УДК 517.51

Оптимальные вложения обобщённых потенциалов Рисса

А. В. Малышева

Кафедра нелинейного анализа и оптимизации
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, 117198, Россия

В данной статье рассматривается пространство потенциалов типа Рисса на n-мерном евклидовом пространстве. Они строятся на основе перестановочно-инвариантных пространств (ПИП) с помощью свёрток с ядрами общего вида, их конструкция опирается на описание класса ядер с помощью некоторой неотрицательной, убывающей функции Ф. Рассмотрение обобщённых потенциалов Рисса включает пространства классических потенциалов Рисса.

Здесь мы будем рассматривать случай, когда в качестве базового пространства ПИП выбраны пространства типа Лоренца Λ^p, $1 < p < \infty$. При исследовании вопроса о нахождении условий вложения пространств потенциалов типа Рисса в ПИП мы используем критерий вложения, установленный в работе М. Л. Гольдмана, ключевую роль при этом играет оператор типа Харди, определённый на положительной полуоси, а также неравенства для операторов такого типа.

Для случая пространств потенциалов Рисса при $1 < p < \infty$ сформулирована и доказана теорема об оптимальном вложении в ПИП. Критерии вложения, когда в качестве «базовых» пространств используются пространства L_p, $1 < p < \infty$, установленные в работе авторов М. Л. Гольдмана и О. М. Гусельниковой, согласуются с результатом данной работы.

Ключевые слова: потенциалы типа Рисса, пространства Лоренца, убывающие перестановки, перестановочно-инвариантные пространства, оптимальные вложения.

1. Введение

В данной статье рассматривается пространство потенциалов $H_E^G(\mathbb{R}^n)$, которое строится с помощью сверток с ядрами специального вида функций из «базового» пространства, которое является перестановочно инвариантным (ПИП). Теория перестановочно инвариантных пространств основывается на абстрактной теории банаховых функциональных пространств (БФП). Перестановочно инвариантные пространства описаны в книге С.Г. Крейна, Ю.И. Петунина, Е.М. Семёнова [1]. Теория БФП, ПИП, в частности, ассоциированных пространств изложена у К. Беннета и Р. Шарпли [2], всюду в работе мы будем придерживаться аксиоматики, введённой в книге этих авторов.

Мы будем использовать результаты работ М.Л. Гольдмана об оптимальных вложениях потенциалов типа Рисса и типа Бесселя [3, 4], в частности критерий вложения пространств потенциалов в ПИП, сформулированный в терминах ограниченности оператора типа Харди $\mathfrak{R}_{\varphi,T}$, где $T \in (0, \infty]$.

В работе сформулирована теорема об оптимальном вложении пространств обобщённых потенциалов в ПИП и приведено доказательство для случая потенциалов типа Рисса при $1 < p < \infty$. Случай, когда в качестве базового ПИП выступают пространства $L_p(\mathbb{R}^n), 1 \leqslant p < \infty$, подробно описан у авторов М. Л. Гольдман, О. М. Гусельникова [5].

2. Вспомогательные определения

Всюду в работе $E = E(\mathbb{R}^n)$ есть ПИП, $E' = E'(\mathbb{R}^n)$ – ассоциированное ПИП, т.е. такое ПИП, что

$$\|g\|_{E'} = \sup\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |fg|\mathrm{d}\mu : f \in E, \|f\|_E \leqslant 1\right\}.$$

Для ПИП $E(\mathbb{R}^n)$ и $E'(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим пространства $\tilde{E} = \tilde{E}(\mathbb{R}_+), \tilde{E}' = \tilde{E}'(\mathbb{R}_+)$ – их представления Люксембурга, т. е. ПИП, для которых выполнены следующие соотношения:

$$\|f\|_E = \|f^*\|_{\tilde{E}},\ \|g\|'_E = \|g^*\|_{\tilde{E}'},$$

где f^* – убывающая перестановка функции f, т.е. неотрицательная, убывающая, непрерывная справа функция на $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, равноизмеримая с f:

$$\mu_n\{x \in \mathbb{R}^n : |f(y)| > y\} = \mu_1\{t \in \mathbb{R}_+ : |f^*(t)| > y\},\ y \in \mathbb{R}_+.$$

Мы будем рассматривать пространство потенциалов на n-мерном евклидовом пространстве с мерой Лебега μ:

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) = \{u = G * f :\ f \in E(\mathbb{R}^n)\}, \tag{1}$$

где E – перестановочно инвариантное пространство, а ядра G– специального вида, которые будут описаны ниже.

Введём определение максимальной функции:

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*(s)\mathrm{d}s, \quad (t > 0). \tag{2}$$

Определение 1. Функция $\Phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ принадлежит классу $\mathfrak{J}_n(\infty)$, если выполнены следующие условия:

1) Φ убывает и непрерывна на $(0, \infty)$;

2) существует постоянная $c \in \mathbb{R}_+,$ такая что

$$\int\limits_0^r \Phi(\rho)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho \leqslant c \cdot \Phi(r)r^n, \quad r > 0.$$

Введём функцию

$$\varphi(\tau) = \Phi\left(\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right), \tag{3}$$

где V_n – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что, если $\Phi \in \mathfrak{J}_n(\infty)$, то $\varphi \in \mathfrak{J}_1(\infty)$ и, таким образом, для функции φ имеет место двусторонняя оценка

$$\int\limits_0^r \varphi(\rho)\mathrm{d}\rho \cong r \cdot \varphi(r), \quad r > 0. \tag{4}$$

Определение 2. Пусть $\Phi \in \mathfrak{J}_n(\infty)$. Считаем, что $G \in S^0_\infty(\Phi)$, если $G(x) \cong \Phi(\rho)$, $\rho = |x| \in \mathbb{R}_+$.

Дадим теперь определение обобщённых потенциалов типа Рисса.

Определение 3. Пусть $G \in S^0_\infty(\Phi)$, тогда потенциалы $H_E^G(\mathbb{R}^n)$ называются обобщёнными потенциалами типа Рисса.

Классические потенциалы Рисса получим при $\Phi(\rho) = \rho^{\alpha - n}$, $0 < \alpha < n$.

Определим функцию

$$f_\varphi(t, \tau) = \min\{\varphi(t), \varphi(\tau)\}. \tag{5}$$

Мы будем рассматривать оператор $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty} : \tilde{E}(\mathbb{R}_+) \to \tilde{X}(\mathbb{R}_+)$, определённый по формуле:

$$\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g](t) = \int\limits_0^\infty f_\varphi(t,\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau, \text{где}\, g \in \tilde{E}(\mathbb{R}_+)\,. \tag{6}$$

Сформулируем критерий вложения потенциалов в ПИП (см. [3, 4]):

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n). \tag{7}$$

Для обобщённых потенциалов Рисса вложение (7) эквивалентно ограниченности оператора $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}$. Кроме того, оптимальное ПИП для вложения (7), т.е. такое ПИП $X_0 = X_0(\mathbb{R}^n)$, что (7) справедливо при $X = X_0$, и если для некоторого ПИП X имеет место вложение (7), то $X_0 \subset X$ имеет эквивалентную норму:

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)} = \sup\left\{\int\limits_0^\infty f^* g^* \mathrm{d}t : g \in L_0(\mathbb{R}_+); \|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)} \leqslant 1\right\}. \tag{8}$$

Здесь $L_0(\mathbb{R}_+)$ означает множество измеримых и почти всюду конечных на $\mathbb{R}_+$ функций.

Будем рассматривать множество μ-измеримых на $\mathbb{R}^n$ функций f.

Пусть u неотрицательная локально интегрируемая функция на $(0,\infty)$, которую мы будем называть весом. Введём функцию

$$U(s) = \int\limits_0^s u(t)\mathrm{d}t. \tag{9}$$

Определение 4. Пространством Лоренца $\Lambda^p(u)$ с весом u называется пространство с нормой:

$$\|f\|_{\Lambda^p(u)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f^{*p}(t)u(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leqslant p < \infty; \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in(0,\infty)} \{f^*(t)u(t)\}, & p = \infty. \end{cases} \tag{10}$$

Пространством Лоренца $\Gamma^p(u)$ с весом u называется пространство с нормой:

$$\|f\|_{\Gamma^p(u)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f^{**p}(t)u(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leqslant p < \infty; \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in(0,\infty)} \{f^{**}(t)u(t)\}, & p = \infty. \end{cases} \tag{11}$$

Пространство $\Gamma^\infty(u)$ называют также пространством Марцинкевича.

Известно, что ассоциированными к пространствам Лоренца являются пространства, определяемые следующим образом (см. например [6]):

$$\Lambda^p(u)' = \begin{cases} \Gamma^\infty\left(\frac{t}{U(t)}\right), & p = 1; \\ \Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right), & 1 < p < \infty; \\ \Lambda^1\left(\frac{1}{\operatorname*{ess\,sup}\limits_{0<s<t} u(s)}\right), & p = \infty. \end{cases} \tag{12}$$

Отметим полезное свойство БФП. Пусть X – БФП, f_1 и $f_2 \in X$ неотрицательные. Тогда верно следующее соотношение:

$$\|f_1 + f_2\|_X \cong \|f_1\|_X + \|f_2\|_X.$$

3. Основная часть

Обозначим $\tilde{E}_0(\mathbb{R}_+) = \left\{ g \in \tilde{E}(\mathbb{R}_+) : 0 \leqslant g \downarrow,\, g(t+0) = g(t),\, t \in \mathbb{R}_+ \right\}$.

Лемма 1.

$$\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}\|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)\to\tilde{X}(\mathbb{R}_+)} = \|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}\|_{\tilde{E}_0(\mathbb{R}_+)\to\tilde{X}(\mathbb{R}_+)}. \tag{13}$$

Доказательство. Нам достаточно показать неравенство

$$\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}\|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)\to\tilde{X}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}\|_{\tilde{E}_0(\mathbb{R}_+)\to\tilde{X}(\mathbb{R}_+)},$$

поскольку обратное неравенство очевидно.

Пусть $g \in \tilde{E}(\mathbb{R}_+)$, и применим к этой функции оператор $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}$:

$$|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g](t)| = \left| \int_0^\infty f_\varphi(t,\tau) g(\tau)\mathrm{d}\tau \right| \leqslant \int_0^\infty f_\varphi(t,\tau)|g(\tau)|\mathrm{d}\tau \leqslant$$

воспользуемся неравенством Харди и тем, что функция $f_\varphi(\cdot,\tau)$ убывает по τ, получим:

$$\leqslant \int_0^\infty f_\varphi(t,\tau) g^*(\tau)\mathrm{d}\tau = \mathfrak{R}_{\varphi,\tau}[g^*](t).$$

Так как для $g \in \tilde{E}(\mathbb{R}_+)$ имеем $g^* \in \tilde{E}_0(\mathbb{R}_+)$, и, следовательно,

$$\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g]\|_{\tilde{X}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\tilde{X}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}\|_{\tilde{E}_0(\mathbb{R}_+)\to\tilde{X}(\mathbb{R}_+)} \|g^*\|_{\tilde{E}_0(\mathbb{R}_+)},$$

и, таким образом, $\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}\|_{\tilde{E}(\mathbb{R}_+)\to\tilde{X}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}\|_{\tilde{E}_0(\mathbb{R}_+)\to\tilde{X}(\mathbb{R}_+)}$.

Итак, оба неравенства дают нам требуемое равенство (13). □

Теперь мы можем применять оператор $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}$ к функциям из $\tilde{E}_0(\mathbb{R}_+)$.

Установим для оператора $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}$ следующее свойство его максимальной функции:

Лемма 2.

$$\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*] \cong \mathfrak{R}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*]. \tag{14}$$

Доказательство. 1) Сперва убедимся, что $\mathfrak{R}^*_{\varphi,\infty}[g^*] = \mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]$. Так как g^* убывающая перестановка функции g, а φ из класса монотонных функций $\mathfrak{J}_1(\infty)$, то $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]$ как функция от t неотрицательна и убывает. В силу непрерывности функции φ справа и абсолютной непрерывности интеграла Лебега $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]$ как функция от t является непрерывной справа. Таким образом, верно искомое соотношение.

2) Теперь покажем, что $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*] \cong \mathfrak{R}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*]$.

Имеем

$$\mathfrak{R}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*](t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathfrak{R}^*_{\varphi,\infty}[g^*](s)\mathrm{d}s = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\infty f_\varphi(s,\tau)g^*(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s.$$

Мы воспользовались определением оператора $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}$ и полученным в п. 1) выводом.

Далее, учитывая определение функции f_φ (5), мы можем представить оператор в виде суммы:

$$\mathfrak{R}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*] = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \left[\varphi(s)\int\limits_0^s g^*(\tau)\mathrm{d}\tau + \int\limits_s^\infty \varphi(\tau)g^*(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s = I_1 + I_2, \tag{15}$$

где

$$I_1 = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi(s)\int\limits_0^s g^*(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,$$

$$I_2 = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \int\limits_s^\infty \varphi(\tau)g^*(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s.$$

Рассмотрим каждое из слагаемых I_1 и I_2 отдельно.

Сперва преобразуем первое слагаемое:

$$I_1 = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi(s)\int\limits_0^s g^*(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s =$$

воспользуемся теоремой Фубини и поменяем местами пределы интегрирования по τ и s

$$= \frac{1}{t}\int\limits_0^t \int\limits_\tau^t \varphi(s)g^*(\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau = \frac{1}{t}\int\limits_0^t g^*(\tau)\left(\int\limits_\tau^t \varphi(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau.$$

Теперь рассмотрим слагаемое I_2 и снова поменяем пределы интегрирования по τ и s по теореме Фубини:

$$I_2 = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \int\limits_s^\infty \varphi(\tau)g^*(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \tau\varphi(\tau)g^*(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{d}s\int\limits_t^\infty \varphi(\tau)g^*(\tau)\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{1}{t}\int\limits_0^t \tau\varphi(\tau)g^*(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{t}\cdot t\int\limits_t^\infty \varphi(\tau)g^*(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \tau\varphi(\tau)g^*(\tau)\mathrm{d}\tau + \int\limits_t^\infty \varphi(\tau)g^*(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Но $\tau\varphi(\tau) \cong \int_0^\tau \varphi(s)\mathrm{d}s$, так что

$$I_2 \cong \frac{1}{t}\int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\tau \varphi(s)\mathrm{d}s\right)g^*(\tau)\mathrm{d}\tau + \int\limits_t^\infty \varphi(\tau)g^*(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Подставив полученные соотношения в разложение (15), получим:

$$\mathfrak{R}^{**}_{\varphi,\infty}[g^*](t) = I_1 + I_2 \cong$$
$$\cong \frac{1}{t}\int\limits_0^t g^*(\tau)\left(\int\limits_\tau^t \varphi(s)\mathrm{d}s + \int\limits_0^\tau \varphi(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau + \int\limits_t^\infty \varphi(\tau)g^*(\tau)\mathrm{d}\tau =$$
$$= \frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi(s)\mathrm{d}s\int\limits_0^t g^*(\tau)\mathrm{d}\tau + \int\limits_t^\infty \varphi(\tau)g^*(\tau)\mathrm{d}\tau \cong$$
$$\cong \varphi(t)\int\limits_0^t g^*(\tau)\mathrm{d}\tau + \int\limits_t^\infty \varphi(\tau)g^*(\tau)\mathrm{d}\tau = \mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*](t).$$

И, следовательно, лемма доказана. □

Теорема. *Пусть* $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *а функции* u *и* U *определены в соответствии с* (9).

Положим, что $\upsilon(t) = \frac{t^{2p'}u(t)\varphi^{p'}(t)}{U^{p'}(t)}$, *а* $V(t) = \int\limits_0^t \upsilon(\tau)\mathrm{d}\tau$.

Кроме того, пусть

$$B = \sup_{r>0}\left(\int\limits_0^r \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int\limits_r^\infty \frac{U^p(t)}{t^{2p}u^{\frac{p}{p'}}(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \tag{16}$$

Тогда оптимальное ПИП для вложения $H^G_{\Lambda^p(u)}(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$ *имеет эквивалентную норму*

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)} \cong \|f\|_{\Gamma^p(\omega)}, \tag{17}$$

где

$$\omega(t) = \frac{t^{p+p'-1}V(t)\int\limits_t^\infty \tau^{-p'}\upsilon(\tau)\mathrm{d}\tau}{\left(V(t) + t^{p'}\int\limits_t^\infty \tau^{-p'}\upsilon(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^{p+1}}. \tag{18}$$

Доказательство. Мы опираемся на общую формулу (8).

По определению ассоциированных пространств для пространств Лоренца (12), можем записать норму оператора $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}$, применяемого к функциям из $\tilde{E}_0(\mathbb{R}_+)$ в ассоциированном к базовому пространству $\Lambda^p(u), 1 < p < \infty$:

$$\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Lambda^p(u)'} = \|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)} =$$

по определению пространства Лоренца (11) имеем

$$= \left(\int\limits_0^\infty {\mathfrak{R}^{**}_{\varphi,\infty}}^{p'}[g^*](t)\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Далее применяя результат леммы 2, получим:

$$\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)} \cong \left(\int\limits_0^\infty \mathfrak{R}_{\varphi,\infty}{}^{p'}[g^*](t)\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^\infty \left[\int\limits_0^\infty f_\varphi(t,\tau)g^*(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^{p'} \cdot \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

По определению (5) функции f_φ запишем норму оператора $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}$ в пространстве $\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)$ в виде суммы:

$$\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)} =$$

$$= \left(\int\limits_0^\infty \left[\varphi(t)\int\limits_0^t g^*(\tau)\mathrm{d}\tau + \int\limits_t^\infty \varphi(\tau)g^*(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^{p'} \cdot \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} \cong$$

$$\cong \left(\int\limits_0^\infty \left[\varphi(t)\int\limits_0^t g^*(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int\limits_0^\infty \left[\int\limits_t^\infty \varphi(\tau)g^*(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Последнее соотношение верно, так как пространства Лоренца являются БФП, а подынтегральные функции — неотрицательные.

Таким образом, мы получили, что

$$\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Lambda^p(u)'} \cong I_3 + I_4, \tag{19}$$

где

$$I_3 = \left(\int\limits_0^\infty \left[\varphi(t)\int\limits_0^t g^*(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$I_4 = \left(\int\limits_0^\infty \left[\int\limits_t^\infty \varphi(\tau)g^*(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Наша цель — в разложении (19), а также оценить слагаемое I_4 слагаемым I_3.

Воспользуемся убыванием функции g^* и получим для I_3 следующую оценку:

$$I_3 \geqslant \left(\int\limits_0^\infty \left[\varphi(t)g^*(t)\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau\right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int\limits_0^\infty [\varphi(t)g^*(t)]^{p'} \frac{t^{2p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} =: S.$$

Оценим I_4 сверху через S.

Мы воспользуемся результатом обобщения неравенства Харди для функции одной переменной, полученным в работе В.Г. Мазьи [7, гл. 1]. Для того, чтобы существовала постоянная c, не зависящая от функций φ и g^* такая, что $I_4 \leqslant c \cdot S$, достаточно, чтобы определённая следующим образом постоянная B была конечна:

$$B = \sup_{r>0} \left(\int_0^r \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_r^\infty \frac{t^{-2p} u^{-\frac{p}{p'}}(t)}{U^{-p}(t)} \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Эта постоянная и есть константа B из условия Теоремы (16).

Таким образом, с одной стороны, $I_3 \geqslant S$, а с другой стороны, $I_4 \leqslant c \cdot S$, и, следовательно, $I_4 \leqslant c \cdot I_3$.

Итак, мы получили, что в сумме (19) разложения оператора типа Харди $\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}$ второе слагаемое поглощается первым и, значит,

$$\|\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)} \cong \left(\int_0^\infty \left[\varphi(t) \int_0^t g^*(\tau) \mathrm{d}\tau \right]^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \left(\int_0^\infty \left[\varphi(t) \frac{1}{t} \int_0^t g^*(\tau) \mathrm{d}\tau \right]^{p'} \frac{t^{2p'} u(t)}{U^{p'}(t)} \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_0^\infty [\varphi(t) g^{**}(t)]^{p'} \frac{t^{2p'} u(t)}{U^{p'}(t)} \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \left(\int_0^\infty g^{**}(t)^{p'} \frac{t^{2p'} u(t) \varphi^{p'}(t)}{U^{p'}(t)} \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p'}} = \|g\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{2p'}u(t)\varphi^{p'}(t)}{U^{p'}(t)}\right)}. \tag{20}$$

Формула (8) показывает, что норма в оптимальном ПИП $\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)$ является ассоциированной к норме (20), т. е.

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)} \cong \|f\|_{[\Gamma^{p'}(\upsilon)]'},$$

где

$$\upsilon(t) = \frac{t^{2p'} u(t) \varphi^{p'}(t)}{U^{p'}(t)}.$$

Учитывая, что в рамках теории ПИП требуется, чтобы весовые пространства Лоренца и Марцинкевича содержали характеристические функции множеств конечной меры, мы можем записать эквивалентную норму ассоциированного пространства в следующем виде (см. [8]):

$$\|f\|_{[\Gamma^{p'}(\upsilon)]'} \cong \left(\int_0^\infty \frac{t^{p+p'-1} f^{**}(t)^p V(t) \int_t^\infty \tau^{-p'} \upsilon(\tau) \mathrm{d}\tau}{\left(V(t) + t^{p'} \int_t^\infty \tau^{-p'} \upsilon(\tau) \mathrm{d}\tau \right)^{p+1}} \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}},$$

где

$$V(t) = \int_0^t \upsilon(\tau) \mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{\tau^{2p'} u(\tau) \varphi^{p'}(\tau)}{U^{p'}(\tau)} \mathrm{d}\tau.$$

Теперь введём обозначение

$$\omega(t) = \frac{t^{p+p'-1} V(t) \int\limits_t^{\infty} \tau^{-p'} \upsilon(\tau) \mathrm{d}\tau}{\left(V(t) + t^{p'} \int\limits_t^{\infty} \tau^{-p'} \upsilon(\tau) \mathrm{d}\tau \right)^{p+1}}.$$

Функция ω является весом (18), который определён в условии теоремы.

И, таким образом, мы получили, что

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)} \cong \|f\|_{\Gamma^p(\omega)},$$

и, тем самым, теорема доказана. □

Замечание. Отметим, что случай, когда в качестве базового пространства выбраны пространства $L_p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$, т.е. при $u(t) = 1$, согласуется с результатом работы М.Л. Гольдмана и О.М. Гусельниковой [5].

Действительно, если $u(t) = 1$, то $U(t) = t$. Тогда $\upsilon(t) = t^{p'} \varphi^{p'}(t)$, а $V(t) = \int\limits_0^t [\tau\varphi(\tau)]^{p'} \mathrm{d}\tau$. При этом константа в условии теоремы будет иметь вид $B = \left(\frac{1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}$.

Литература

1. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978. [S. G. Krejn, Yu. I. Petunin, E. M. Semenov. Interpolation of linear operators. // M.: Science. —1978]
2. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of Operators. — Pure Appl. Mathem., 1988. — Vol. 129, Pp. 1–93.
3. *Гольдман М. Л.* Перестановочно инвариантные оболочки обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса // Доклады РАН. — 2008. — Т. 423, № 1. — С. 151–155. [M. L. Goldman. Rearrangement invariant envelopes of generalized Bessel and Riesz potentials. // Doklady RAN. —2008. — V. 423, No 1, P. 151–155]
4. *Гольдман М. Л.* Оптимальные вложения потенциалов типа Бесселя и Рисса // Доклады РАН. — 2009. — Т. 428, № 3. — С. 305–309. [M. L. Goldman. Optimal embeddings of generalized Bessel and Riesz potentials. // Doklady RAN. —2009. — V. 428, No 3. — P. 305–309]
5. *Гольдман М. Л., Гусельникова О. М.* Оптимальные вложения потенциалов типа Бесселя и типа Рисса. Часть 1. // Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика. — 2011. — № 3. — С. 4–16. [M. L. Goldman, O. M. Guseljnikova. Optimal embeddings of generalized Bessel and Riesz potentials. Part 1. // Bulletin of PFUR series "Mathematics. Information Sciences. Physics". — 2011. No 3, P. 4-16]
6. Characterisation of Embeddings in Lorentz Spaces using a Method of Discretisation and Anti-Discretisation. / A. Gogatischvili, M. Johansson, C. A. Okpoti, L.-E. Persson // Bull. Austral. Math. Soc. — 2007. — Vol. 76. — Pp. 69–92.
7. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. — Изд-во ЛГУ, 1985. — С. 41–50. [V. G. Mazjya Sobolev Spaces //Publisher LSU. —1985]
8. *Gogatischvili A., Pick L.* Discretization and Anti-Discretization of Rearrangement-Invariant Norms // Publ. Mat. — 2003. — No 2. — Pp. 311–358.

UDC 517.51

Optimal Embeddings of Riesz Type Potentials

A. V. Malysheva

Departament of nonlinear analysis and optimization
Peoples' Friendship University of Russia
str. Mikluho-Maklaya, 6, Moscow, Russia, 117198

We study Riesz potentials in n-dimensional Euclidean space. They are constructed on rearrangement-invariant spaces as convolutions with kernels with general form, their description of the class of kernels is based by means of some non-negative, decreasing function Φ. Generalized Riesz potentials include classical Riesz potentials spaces.

Here we consider as a "base" space RIS Lorentz type space Λ^p, $1 < p < \infty$. During consideration of the question of finding conditions for embeddings of Riesz type potentials in RIS we used criteria stated by M.L. Goldman, where the operator of Hardy type and inequalities for operators of this type are playing the key role. For the case of Riesz potentials, $1 < p < \infty$, the condition of optimal embedding in RIS is established. The case of Riesz type potentials based on space L_p, $1 < p < \infty$, considered by the authors M.L. Goldman and O.M. Guselnikova, corresponds with the result of this work.

Key words and phrases: Riesz potentials, Lorentz spaces, decreasing rearrangement, rearrangement-invariant spaces, optimal embeddings.