УДК 530.12:531.51

К вопросу о физической интерпретации стационарных аксиально-симметричных решений уравнений Эйнштейна

Ц. И. Гуцунаев, А. А. Шайдеман, З. Э. А. Вайл, С. Л. Эльсгольц

Кафедра теоретической физики
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

В статье предпринята попытка физического анализа стационарных аксиально-симметричных решений уравнений Эйнштейна. Анализ базируется на использовании релятивистских неинерциальных систем отсчёта.

Ключевые слова: уравнения Эйнштейна, стационарные решения, неинерциальные системы отсчёта.

1. Основные уравнения

Как известно (см., например, [1]), без ограничения общности метрику стационарного поля можно записать в виде

$$\mathrm{d}s^2 = f^{-1}\left[e^{2\gamma}(\mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}z^2) + \rho^2\mathrm{d}\varphi^2\right] - f(\mathrm{d}t - \omega\mathrm{d}\varphi)^2, \tag{1}$$

где ρ, φ, z, t — канонические координаты Вейля и время, соответственно, а метрические функции $f(\rho, z)$, $\omega(\rho, z)$, $\gamma(\rho, z)$ определяются из уравнений Эйнштейна

$$f\varDelta f = (\vec{\nabla} f)^2 - \frac{f^4}{\rho^2}(\vec{\nabla}\omega)^2, \quad \vec{\nabla}\left(\frac{f^2}{\rho^2}\vec{\nabla}\omega\right) = 0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\gamma}{\partial\rho} &= \frac{\rho f^{-2}}{4}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 - \frac{f^4}{\rho^2}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right]\right\}, \\ \frac{\partial\gamma}{\partial z} &= \frac{\rho f^{-2}}{2}\left\{\frac{\partial f}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{f^4}{\rho^2}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial z}\right\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь операторы $\varDelta$ и $\vec{\nabla}$ задаются выражениями

$$\varDelta \equiv \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \vec{\nabla} \equiv \vec{\rho}_0\frac{\partial}{\partial\rho} + \vec{z}_0\frac{\partial}{\partial z},$$

где $\vec{\rho}_0$ и $\vec{z}_0$ — единичные векторы.

Одно из решений уравнений (2) и (3) имеет вид (см., например, [2])

$$\begin{aligned} f &= f_E = \frac{z - z_1 + \sqrt{\rho^2 + (z - z_1)^2}\cdot\operatorname{th} V_0}{C_1}, \\ \varPhi &= \varPhi_E = \frac{\sqrt{\rho^2 + (z - z_1)^2}}{C_1\cdot\operatorname{ch} V_0} + C_2, \\ \omega &= \omega = \frac{\sqrt{\rho^2 + (z - z_1)^2}}{\operatorname{ch} V_0}\frac{1}{f_E} + C_3, \\ \gamma &= \gamma_E = \frac{1}{2}\ln f_E - \frac{1}{2}\ln\sqrt{\rho^2 + (z - z_1)^2} + \gamma_0, \end{aligned} \tag{4}$$

Статья поступила в редакцию 18 декабря 2007 г.

где z, V_0, C_1, C_2, C_3, γ_0 — произвольные постоянные.

Решению (4) согласно (1) соответствует метрика

$$\mathrm{d}s_E^2 = C_1 e^{2\gamma_0} \cdot \frac{\mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}z^2}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_1)^2}} + \frac{\rho^2 \mathrm{d}\varphi^2}{f_E} - \\ - f_E \left[c\mathrm{d}t - \left(\frac{\sqrt{\rho^2 + (z - z_1)^2}}{\operatorname{ch} V_0 \cdot f_E} + C_3 \right) \mathrm{d}\varphi \right]^2. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что преобразование координат–времени

$$\begin{aligned} & 2C_1 e^{2\gamma_0} \cdot \rho = \rho' \sqrt{(z' - z_1')^2 - c^2 t'^2}, \\ & e^{-\gamma_0} \cdot \varphi = \varphi' \sqrt{1 + \operatorname{th} V_0} - \frac{\sqrt{1 - \operatorname{th} V_0}}{2} \ln \frac{z' - z_1' + ct'}{z' - z_1' - ct'}, \\ & 4C_1 e^{2\gamma_0} \cdot (z - z_1) = (z' - z_1')^2 - c^2 t'^2 - \rho'^2, \\ & \frac{\sqrt{1 + \operatorname{th} V_0}}{2} \cdot \frac{e^{-\gamma_0} ct}{C_1} = \varphi' \cdot \frac{1 + \operatorname{th} V_0}{2} \cdot \frac{1}{C_1} \left(C_3 + \frac{C_1}{1 + \operatorname{th} V_0} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} V_0} \right) + \\ & \quad + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} V_0} \cdot \frac{1}{C_1} \left(C_3 + \frac{C_1}{1 + \operatorname{th} V_0} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} V_0} \right) \right] \ln \frac{z' - z_1' + ct'}{z' - z_1' - ct'}, \end{aligned} \quad (6)$$

где z_1' — новая постоянная, переводит метрику (5) в метрику Минковского

$$\mathrm{d}s_M^2 = \mathrm{d}\rho'^2 + \rho'^2 \mathrm{d}\varphi'^2 + \mathrm{d}z'^2 - c^2 \mathrm{d}t'^2. \quad (7)$$

Таким образом, метрика (5) стационарного евклидона описывает плоское пространство–время.

Формулы обратного преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} & \rho' = e^{\gamma_0} \sqrt{2C_1 \mu_-}, \\ & \varphi' = \frac{e^{-\gamma_0} \cdot \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{th} V_0}} \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} V_0} \cdot \frac{1}{C_1} \left(C_3 + \frac{C_1}{1 + \operatorname{th} V_0} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} V_0} \right) \right] + \\ & \qquad + \frac{\sqrt{1 - \operatorname{th} V_0}}{2} \cdot \frac{e^{-\gamma_0} ct}{C_1}, \\ & z' - z_1' = e^{\gamma_0} \sqrt{2C_1 \mu_+} \operatorname{ch} \left\{ \frac{\sqrt{1 + \operatorname{th} V_0}}{2} \cdot \frac{e^{-\gamma_0}}{C_1} \times \right. \\ & \qquad \left. \times \left[ct - \varphi \left(C_3 + \frac{C_1}{1 + \operatorname{th} V_0} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} V_0} \right) \right] \right\}, \\ & ct' = e^{\gamma_0} \sqrt{2C_1 \mu_+} \operatorname{sh} \left\{ \frac{\sqrt{1 + \operatorname{th} V_0}}{2} \cdot \frac{e^{-\gamma_0}}{C_1} \times \right. \\ & \qquad \left. \times \left[ct - \varphi \left(C_3 + \frac{C_1}{1 + \operatorname{th} V_0} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} V_0} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь обозначено $\mu_\pm = \sqrt{\rho^2 + (z - z_1)^2} \pm (z - z_1)$.

То обстоятельство, что пространство–время, описываемое метрикой (5), является плоским, послужило поводом назвать решение (4) стационарным евклидоном.

Евклидонные решения имеют ясную физическую интерпретацию, так как они связаны с различными релятивистскими системами отсчёта в рамках СТО.

В дальнейшем штрихованную систему отсчёта $(\rho', \varphi', z', t')$ будем называть неподвижной, или инерциальной, системой отсчёта (ИСО), а (ρ, φ, z, t) — неинерциальной (НСО). Переход от одной к другой осуществляется по формулам (6) или (8).

2. Стационарный евклидон

В случае стационарного евклидона, определяемого формулой (4), НСО в соответствии с формулами перехода (6) и (8) совершает сложное релятивистское движение. Рассмотрим его. Для некоторой точки, неподвижной в НСО, имеем

$$\begin{aligned} &\rho = \rho_0, \quad z = z_0, \quad \varphi = \varphi_0' e^{\gamma_0}\sqrt{1+\operatorname{th} V_0}, \\ &\mu_\pm^0 = \sqrt{\rho_0^2 + (z_0 - z_1)^2} \pm (z_0 - z_1). \end{aligned} \tag{9}$$

Введём соответствующие обозначения

$$z_1' = -\frac{c^2}{a_0}, \quad a_0 = \frac{c^2}{e^{\gamma_0}\sqrt{2C_1\mu_+^0}}, \quad \omega_0 = \frac{a_0}{c}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch} V_0}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{th} V_0}.$$

В инерциальной системе отсчёта (ИСО) эта точка совершает движение согласно формулам (6) и (8) по закону

$$\begin{aligned} &\rho' = e^{\gamma_0}\sqrt{2C_1\mu_-^0} = \rho_0' = \text{const}, \\ &\varphi' = \varphi_0' + \frac{\omega_0 c}{2a_0}\ln\frac{\sqrt{1+\left(\frac{a_0 t'}{c}\right)^2} + \frac{a_0 t'}{c}}{\sqrt{1+\left(\frac{a_0 t'}{c}\right)^2} - \frac{a_0 t'}{c}}, \\ &z' = \frac{c^2}{a_0}\left[\sqrt{1+\left(\frac{a_0 t'}{c}\right)^2} - 1\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, точка (9), неподвижная в НСО, в ИСО совершает движение в z'-направлении со скоростью

$$V'(t') = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{a_0 t'}{\sqrt{1+\left(\frac{a_0 t'}{c}\right)^2}}$$

и ускорением

$$a' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}}{\sqrt{1-\left(\frac{V'}{c}\right)^2}}\right) = \frac{a_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\rho_0'\omega_0}{c}\right)^2}} = \text{const}.$$

Одновременно с этим она вращается вокруг оси z' с угловой скоростью

$$\frac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+\left(\frac{a_0 t'}{c}\right)^2}}$$

и угловым ускорением

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{\frac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}t'}}{\sqrt{1-\left(\frac{V'}{c}\right)^2}}\right) = 0.$$

3. Стационарные решения ОТО и НСО

Можно связать метрику (1) определённого стационарного аксиально-симметричного гравитационного поля $f(\rho, z)$, $\omega(\rho, z)$, $\gamma(\rho, z)$ с метрикой стационарного евклидона (5) в некоторой области пространства–времени:

$$\begin{aligned} &\frac{\omega(\rho, z) f(\rho, z)}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_1)^2} - (z - z_1)} = \frac{1}{\operatorname{ch} V_0} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{th} V_0}, \\ &\frac{z - z_1 + \sqrt{\rho^2 + (z - z_1)^2} \cdot \operatorname{th} V_0}{f(\rho, z)} = C_1, \\ &\frac{e^{2\gamma(\rho, z)} \sqrt{\rho^2 + (z - z_1)^2}}{z - z_1 + \sqrt{\rho^2 + (z - z_1)^2} \cdot \operatorname{th} V_0} = e^{2\gamma_0}. \end{aligned} \tag{11}$$

При $V_0 \to \infty$, $\omega \to \infty$ формулы (11) переходят в статический случай.

В частности, этот метод позволяет глубже проникнуть в физическую интерпретацию таких важных решений, как решение Керра и Шварцшильда.

Литература

1. Точные решения уравнений Эйнштейна / Д. Крамер, Х. Штефани, М. Мак-Каллум, Э. Херльт; под ред. Э. Шмутцера. — М.: Энергоиздат, 1980. — 416 с.
2. *Гуцунаев Ц. И., Шайдеман А. А., Шувалов С. А.* Физическая интерпретация евклидонных решений уравнений Эйнштейна // Вестник РУДН: Серия Физика. — № 1(13). — 2005. — С. 80–85.

UDC 530.12:531.51

On Physical Interpretation of Stationary Vacuum Axially Symmetric Solutions to the Einstein Equations

Ts. I. Gutsunaev, A. A. Shaideman, Z. E. A. Wael, S. L. El'sgolts'

Department of Theoretical Physics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

In this article we make an attempt of physical examination of stationary solutions of the Einstein equations. This problem's pursued with the use of relativistic non-inertial frames of reference.