

УДК 519.624.3

## Исследование решений краевых задач для дифференциального уравнения высокого порядка в поле кулоновского потенциала

**И. В. Амирханов, Д. З. Музафаров, Н. Р. Саркар,  
И. Сархатов, З. А. Шарипов**

*Лаборатория информационных технологий  
Объединённый институт ядерных исследований  
ул. Жолио-Кюри д.6, Дубна, Московская область, 141980, Россия*

Предложен алгоритм нахождения собственных значений и собственных функций одной краевой задачи для уравнения высокого порядка (6-го, 8-го, 10-го и 12-го порядков) с произвольным параметром  $\varepsilon$  при старших производных в поле кулоновского потенциала. При  $\varepsilon \rightarrow 0$  некоторые решения этих уравнений стремятся к решениям уравнения Шрёдингера. Проведены исследования свойств собственных значений и собственных функций при различных значениях  $\varepsilon$ . Алгоритм реализован с использованием системы символьных вычислений MAPLE.

**Ключевые слова:** квазипотенциальные уравнения, краевая задача, символьные вычисления, сингулярно-возмущённые уравнения.

### 1. Введение

Квазипотенциальные уравнения [1] широко применяются для релятивистского описания системы двух частиц, например, кварка и антикварка. В частном случае задача сводится к исследованию краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения конечного порядка [2].

В настоящей работе проводится исследование решений краевой задачи для дифференциального уравнения

$$\left[ \frac{2(-1)^{m-1}\varepsilon^{2(m-1)}}{(2m)!} \frac{d^{2m}}{dr^{2m}} + \dots + \frac{2\varepsilon^4}{6!} \frac{d^6}{dr^6} - \frac{2\varepsilon^2}{4!} \frac{d^4}{dr^4} + \frac{d^2}{dr^2} - \alpha^2 + \frac{2Z}{r} \right] \Psi(r) = 0 \quad (1)$$

при  $m = 3, 4, 5, 6$  со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \Psi(0) = 0, \quad \Psi(r \rightarrow \infty) = 0, \\ \Psi'(0) = 1, \quad \Psi'(r \rightarrow \infty) = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \Psi^{2(m-1)}(r \rightarrow \infty) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\alpha^2 = -E_\varepsilon$  — собственное значение ( $\alpha^2 > 0$ ). При  $\varepsilon \rightarrow 0$  уравнение (1) сингулярно-возмущённое дифференциальное уравнения.

### 2. Алгоритм решения задачи

Решение с  $n$  узлами ищем в виде

$$\Psi(r) = r(1 - c_1 r)(1 - c_2 r)(1 - c_3 r) \dots (1 - c_n r) \exp(-kr), \quad (3)$$

где  $k, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$  — неизвестные постоянные.

---

Статья поступила в редакцию 28 ноября 2009 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ, №№ 10-01-00467-а, 08-01-00800-а.

Подставляя это выражение в уравнение (1) и приравнявая слагаемые при одинаковых степенях  $r$ , получаем уравнение для нахождения параметра  $k$

$$\frac{(-1)^{m-1}\varepsilon^{2(m-1)}}{(2m-1)!}k^{2m-1} + \dots + \frac{\varepsilon^4}{5!}k^5 - \frac{\varepsilon^2}{3!}k^3 + k - \frac{Z}{n+1} = 0 \quad (4)$$

и уравнение для нахождения собственных значений  $\alpha^2$

$$\frac{(-1)^{m-1}\varepsilon^{2(m-1)}}{(2m)!}k^{2m-1} + \dots + \frac{\varepsilon^4}{6!}k^6 - \frac{\varepsilon^2}{4!}k^4 + k^2 - \alpha^2 = 0, \quad (5)$$

а также систему уравнений для нахождения  $c_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Например, для нахождения одноузлового решения (т.е.  $c_1, c_2 = 0, c_3 = 0, \dots, c_n = 0$ ) имеем

$$c_1 = \frac{Z}{2 \left[ (-1)^{m-1} \frac{\varepsilon^{2m-2} k^{2m-2}}{(2m-2)!} + \frac{\varepsilon^4 k^4}{4!} - \frac{\varepsilon^2 k^2}{2!} + 1 \right]}. \quad (6)$$

При  $n = 0$  — это безузловое решение,  $n = 1$  — решение с одним узлом,  $n = 2$  — решение с двумя узлами и т.д.

Таким образом, алгоритм нахождения собственных функций и собственных значений краевой задачи (1)–(2) сводится к следующему:

1. Для заданных значений  $\varepsilon$  и  $n$  ищем действительные и положительные (для удовлетворения граничному условию при  $r \rightarrow \infty$  необходимо, чтобы  $k > 0$ ) решения уравнения (4).
2. Подставляя найденные решения  $k$  в уравнение (5), находим собственные значения  $\alpha^2$ .
3. Решая систему уравнений для  $c_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ , находим ненормированное решение (3), которое удовлетворит граничным условиям  $\Psi'(0) = 1$ .
4. Далее изучим свойства нормированных решений. Для этого умножаем функцию  $\Psi$  на константу  $A$ , которая находится из условия  $A \sqrt{\int_0^\infty \Psi^2 dr} = 1$ . При этом граничное условие  $\Psi'(0) = 1$  переходит в  $\Psi'(0) = A$ .

Действительные и положительные решения уравнения (4) существуют только при определённых ограничениях, накладываемых на параметр задачи  $\varepsilon$ . Так как не для любого  $\varepsilon$  уравнение (4) имеет действительные и положительные решения, сначала найдём ограничение на параметр  $\varepsilon$ . Для этого умножаем уравнение (4) на  $\varepsilon$  и перепишем в виде

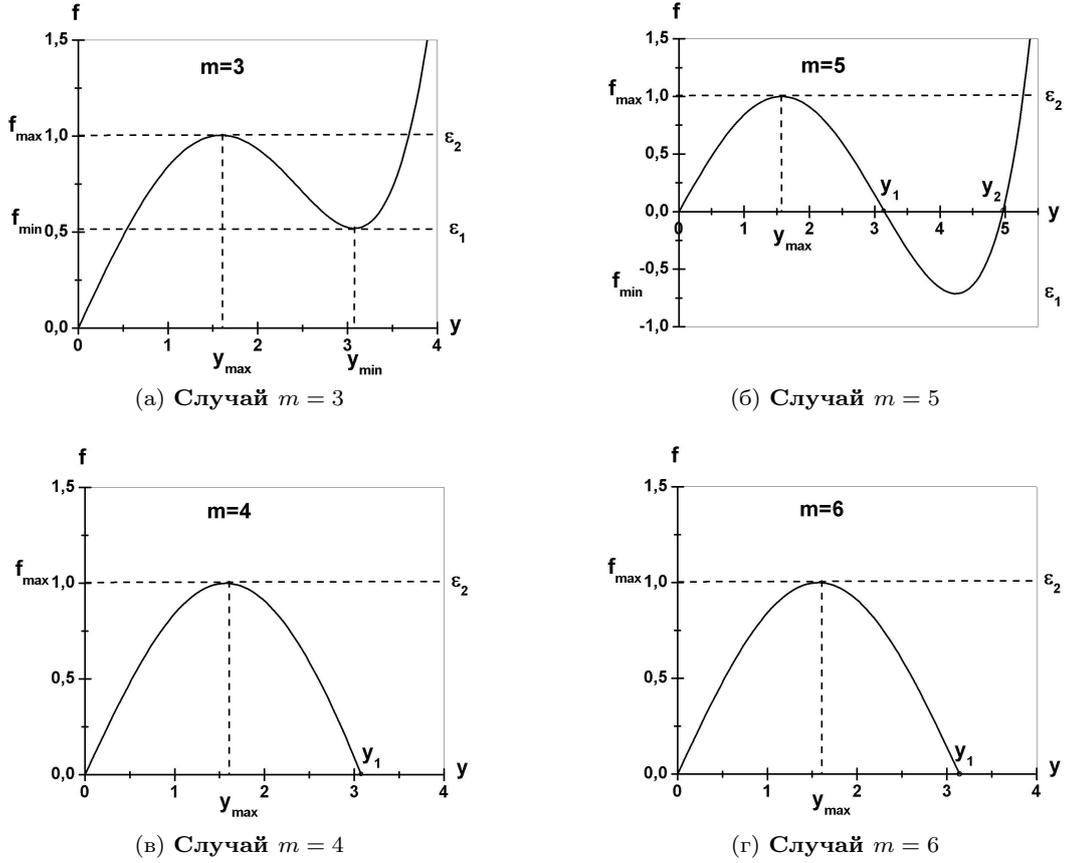
$$f(m, y) = \frac{Z\varepsilon}{n+1}, \quad (7)$$

где  $y = \varepsilon k$  и

$$f(m, y) = \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}y^{2m-1} + \dots + \frac{1}{5!}y^5 - \frac{1}{3!}y^3 + y. \quad (8)$$

Исследуем решение (7) графически. На рис. 1 представлены графики функции  $f(m, y)$  для значений  $m = 3, 4, 5, 6$ . Для заданных значений аргументов  $m, y$  из (9) находим значение  $\varepsilon$ , например,

$$\varepsilon_1 = \frac{n+1}{Z} f_{\min}(m, y_{\min}), \quad \varepsilon_2 = \frac{n+1}{Z} f_{\max}(m, y_{\max}), \quad (9)$$

Рис. 1. Графики функции  $f(m, y)$ 

Из рис. 1 для случая  $m = 3$  следует, что при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$  уравнение (4) имеет одно действительное и положительное решение; при  $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$  три таких решения и, наконец, при  $\varepsilon_2 < \varepsilon < \infty$  опять одно такое решение. Аналогично из рис. 1 можно найти область ограничения на  $\varepsilon$  при  $m = 4, 5, 6$  (подробно см. [3]).

В [3], используя полученные ограничения на параметр для различных значений  $m$  ( $m = 3, 4, 5, 6$ ), подробно рассмотрены свойства решений в частном случае ( $n = 0$  — безузловое решение,  $n = 1$  — решение с одним узлом).

### 3. Заключение

Алгоритм реализован с использованием системы символьных вычислений MAPLE. Установлено, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  некоторые решения стремятся к решениям нерелятивистского уравнения Шрёдингера (рис. 2).

Кроме этого, обнаружены так называемые погранслойные решения (рис. 3); переход одного типа решения (например, решение с одним узлом) в другой (решение без узлов) (рис. 4). Эти решения требуют глубокого анализа и дальнейшего физического осмысления (физической интерпретации), так как релятивистские поправки собственных значений  $\Delta = |\lambda_{n,2m} - \lambda_{n,2}|$  становятся большими.

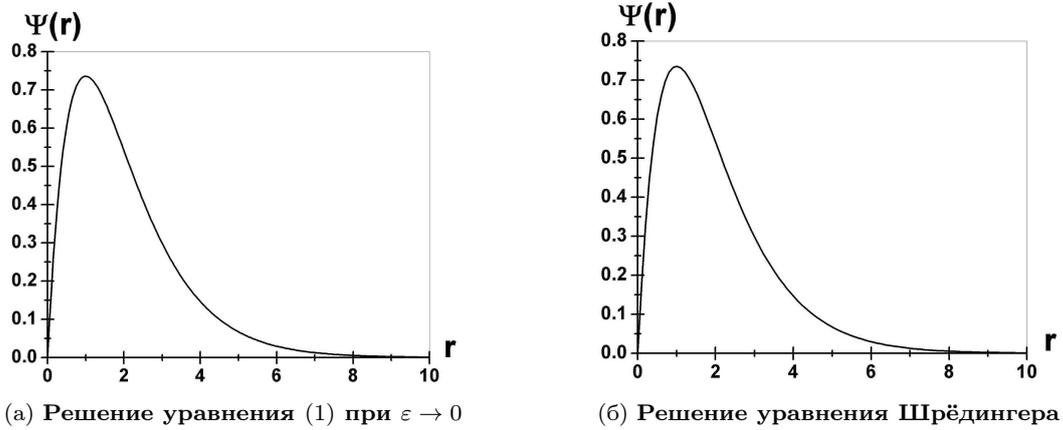


Рис. 2. (а) — решение уравнения (1) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и (б) — решение уравнения Шрёдингера

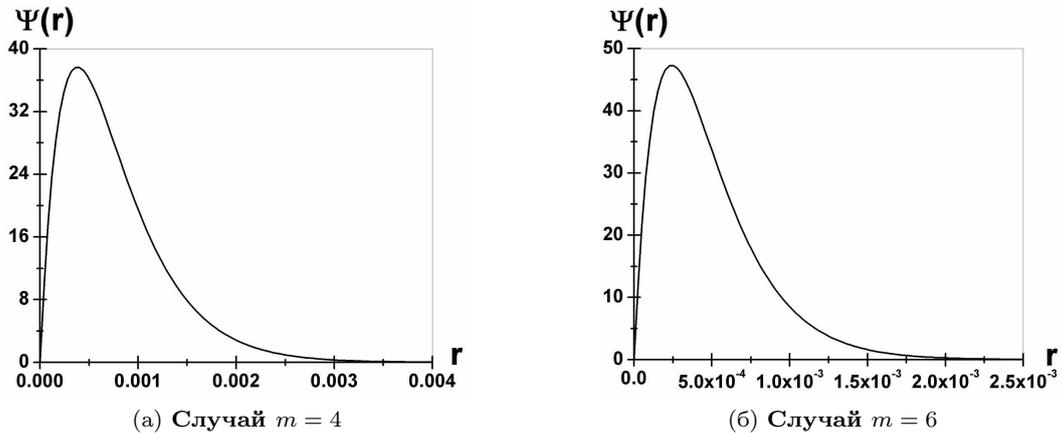


Рис. 3. Погранслойные решения уравнения (1) при  $\varepsilon \rightarrow 0$

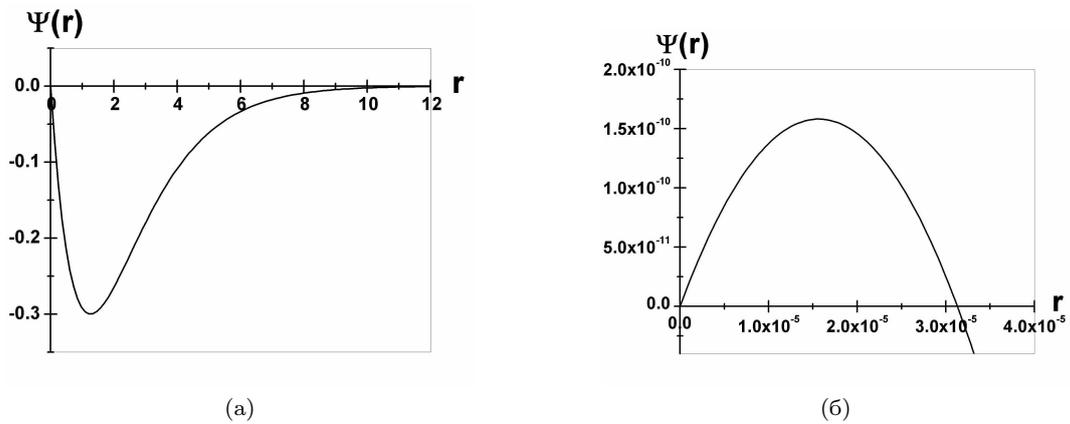


Рис. 4. График решение уравнение (1) с одним узлом (а) и в большом масштабе (б)

## Литература

1. *Кадышевский В. Г., Мир-Касымов Р. М., Скачков Н. Б.* Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел. // ЭЧАЯ. — 1972. — Т. 2, № 3. — С. 637–690.
2. *Амирханов И. В., Жидков Е. П. и др.* Исследование краевых задач для сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения высокого порядка // Математическое моделирование. — 2007. — Т. 19, № 11. — С. 65–79.
3. *Амирханов И. В., Музафаров Д. З. и др.* Исследование решений краевых задач для дифференциального уравнения высокого порядка в поле кулоновского потенциала. — Препринт ОИЯИ Р11-2009-150, Дубна. — 2009.

UDC 519.624.3

### Investigation of Solutions of Boundary Problems for the Differential Equation of High Order in a Coulomb Field

I. V. Amirkhanov, D. Z. Muzafarov, N. R. Sarker, I. Sarhadov,  
Z. A. Sharipov

*Laboratory of Information Technologies  
Joint Institute for Nuclear Research  
Joliot-Curie 6, 141980 Dubna, Moscow region, Russia*

An algorithm to find eigenvalues and eigenfunctions of one boundary problem for the equation of high order (6th, 8th, 10th and 12th orders) with an arbitrary parameter  $\varepsilon$  at the higher derivatives in the Coulomb potential field is proposed. At  $\varepsilon \rightarrow 0$ , some solutions of these equations coincide with the solution of Schroedinger equation. The investigations of the properties of eigenvalues and eigenfunctions with different values of  $\varepsilon$  have been conducted. The algorithm is implemented using the system of symbolic calculations MAPLE.

**Key words and phrases:** quasipotential equation, boundary problem, symbolic computing, singular-perturbated equations.