УДК 530.12:531.51

Спектр масс скалярных частиц во внешнем гравитационном поле заряженной чёрной дыры с одним горизонтом

В. Абдель-Саттар, Ю. А. Попов, Г. Н. Шикин

Кафедра теоретической физики
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Во внешнем гравитационном поле заряженной чёрной дыры с одним горизонтом рассмотрено комплексное скалярное поле. С помощью подбора коэффициентов в исходном уравнении скалярного поля оно приведено к обобщённому уравнению гипергеометрического типа, затем к канонической форме этого уравнения, представляющее собой вырожденное гипергеометрическое уравнение. Решением этого уравнения, удовлетворяющим требованиям ограниченности, являются полиномы Лагерра с соответствующим спектром собственных значений. На основе этого спектра получены выражения для масс заряженной и нейтральной скалярных частиц.

Поскольку заряженный астрофизический объект обычно быстро нейтрализуется окружающей плазмой, то считается, что заряженные чёрные дыры не представляют большого интереса с астрофизической точки зрения [1]. Однако, как отмечается С. Чандрасекаром [2], изучение решения Райсснера–Нордстрема, описывающее заряженные чёрные дыры, позволяет глубже понять свойства пространства и времени в экстремальных условиях.

Ключевые слова: чёрная дыра, горизонт, гравитационное поле, скалярные частицы, спектр масс.

Спецификой искривлённого пространства-времени является возможность введения оператора квадрата массы частицы как линейного эрмитова оператора, собственные значения которого определяют измеряемые массы частиц. Один из возможных видов оператора квадрата массы есть [3]

$$\hat{m}^2 = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big(\sqrt{-g}\,g^{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big).$$

Задача об операторе массы тесно примыкает к задаче о квантовании интервала, т. к. квантование интервала имеет смысл, если оно даёт некоторые дискретные величины размерности длины (а значит и массы), обусловленные взаимодействием с гравитационным полем [4]. Рассмотрим спектр масс скалярных частиц во внешнем поле заряженной чёрной дыры с одним горизонтом. Гравитационное поле такой чёрной дыры описывается метрикой Райсснера–Нордстрема

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\Omega^2, \qquad (1)$$

где квадратный трёхчлен $r^2 - 2GMr + GQ^2$ имеет один действительный корень

$$\bar{r} = GM.$$

Статья поступила в редакцию 24 декабря 2007 г.

При этом $\sqrt{G}M = Q$, M — масса чёрной дыры, Q — её электрический заряд. Уравнение для определения массы скалярной частицы, находящейся во внешнем поле заряженной чёрной дыры, имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\Big(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\varphi_{,\,\nu}\Big) + m^2\varphi - 2ie\varphi_{,\,\mu}\, g^{\mu\nu}A_{\nu} - e^2 A_{\nu}A^{\nu}\varphi = 0\,, \tag{2}$$

где m — масса скалярной частицы, e — её заряд, $g^{\mu\nu}$ и A_{ν} — компоненты метрического тензора и потенциал электромагнитного поля чёрной дыры (принята система единиц, в которой $\hbar = 1$, $c = 1$). Решение уравнения (2) ищем в виде

$$\varphi(r, t, \vartheta, \varphi) = \upsilon(r)Y_l^m(\vartheta, \varphi)e^{+i\omega t}. \tag{3}$$

При подстановке (3) в (2) получаем уравнение для $\upsilon(r)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2\upsilon}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{(r-\bar{r})}\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}r} + \frac{\upsilon}{(r-\bar{r})^4}\Big[\omega^2 r^2(r - eQ/\omega)^2 - (r-\bar{r})^2\big(m^2r^2 + l(l+1)\big)\Big] = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) при $\omega = eQ/\bar{r}$ сводится к обобщённому уравнению гипергеометрического типа:

$$\frac{\mathrm{d}^2\upsilon}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{(r-\bar{r})}\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}r} + \frac{\upsilon}{(r-\bar{r})^2}\Big[r^2(\omega^2 - m^2) - l(l+1)\Big] = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) с помощью подстановки

$$\upsilon(r) = e^{-\Omega r}(r-\bar{r})^{\varepsilon}U(x), \tag{6}$$

где $\Omega^2 = m^2 - \omega^2 > 0$, $\varepsilon = \sqrt{\Omega^2\,\bar{r}^2 + (l+\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{2}$, $x = 2\Omega(r-\bar{r})$, преобразуется в уравнение для $U(x)$

$$xu'' + (1 - x + \alpha)u' + \lambda u = 0, \tag{7}$$

где $\alpha = 2\,(\varepsilon + \frac{1}{2})$, $\lambda = -\Omega\,\bar{r} - \varepsilon$. Уравнение (7) является вырожденным гипергеометрическим уравнением; оно имеет дискретный спектр собственных значений $\lambda = -n$ и набор собственных функций, являющихся полиномами Лагерра:

$$U_n(x) = L_n^{\alpha}(x). \tag{8}$$

Решение (6) можно теперь записать в виде:

$$\upsilon_{nl}(r) = B_{nl}e^{-\Omega r}(r-\bar{r})^{\varepsilon}L_n^{\alpha}\Big[2\Omega(r-\bar{r})\Big], \tag{9}$$

где B_{nl} — нормировочная постоянная. Функции $\upsilon_{nl}(r)$ образуют в области $\bar{r} \leqslant r \leqslant \infty$ ортонормированную систему. С помощью собственных значений $\lambda_n = -n$ получаем для Ω следующее выражение:

$$\begin{gathered}\Omega = \sqrt{m^2 - \omega^2} = \frac{1}{GM}\frac{(n-l)(n+l+1)}{(2n+1)},\\ n = 1, 2, \ldots; \quad l = 0, 1, \ldots, n-1.\end{gathered} \tag{10}$$

Поскольку $\omega = eQ/\bar{r} = e/\sqrt{G}$, то из (10) получаем m в виде

$$m = \sqrt{\left(\frac{e}{\sqrt{G}}\right)^2 + \frac{1}{(GM)^2}\left[\frac{(n-l)(n+l+1)}{(2n+1)}\right]^2}\,. \tag{11}$$

Для нейтральных скалярных частиц $e = 0$, $\omega = 0$, $m = \Omega$, где Ω определяется равенством (10). Если заряд скалярной частицы e равен заряду электрона, то из (11) следует, что спектр масс заряженных частиц сдвинут вверх по сравнению со спектром масс нейтральных частиц на $e/\sqrt{G} \approx 10^{-6}$ г. — величину массы максимона [5]. При $n = 1$ и $l = 0$ получаем минимальное значение для массы нейтральной частицы:

$$m = \frac{2}{3GM}\,. \tag{12}$$

Если масса чёрной дыры $M = 10^{15}$ г. [6], то соответствующая масса нейтральной частицы порядка массы π^0-мезона: $m_{\pi^0} \approx 135$ mev. В этом случае масса заряженной частицы есть

$$m \approx \omega + \frac{1}{2\omega}\Big(m_{\pi^0}\Big)^2 \approx 10^{-6} + 3,6 \cdot 10^{-44} \text{ г.}$$

Рассмотрим формулу для спектра масс (11) в теории сильной гравитации [7, 8]. Положим в (11) $M = m_p$, где $m_p = 1836\,m_e$ — масса протона, а G заменим константой связи $G_f = 6 \cdot 10^{38} G_N$, где G_N — ньютоновская постоянная тяготения. Тогда для нейтральных частиц получаем минимальное значение массы порядка массы π_0-мезона, а для заряженных частиц — величину порядка массы $\pi^{\pm}$-мезона: $m_{\pi^{\pm}} \approx 140\,m_e$. Для нейтральных частиц при $l = 0$ и $n \gg 1$ получаем формулу Намбу. Отметим, что во внешнем гравитационном поле метагалактики в спектре масс скалярных частиц величина минимальной массы частицы определяется величиной космологического члена и составляет примерно 10^{-65} г. [9].

Литература

1. *Shapiro S., Tyukolsky S.* Black holes, white dwarfs and neutron stars. Physics of compact objects. Part 2. — Moscow: Mir Publishers, 1985. — 655 p.
2. *Chandrasekhar S.* Mathematical theory of black holes. Part1. — Moscow: Mir Publishers, 1986. — 276 p.
3. *Huleihil K., Maliw S.* // Found. Phys. — Vol. 10, No 5–6. — 1980. — Pp. 459–467.
4. *Staniukovitch K. P.* Problems of gravitation theory and elementary particles. — Moscow: Atomizdat, 1974. — Pp. 106–120.
5. *Staniukovitch K. P.* Gravitation field and elementary particles. — Moscow: Nauka, 1965. — 311 p.
6. *Frolov V. P.* Physics of black holes: from Einstein to our days // Einstein's collection, 1975–1976. — Moscow: Nauka, 1978. — Pp. 82–153.
7. *Sivaram C., Sinha K. P.* // Physics Reports. — Vol. 51, No 3. — 1979. — Pp. 111–187.
8. *Usha R., Sinha K. P.* // Intern Journ. of Theoret. Phys. — Vol. 20, No 1. — 1981. — Pp. 69–77.
9. *Chernin A. D.* Space Vacuum // UFN. — Vol. 171, No 11. — 2001. — Pp. 1153–1175.

UDC 530.12:531.51

Mass Spectrum of Scalar Particles in External Gravitational Field of Charged Black Hole with One Horizon

W. Abdel-Sattar, Yu. A. Popov, G. N. Shikin

Department of Theoretical Physics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

In an external gravitational field of the charged black hole with one horizon the complex scalar field is considered. By means of appropriate selection of the coefficients in the initial equation of a scalar field it is led to the generalized equation of hyper geometrical type, then to a canonical form of this equation, representing degeneration of the hyper geometrical equation. Solving this equation which satisfies the requirements of limitation, is Laguerre's polynomial with a corresponding spectrum of special values. On the basis of this spectrum expression for masses of the charged and neutral scalar particles is received.

As the charged astrophysical object will usually quickly be neutralized by surrounding plasma it is considered, that the charged black holes do not represent the big interest from the astrophysical point of view [1]. However, as it is marked by Chandrasekhar [2], the studying of Reisner–Nordstrom solution describing charged black holes, allows understanding more deeply properties of space-time in extreme conditions.