференциальных уравнений по заданному интегральному многообразию при наличии случайных возмущений с независимыми приращениями

М. И. Тлеубергенов, Д. Т. Ажымбаев

Лаборатория динамических систем
Институт математики
ул. Пушкина, д. 125, Алматы, 050010, Казахстан

Строятся уравнения Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения в классе стохастических дифференциальных уравнений типа Ито при наличии случайных возмущающих сил из класса процессов с независимыми приращениями. Полученные результаты иллюстрируются на примере движения искусственного спутника Земли под действием сил тяготения и аэродинамических сил.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, стохастические уравнения, интегральное многообразие, функция, вероятность, вектор.

Введение

Основы теории и общие методы решения обратных задач дифференциальных систем разработаны в [1–8] и др. для детерминированных систем, уравнения которых являются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Так, в работе Еругина [1] строится множество ОДУ, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа впоследствии оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ. В работах [2–8] изложены постановка, классификация обратных задач дифференциальных систем и их решение в классе ОДУ. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ предложен в [7, 8].

В работах [9–11] обратные задачи динамики рассматриваются при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов и, в частности, решены:

1) **основная обратная задача динамики** — построение множества стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, обладающих заданным интегральным многообразием;
2) **задача восстановления уравнений движения** — построение множества управляющих параметров, входящих в заданную систему стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, по заданному интегральному многообразию;
3) **задача замыкания уравнений движения** — построение множества замыкающих стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито по заданной системе уравнений и заданному интегральному многообразию.

Для разрешения обратных задач широко используется метод квазиобращения, в основе которого лежит Лемма 1 [7, с. 12–13].

Лемма 1. *Совокупность всех решений линейной системы*

$$Hv = g,\ H = (h_{\mu k}),\ v = (v_k),\ g = (g_\mu),\ \mu = \overline{1,m};\ k = \overline{1,n},\ m \leqslant n, \tag{1}$$

Статья поступила в редакцию 22 августа 2012 г.

где матрица H имеет ранг, равный m, определяется выражением

$$v = sv^{\tau} + v^{\nu}. \tag{2}$$

Здесь s — произвольная скалярная величина,

$$v^{\tau} = [HC] = [h_1 \ldots h_m c_{m+1} \ldots c_{n-1}] = \begin{vmatrix} e_1 & \ldots & e_n \\ h_{11} & \ldots & h_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{m1} & \ldots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \ldots & c_{m+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1,1} & \ldots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

есть векторное произведение векторов $h_{\mu} = (h_{\mu k})$ и произвольных векторов $c_{\rho} = (c_{\rho k})$, $\rho = \overline{m+1, n-1}$; e_k — единичные орты пространства R^n, $v^{\tau} = (v_k^{\tau})$, где

$$v_k^{\tau} = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ h_{11} & \ldots & h_{1k} & \ldots & h_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{m1} & \ldots & h_{mk} & \ldots & h_{mn} \\ c_{m+1,1} & \ldots & c_{m+1,n} & \ldots & c_{m+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1,1} & \ldots & c_{n-1,k} & \ldots & c_{n-1,n} \end{vmatrix}, \quad v^{\nu} = H^{+} g,$$

$H^{+} = H^{T}(HH^{T})^{-1}$, H^{T} — матрица, транспонированная к H.

Обратные задачи построения уравнений движения в форме Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения в классе ОДУ (при отсутствии случайных возмущающих сил) рассматривалась в [12]. В [13] рассмотрена стохастическая задача Гельмгольца — задача построения по заданному стохастическому уравнению Ито второго порядка эквивалентных стохастических уравнений лагранжевой, гамильтоновой и биркгофиановой структуры. В [14, 15] рассматриваемая в данной работе задача исследуется в предположении, что случайные возмущающие силы есть системы независимых винеровских процессов (как частный случай процессов с независимыми приращениями).

В данной работе рассматриваются задачи построения функции Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения в предположении, что случайные возмущающие силы принадлежат более общему классу случайных процессов, а именно, классу процессов с независимыми приращениями.

1. Постановка задачи

По заданному множеству

$$\Lambda(t) : \lambda(x, \dot{x}, t) = 0, \quad \lambda \in R^m, \quad x \in R^n \tag{3}$$

требуется построить стохастические уравнения лагранжевой, гамильтоновой и биркгофиановой структуры

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\nu}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_{\nu}} = \sigma'_{\nu j}(x, \dot{x}, t)\dot{\xi}^{j}, \quad \left(\nu = \overline{1, n},\ j = \overline{1, r}\right), \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k}, \\ \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} + \sigma'_{kj}(q,p,t)\dot{\xi}^j, \qquad \left(k = \overline{1,n}\right), \end{cases} \tag{5}$$

$$\left[\frac{\partial R_i(z,t)}{\partial z_l} - \frac{\partial R_l(z,t)}{\partial z_i}\right]\dot{z}_i - \left[\frac{\partial B(z,t)}{\partial z_l} + \frac{\partial R_l(z,t)}{\partial t}\right] = T_{l\mu}\dot{\psi}_\mu, \quad (i,l = \overline{1,2n},\ \ \mu = \overline{1,n+r}) \tag{6}$$

так, чтобы множество $\Lambda(t)$ было интегральным многообразием построенных уравнений. Здесь $\{\xi_1(t,\omega),\ ...,\ \xi_r(t,\omega)\}$ и $\{\psi_1(t,\omega),\ ...,\ \psi_{n+r}(t,\omega)\}$ — системы процессов с независимыми приращениями [4], $B = B(z,t)$ — функция Биркгофа, а $W = (W_{il})$ — тензор Биркгофа с компонентами $W_{il} = \left[\dfrac{\partial R_i(z,t)}{\partial z_l} - \dfrac{\partial R_l(z,t)}{\partial z_i}\right]$.

Поставленная задача в классе обыкновенных дифференциальных уравнений ранее рассматривалась в [12]. В [13] рассмотрена стохастическая задача Гельмгольца — задача построения по заданному стохастическому уравнению Ито второго порядка эквивалентных стохастических уравнений лагранжевой, гамильтоновой и биркгофиановой структуры. В [15,16] поставленная выше задача рассматривается в предположении, что системы $\{\xi_1(t,\omega),\ ...,\ \xi_r(t,\omega)\}$ и $\{\psi_1(t,\omega),\ ...,\ \psi_{n+r}(t,\omega)\}$ есть системы независимых винеровских процессов (как частный случай процессов с независимыми приращениями).

В данной работе задачи построения функций L, H и B по заданным свойствам движения рассматриваются в предположении, что случайные возмущающие силы принадлежат классу процессов с независимыми приращениями.

Таким образом, пусть $\{\xi_1(t,\omega),\ldots,\xi_k(t,\omega)\}$ и $\{\psi_1(t,\omega),\ ...,\ \psi_{n+r}(t,\omega)\}$ — системы случайных процессов с независимыми приращениями, которые, следуя [16], можно представить в виде суммы процессов:

1) $\xi = \xi_0 + \int c(y)P^0(t,dy)$, ξ_0 — винеровский процесс; P^0 — пуассоновский процесс; $P^0(t,dy)$ — число скачков процесса P^0 в интервале $[0,t]$, попадающих на множество dy; $c(y)$ — векторная функция, отображающая пространство R^{2n} в пространство значений R^k процесса $\xi(t)$ при любом t;

2) $\psi = \psi_0 + \int \tilde{c}(y)\tilde{P}^0(t,\mathrm{d}\gamma)$, ψ_0 — винеровский процесс; $\tilde{P}^0$ — пуассоновский процесс; $\tilde{P}^0(t,\mathrm{d}\gamma)$ — число скачков процесса $\tilde{P}^0$ в интервале $[0,t]$, попадающих на множество $\mathrm{d}\gamma$; $\tilde{c}(y)$ — векторная функция, отображающая пространство R^{2n} в пространство значений R^{n+r} процесса $\psi(t)$ при любом t.

Для решения поставленных задач на первом этапе по заданному множеству методом квазиобращения [7,8] в сочетании с методом Еругина [1] и в силу стохастического дифференцирования сложной функции в случае процессов с независимыми приращениями [16] строится дифференциальное уравнение Ито второго порядка

$$\ddot{x} = f(x,\dot{x},t) + \sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi} \tag{7}$$

так, чтобы множество $\Lambda(t)$ (3) являлось интегральным многообразием построенного уравнения (7). И, далее, на втором этапе решается стохастическая задача Гельмгольца, а именно, по построенному уравнению Ито (7) строятся эквивалентные ему стохастические уравнения лагранжевой, гамильтоновой, а также биркгофиановой структуры.

2. Построение стохастического уравнения лагранжевой структуры (4) по заданным свойствам движения (3)

Предварительно, по правилу стохастического дифференцирования Ито, составляется уравнение возмущенного движения

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} f + S_1 + S_2 + S_3 + \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}}\sigma\dot{\xi}, \tag{8}$$

где $S_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial \dot{x}^2} : \sigma\sigma^T$, а под $\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial \dot{x}^2} : D$, $D = \sigma\sigma^T$, следуя [16], понимается вектор, элементами которого служат следы [16] произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $\lambda_\mu(x, \dot{x}, t)$ вектора $\lambda(x, \dot{x}, t)$ по компонентам $\dot{x}$ на матрицу D

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \dot{x}^2} : D = \left[tr\left(\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \dot{x}^2} D\right), \ \ldots \ , tr\left(\frac{\partial^2 \lambda_m}{\partial \dot{x}^2} D\right)\right]^T;$$

$S_2 = \int \left\{ \lambda(x, \dot{x} + \sigma c(y), t) - \lambda(x, \dot{x}, t) + \dfrac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}}\sigma c(y) \right\} \mathrm{d}y$; $S_3 = \int [\lambda(x, \dot{x} + \sigma c(y), t) - \lambda(x, \dot{x}, t)] P^0(t, \mathrm{d}y)$ и вводятся произвольные функции Еругина [1] A и B, обладающие свойствами $A(0, x, \dot{x}, t) \equiv \equiv 0$, $B(0, x, \dot{x}, t) \equiv 0$, и такие, что имеет место равенство

$$\dot{\lambda} = A(\lambda, x, \dot{x}, t) + B(\lambda, x, \dot{x}, t)\dot{\xi}. \tag{9}$$

Сравнивая уравнения (8) и (9) приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} f = A - \dfrac{\partial \lambda}{\partial t} - \dfrac{\partial \lambda}{\partial x}\dot{x} - S_1 - S_2 - S_3, \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}}\sigma = B. \end{cases} \tag{10}$$

Для определения из (10) искомых функций f и σ воспользуемся леммой 1, в силу которой вектор-функцию f и матрицу σ запишем в виде

$$f = s_1\left[\frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} C\right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}}\right)^+ \left(A - \frac{\partial \lambda}{\partial t} - \frac{\partial \lambda}{\partial x}\dot{x} - S_1 - S_2 - S_3\right) \tag{11}$$

$$\sigma_i = s_{2i}\left[\frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} C\right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}}\right)^+ B_i, \tag{12}$$

где $\sigma_i = (\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \ldots, \sigma_{ni})^T$ — i-й столбец матрицы $\sigma = (\sigma_{\nu j}), \left(\nu = \overline{1, n}, \ \ j = \overline{1, r}\right)$; $B_i = = (B_{1i}, B_{2i}, \ldots, B_{mi})^T$ — i-й столбец матрицы $B = (B_{\mu j})$, $\left(\mu = \overline{1, m}, \ \ j = \overline{1, r}\right)$, s_1, s_2 — произвольные скалярные величины.

Таким образом, из (11), (12) следует, что множество дифференциальных уравнений Ито второго порядка, обладающих заданным интегральным многообразием (3), имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} = s_1\left[\frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} C\right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}}\right)^+ \left(A - \frac{\partial \lambda}{\partial t} - \frac{\partial \lambda}{\partial x}\dot{x} - S_1 - S_2 - S_3\right) + \\ + \left(s_{21}\left[\frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} C\right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}}\right)^+ B_1, \ \ldots \ , s_{2r}\left[\frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}} C\right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}}\right)^+ B_r\right)\dot{\xi}. \end{aligned}$$

Далее раскроем выражение $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu}\right)$ по правилу стохастического дифференцирования Ито в случае процессов с независимыми приращениями [16]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k}\dot{x}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_k}\ddot{x}_k + \tilde{S}_{1\nu} + \tilde{S}_{2\nu} + \tilde{S}_{3\nu}, \tag{13}$$

где $\tilde{S}_{1\nu} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^3 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k}\sigma_{ij}\sigma_{kj}$, $\tilde{S}_{2\nu} = \displaystyle\int \left\{ \frac{\partial L(x, \dot{x} + \sigma c(y), t)}{\partial \dot{x}_\nu} - \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_\nu} \right\} \mathrm{d}y,$

$$\tilde{S}_{3\nu} = \int \left[\frac{\partial L(x, \dot{x} + \sigma c(y), t)}{\partial \dot{x}_\nu} - \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_\nu} \right] P^0(t, y).$$

Следовательно, уравнение (4) с учетом (13) принимает следующий вид:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} - \sigma^{'}_{\nu j}(x, \dot{x}, t)\dot{\xi}^j = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k}\dot{x}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_k}\ddot{x}_k + \\ + \tilde{S}_{1\nu} + \tilde{S}_{2\nu} + \tilde{S}_{3\nu} - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} - \sigma^{'}_{\nu j}(x, \dot{x}, t)\dot{\xi}^j. \tag{14}$$

Или, учитывая (14) и уравнение (7), имеем

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k}\dot{x}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_k}\ddot{x}_k + \tilde{S}_{1\nu} + \tilde{S}_{2\nu} + \tilde{S}_{3\nu} - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} - \sigma^{'}_{\nu j}(x, \dot{x}, t)\dot{\xi}^j \equiv \\ \equiv \ddot{x}_\nu - f_\nu(x, \dot{x}, t) + \sigma_{\nu j}(x, \dot{x}, t)\dot{\xi}^j. \tag{15}$$

Из соотношения (15) следуют равенства

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_k} = \delta^k_\nu; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k}\dot{x}_k + \tilde{S}_{1\nu} + \tilde{S}_{2\nu} + \tilde{S}_{3\nu} - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} = f_\nu, \\ \sigma^{'}_{\nu j}(x, \dot{x}, t) = \sigma_{\nu j}. \tag{16}$$

Тем самым доказана

Теорема 1. *Для построения стохастического уравнения лагранжевой структуры* (4) *по заданному множеству* (3) *так, чтобы множество* (3) *было интегральным многообразием построенного уравнения необходимо и достаточно выполнения условий* (16).

3. Построение стохастической уравнения гамильтоновой структуры (5) по заданным свойствам движения (3)

Для построения функции Гамильтона предварительно введем новую переменную $y_k = \dot{x}_k$ и перепишем заданное уравнение (5) в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_k = y_k, \\ y_k = f_k\left(x, y, t\right) + \sigma_{kj}\left(x, y, t\right)\dot{\xi}^j, \end{cases} \tag{17}$$

где вектор-функция $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$ и столбцы матрицы $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$ имеют соответственно вид (11), (12). Затем с помощью замен

$$z_k = \begin{cases} x_k \\ y_k \end{cases}; \quad G_k = \begin{cases} y_k \\ f_k \end{cases}; \quad \psi_j = \begin{cases} 0, \text{ при } j = \overline{1,n}\,; \\ \xi^{j-n}, \text{ при } j = n+1, n+2, \ldots, n+m; \end{cases}$$

$$\mu = (\mu_{kj}) = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & 0_{n\times m} \\ 0_{n\times n} & \sigma_{n\times m} \end{pmatrix}; \quad \sigma = (\sigma_{kj})$$

перепишем уравнение (17) в виде

$$\dot{z}_k = G_k\,(z,t) + \mu_{kj}\,(z,t)\,\dot{\psi}_j, \tag{18}$$

а с помощью некоторой матрицы $\Gamma = \left(\gamma_\nu^k\right)$ запишем непрямой вид уравнения (18) в виде

$$\gamma_\nu^k \left(\dot{z}_k - G_k - \mu_{kj}\dot{\psi}_j\right) = 0. \tag{19}$$

Далее, стохастическое уравнение гамильтоновой структуры (5) с помощью замены

$$\nu_k = \begin{cases} q_k, & k = \overline{1,n}, \\ p_{k-n}, & k = n+1, n+2, \ldots, 2n \end{cases}$$

и матриц

$$\varphi = (\varphi_{k\nu}) = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}, \quad p = (p_{kj}) = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & 0_{n\times m} \\ 0_{n\times n} & \sigma'_{n\times m} \end{pmatrix},$$

а также с учетом того, что

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{pmatrix} = \left(\varphi_{k\nu}\frac{\partial H}{\partial \nu_\nu}\right)$$

перепишем в виде

$$\dot{\nu}_k - \varphi_{k\nu}\frac{\partial H}{\partial \nu_\nu} = p_{kj}\dot{\psi}_j \tag{20}$$

или, если ввести обратную к $(\varphi_{k\nu})$ матрицу

$$(\omega_{k\nu}) = (\varphi_{k\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & -I_{n\times n} \\ I_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}$$

и вектор

$$z_k \equiv \omega_{k\nu}\nu_\nu = \begin{pmatrix} -p_k, & k = \overline{1,n} \\ q_{k-n}, & k = \overline{n+1, 2n} \end{pmatrix},$$

тогда уравнение (20) преобразуется к эквивалентному уравнению

$$\omega_{\nu k}\dot{z}_k - \frac{\partial H}{\partial z_k} = \omega_{\nu k}p_{\nu j}\dot{\psi}_j. \tag{21}$$

Рассмотрим задачу непрямого представления уравнения (18), или, что то же самое, задачу представления уравнения (19) в виде уравнения гамильтоновой структуры (21), т.е. рассмотрим соотношение

$$\gamma_\nu^k \left(\dot{z}_k - G_k - \mu_{kj}\dot{\psi}_j\right) \equiv \omega_{\nu k}\dot{z}_k - \frac{\partial H}{\partial z_\nu} - \omega_{\nu k}p_{\nu j}\dot{\psi}_j$$

или

$$C_{\nu k}\dot z_k - D_\nu(z,t) - \gamma^k_\nu \mu_{kj}\dot\psi_j \equiv \omega_{\nu k}\dot z_k - \frac{\partial H}{\partial z_\nu} - \omega_{\nu k} p_{\nu j}\dot\psi_j\,, \tag{22}$$

где $C_{\nu k} = \gamma^k_\nu$; $\quad D_\nu(z,t) = \gamma^k_\nu G_k$.

Для выполнения тождества (22) требуется выполнение условий

$$C_{\nu k} = \omega_{\nu k},\ \ D_\nu(z,t) = -\frac{\partial H}{\partial z_\nu}\,, \tag{23}$$

$$\gamma^k_\nu \mu_{kj} = \omega_{\nu k} p_{\nu j}\left(\nu,\, k = \overline{1,2n},\ j = \overline{1,n+m}\right), \tag{24}$$

$$\gamma^k_\nu = \omega_{\nu k}\,. \tag{25}$$

Из соотношений (22) и условий (23)–(25) следует, что $\mu_{kj} = p_{\nu j}$, а это влечет выполнение равенства $\sigma_{kj} = \sigma'_{kj}$, $\left(k = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}\right)$. Следовательно справедлива Теорема 2:

Теорема 2. *Для непрямого построения стохастического уравнения гамильтоновой структуры* (5) *по заданному множеству* (3) *так, чтобы множество* (3) *было интегральным многообразием уравнения* (19), *необходимо и достаточно выполнение условий* (22)–(24).

4. Построение стохастического уравнения биркгофиановой структуры (6) по заданным свойствам движения (3)

Для решения поставленной задачи рассмотрим соотношение

$$C_{\nu k}\dot z_k - D_\nu(z,t) - \mu_{\nu j}\dot\psi_j \equiv \left[\frac{\partial R_k(z,t)}{\partial z_\nu} - \frac{\partial R_\nu(z,t)}{\partial z_\kappa}\right]\dot z_\kappa - \left[\frac{\partial B(z,t)}{\partial z_\nu} + \frac{\partial R_\nu(z,t)}{\partial t}\right] - T_{\nu j}\dot\psi_j,$$

$(\nu,\kappa = \overline{1,2n},\ j = \overline{1,n+m})$, которое выполняется тождественно при следующих условиях:

$$C_{\nu k} = \left[\frac{\partial R_\kappa(z,t)}{\partial z_\nu} - \frac{\partial R_\nu(z,t)}{\partial z_\kappa}\right],\quad D_\nu = \left[\frac{\partial B(z,t)}{\partial z_\nu} + \frac{\partial R_\nu(z,t)}{\partial t}\right],\quad \mu = T. \tag{26}$$

Следовательно, имеет место Теорема 3:

Теорема 3. *Для построения стохастического уравнения биркгофиановой структуры* (6) *по заданному множеству* (3) *так, чтобы множество* (3) *было интегральным многообразием уравнения* (6), *необходимо и достаточно выполнение условий* (26).

5. Пример

Рассмотрим стохастическую задачу построения функций Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданному свойству движения на примере движения искусственного спутника Земли под действием сил тяготения и аэродинамических сил [17].

Пусть свойства движения заданы в виде:

$$\Delta\,(t) : \lambda = \vartheta^2 + \alpha_1\dot\vartheta^2 + \alpha_2 = 0, \qquad \lambda \in R^1. \tag{27}$$

Тогда уравнение возмущенного движения (8) примет вид

$$\dot\lambda = 2\vartheta\dot\vartheta + 2\alpha_1\dot\vartheta\ddot\vartheta + S_1 + S_2 + S_3 = 2\vartheta\dot\vartheta + 2\alpha_1\dot\vartheta f + S_1 + S_2 + S_3 + 2\alpha_1\dot\vartheta\sigma\dot\xi, \tag{28}$$

где

$$S_1 = \alpha_1\sigma^2, \quad S_2 = \int \left\{2\alpha_1\sigma c(y)[4\dot\vartheta + \sigma c(y)]\right\} \mathrm{d}y,$$

$$S_3 = \int \left\{2\alpha_1\sigma c(y)[4\dot\vartheta + \sigma c(y)]\right\} P^0(t, \mathrm{d}y).$$

Введем функции Н. П. Еругина $a = a(\lambda, \vartheta, \dot\vartheta, t)$, $b = b(\lambda, \vartheta, \dot\vartheta, t)$ со свойством $a(0, \vartheta, \dot\vartheta, t) = = b(0, \vartheta, \dot\vartheta, t) \equiv 0$ и такие, что имеет место соотношение

$$\dot\lambda = a(\lambda, \vartheta, \dot\vartheta, t) + b(\lambda, \vartheta, \dot\vartheta, t)\dot\xi. \tag{29}$$

Из соотношений (27), (28) следует, что множество уравнений (7), в нашем примере имеющее вид

$$\ddot\vartheta = f(\vartheta, \dot\vartheta, t) + \sigma(\vartheta, \dot\vartheta, t)\dot\xi,$$

будет обладать интегральным многообразием (26), если f и σ будут иметь соответственно вид

$$f = \frac{a(\lambda, \vartheta, \dot\vartheta, t) - 2\vartheta\dot\vartheta - S_1 - S_2 - S_3}{2\alpha_1\dot\vartheta}, \quad \sigma = \frac{b(\lambda, \vartheta, \dot\vartheta, t)}{2\alpha_1\dot\vartheta}. \tag{30}$$

Уравнение движения искусственного спутника Земли под действием сил тяготения и аэродинамических сил, следуя работе [17], запишем в виде

$$\ddot\vartheta = \tilde f(\vartheta, \dot\vartheta) + \tilde\sigma(\vartheta, \dot\vartheta)\dot\xi, \tag{31}$$

где ϑ — угол тангажа, а функции $\tilde f$ и $\tilde\sigma$имеют вид

$$\tilde f = Ql\sin 2\vartheta - Q[g(\vartheta) + \eta\dot\vartheta], \quad \tilde\sigma = Q\delta[g(\vartheta) + \eta\dot\vartheta]. \tag{32}$$

Построим лагранжиан по уравнению (31). Предварительно в уравнении (31) следует учесть соотношения (30), которые обеспечивают интегральность заданного множества (27). Из равенств $f = \tilde f$, $\sigma = \tilde\sigma$ вытекает, что четыре параметра Q, δ, η, l, определяющие динамику движения спутника (31), должны удовлетворять следующим соотношениям

$$\begin{cases} a(\lambda, \vartheta, \dot\vartheta, t) - 2\vartheta\dot\vartheta - S_1 - S_2 - S_3 = 2\alpha_1\dot\vartheta\left\{Ql\sin 2\vartheta - Q[g(\vartheta) + \eta\dot\vartheta]\right\}, \\ b(\lambda, \vartheta, \dot\vartheta, t) = 2\alpha_1\dot\vartheta Q\delta[g(\vartheta) + \eta\dot\vartheta]. \end{cases}$$

Тогда по определению из [18] уравнение (31) допускает непрямое аналитическое представление в терминах стохастического уравнения лагранжевой структуры, если существует функция h такая, что имеет место тождество

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\vartheta} - \sigma'(\vartheta, \dot\vartheta, t)\dot\xi \equiv h[\ddot\vartheta - f - \sigma\dot\xi]. \tag{33}$$

Найдем функцию $h = h(t)$ так, чтобы для скалярного уравнения $l_1(\vartheta, \dot\vartheta, t)\ddot\vartheta + l_2(\vartheta, \dot\vartheta, t) = 0$ выполнялось необходимое и достаточное условие Гельмгольца [18, с. 107] существования лагранжиана, которое имеет вид $\dfrac{\partial l_2}{\partial\dot\vartheta} = \dfrac{\partial l_1}{\partial t} + \dot\vartheta\dfrac{\partial l_1}{\partial\vartheta}$.

Этому условию удовлетворяет функция h вида $h = e^{-Q\eta t}$. Подставляя найденное h в (33) получим

$$e^{-Q\eta t}[\ddot{\vartheta} - f - \sigma\dot{\xi}] = \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{\vartheta}\partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{\vartheta}\partial\vartheta}\dot{\vartheta} + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{\vartheta}^2}\ddot{\vartheta} + \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \tilde{S}_3 - \frac{\partial L}{\partial\vartheta} - \sigma'\dot{\xi},$$

где

$$\tilde{S}_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 L}{\partial\dot{\vartheta}^3}\sigma^2,$$

$$\tilde{S}_2 = \int\left\{\frac{\partial L(\vartheta, \dot{\vartheta} + \sigma c(y), t)}{\partial\dot{\vartheta}} - \frac{\partial L(\vartheta, \dot{\vartheta}, t)}{\partial\dot{\vartheta}}\right\}\mathrm{d}y,$$

$$\tilde{S}_3 = \int\left[\frac{\partial L(\vartheta, \dot{\vartheta} + \sigma c(y), t)}{\partial\dot{\vartheta}} - \frac{\partial L(\vartheta, \dot{\vartheta}, t)}{\partial\dot{\vartheta}}\right]P^0(t, y).$$

Таким образом, искомый лагранжиан строится в виде

$$L = e^{-Q\eta t}\left[\frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 - Q(\frac{1}{2}l\cos 2\vartheta + G)\right], \qquad \mathrm{G} = \int \mathrm{g}(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta, \tag{34}$$

который обеспечивает непрямое аналитическое представление уравнения (31) в виде уравнения лагранжевой структуры

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial\vartheta} = e^{-Q\eta t}\sigma(\vartheta, \dot{\vartheta})\dot{\xi}. \tag{35}$$

Используя функцию Лагранжа (34) и преобразование Лежандра, определим функцию Гамильтона в виде $H = \chi\dot{\vartheta} - L(\vartheta, \dot{\vartheta}, t)\Big|_{\dot{\vartheta}=\dot{\vartheta}(\vartheta,\chi,t)}$. И так как $\chi = \dfrac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}}$, то $\chi = e^{-Q\eta t}\dot{\vartheta}$ и, следовательно, $\dot{\vartheta} = e^{Q\eta t}\chi$. Тогда каноническое уравнение, соответствующее стохастическому уравнению лагранжевой структуры (35), примет вид

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = \dfrac{\partial H}{\partial\chi}, \\ \dot{\chi} = -\dfrac{\partial H}{\partial\vartheta} + \hat{\sigma}(\vartheta, \chi, t)\dot{\xi}, \end{cases} \tag{36}$$

где $\hat{\sigma} = \sigma'(\vartheta, \dot{\vartheta}, t)\Big|_{\dot{\vartheta}=\dot{\vartheta}(\vartheta,\chi,t)}$, а функция Гамильтона определяется в виде

$$H = \frac{1}{2}e^{Q\eta t}\chi^2 e^{-Q\eta t}b(\vartheta). \tag{37}$$

Рассмотрим теперь на этом примере задачу представления биркгофиана по заданному уравнению (31). По построенному выше каноническому уравнению (36) и функции Гамильтона (37) с использованием соотношений (26) при $C = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}$ функции $R_\upsilon(\upsilon = 1, 2)$, $R = (R_1, R_2)$ и B определяются в следующем виде $R = \{\chi, (1+\varphi)\vartheta\}$, $B = \frac{1}{2}\varphi e^{Q\eta t}\chi^2 - \varphi e^{-Q\eta t}b(\vartheta)$, где φ — произвольная постоянная.

Заключение

Таким образом, по заданному интегральному многообразию методом Еругина в сочетании с методом квазиобращения строятся стохастические уравнения в форме Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа в предположении, что случайные возмущающие силы принадлежат классу процессов с независимыми приращениями.

Литература

1. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. — 1952. — Т. 16, вып. 6. — С. 659–670.
2. Построение систем программного движения / А. С. Галиуллин, И. А. Мухаметзянов, Р. Г. Мухарлямов, В. Д. Фурасов. — М.: Наука, 1972.
3. *Галиуллин А. С.* Построение поля сил по заданному семейству траекторий // Дифференциальные уравнения. — 1981. — Т. XVII, вып. 8. — С. 1487–1489.
4. *Галиуллин А. С.* Об определении силовой функции по заданному интегралу уравнений движения // Дифференциальные уравнения. — 1982. — Вып. 5. — С. 744–748.
5. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. — М.: Наука, 1986.
6. *Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.* Обзор исследований по аналитическому построению систем программного движения // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия прикладная математика и информатика. — 1994. — Вып. 1. — С. 5–21.
7. *Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.* Уравнения программных движений. — М.: Изд-во УДН, 1986.
8. *Мухарлямов Р. Г.* О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39, вып. 3. — С. 343–353.
9. *Тлеубергенов М. И.* Об обратной задаче динамики при наличии случайных возмущений // Известия МН-АН РК. Серия физико-математическая. Алматы. — 1998. — Вып. 3. — С. 55–61.
10. *Тлеубергенов М. И.* Об обратной задаче восстановления стохастических дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. — 2001. — Т. 37, вып. 5. — С. 714–716.
11. *Тлеубергенов М. И.* Об обратной стохастической задаче замыкания // Доклады МН-АН РК. Алматы. — 1999. — Вып. 1. — С. 53–60.
12. *Туладхар Б. М.* Построение уравнений в форме Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа по заданным свойствам движения, Автореф. на соиск... к.ф.-м.н. — М.: Изд-во УДН, 1983. — 11 с.
13. *Тлеубергенов М. И.* Обратные задачи стохастических дифференциальных систем, Автореф. на соиск... д.ф.-м.н. — Алматы: Ин-т математики, 1999. — 33 с.
14. *Тлеубергенов М. И., Ажымбаев Д. Т.* О построении дифференциального уравнения по заданным свойствам движения при наличии случайных возмущений // Известия НАН РК, Серия физико-математическая. Алматы. — 2007. — Вып. 3. — С. 15–20.
15. *Тлеубергенов М. И., Ажымбаев Д. Т.* О построении множества стохастических дифференциальных уравнений по заданному интегральному многообразию, не зависящему от скоростей // Украинский математический журнал, Киев. — 2010. — Т. 62, вып. 7. — С. 1002–1009.
16. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. — М.: Наука, 1990.
17. *Сагиров П.* Стохастические методы в динамике спутников // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. М. — 1974. — Вып. 5(147), 6(148). — С. 28–47, 3–38.
18. *Santilli R. M.* Foundations of Theoretical Mechanics.1. The Inverse Problem in Newtonian Mechanics. — New-York: Springer-Verlag, 1978.

UDC 531.31; 519.21

To the Problem of Closure of Differential Systems with Degenerating Diffusion

M. I. Tleubergenov, D. T. Azhymbaev

Laboratory of Dynamic Systems
Institute of Mathematics
125, Pushkin str., Almaty, 050010, Kazakhstan

It is built the Lagrange, Hamilton and Birkhoff equations by properties of movement in the class of stochastic differential Ito equations in the presence of random perturbing forces from the class of processes with independent increments. The received results are illustrated on an example of movement of Earth's satellite under the action of gravitation's and aerodynamics forces.

Key words and phrases: differential equations, stochastic equations, integral manifold, function, probability, vector.