Математическая теория телетрафика

УДК 621.39

Математическая модель центра обслуживания вызовов с учётом Интернет-запросов

Г. П. Башарин, С. Н. Клапоущак, Д. В. Хуртин

В настоящее время во всех странах, включая Россию, происходит бурное развитие рынка центров обслуживания вызовов. Практически все крупные компании выбрали ЦОВ главным средством общения с клиентами. Современные ЦОВ позволяют обрабатывать, наряду с голосовыми вызовами, так называемые интернет-запросы, не требующие немедленной реакции оператора: полученные по электронной почте, факсом, в режиме чата и т.д. Согласно западным исследованиям доля интернет-запросов составляет 30% от общего числа обращений в ЦОВ. Нагрузка, создаваемая такого рода запросами, сильно отличается по своим характеристикам от нагрузки, создаваемой голосовыми вызовами. Тем не менее большинство инженерных методик расчёта качества обслуживания не делают различий между голосовыми и Интернет-запросами, используют СМО Эрланг-С для моделирования работы ЦОВ. В данной работе предложена модель ЦОВ с двумя типами запросов в виде СМО с ограниченной очередью для телефонных запросов и бункером, из которого поступают Интернет-запросы, когда есть свободные операторы. Предложен алгоритм расчёта стационарных вероятностей числа заявок в системе и представлен сравнительный анализ предложенной модели и модели Эрланг-С.

Ключевые слова: центры обслуживания вызовов, Интернет-запросы, система массового обслуживания, бункер, стационарные вероятности, вероятность блокировки.

1. Введение

Центр обслуживания вызовов (ЦОВ) является ключевым элементом взаимодействия компании и её клиента. При этом, кроме частных компаний, ЦОВ используют и государственные организации, экстренные службы и т.д.

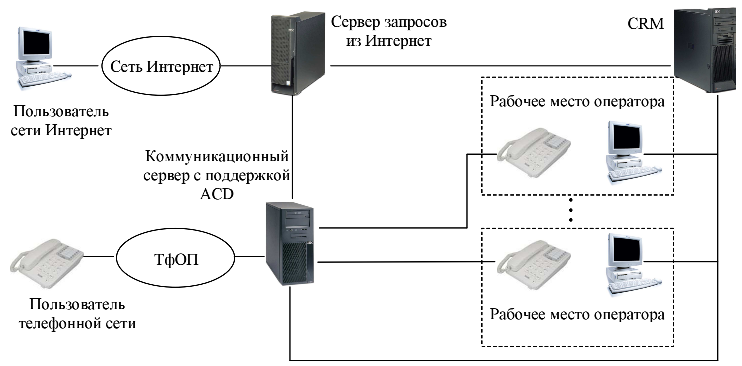

Рис. 1. Упрощённая схема построения МЦОВ

Статья поступила в редакцию 12 декабря 2007 г.

Благодаря появлению новых технологий и бурному развитию сети Интернет, появился ряд новых требований к организации взаимодействия пользователя с ЦОВ (см. [1] и обширный список литературы в ней, а также [2]). При анализе сложных мультисервисных центров используется обозначение МЦОВ, а при анализе распределённых — РЦОВ.

На рис. 1 представлена упрощённая схема построения современного МЦОВ. Система автоматического распределения вызовов (automatic call distribution, ACD) выполняет задачи маршрутизации входящих и исходящих вызовов. Для получения необходимой информации без непосредственного участия оператора служит система интерактивного голосового ответа (interactive voice response, IVR). Система информационной поддержки взаимодействия с пользователями (customer relationship management, CRM) осуществляет маршрутизацию вызовов. Сервер обработки запросов из Интернет обслуживает голосовые вызовы по технологии голос поверх IP (voice over IP, VoIP), сообщения электронной почты и факсимильные, а также поддерживает общение с оператором через текстовый чат [1, гл. 1]. Далее в работе под Интернет-запросами будем понимать только сообщения электронной почты, факсимильные и текстовый чат.

Рассмотрим МЦОВ, обрабатывающий телефонные вызовы и Интернет-запросы. При введении новых услуг можно значительно повысить производительность ЦОВ путём равномерного распределения нагрузки в течение всего рабочего времени. В периоды низкой занятости от основной работы — обслуживания телефонных звонков, операторы ЦОВ могут обрабатывать низкоприоритетные Интернет-запросы. При этом обработка телефонных вызовов имеет наибольший приоритет по сравнению с запросами из Интернета. Ответы на электронную почту, факс или текстовый чат могут быть отложены на несколько минут или часов, в то время как телефонный вызов должен быть обработан в течение нескольких секунд или минут, иначе будет расти количество отказов от обслуживания, что приведёт к потере пользователей и дополнительной прибыли.

В настоящей статье рассматривается модель МЦОВ с двумя типами вызовов — высокоприоритетными и низкоприоритетными. Кроме того, представлен сравнительный анализ данной модели и модели ЦОВ, обслуживающего только голосовые вызовы с целью анализа влияния низкоприоритетных вызовов на вероятность блокировки высокоприоритетных.

2. Математическая модель

Рассмотрим СМО (рис. 2), состоящую из обслуживающих приборов и накопителя ёмкостью $r < \infty$, на которую поступает пуассоновский поток первого рода высокоприоритетных вызовов (1-вызовов) с интенсивностью λ_1, а из бункера с неограниченным запасом вызовов поступают низкоприоритетные вызовы (2-вызовы). Поступление 2-вызовов на приборы происходит только в том случае, если в момент окончания обслуживания вызова любого вида в накопителе нет 1-вызовов [3]. Модели ЦОВ с бункером в известной нам литературе до сих пор не рассматривались.

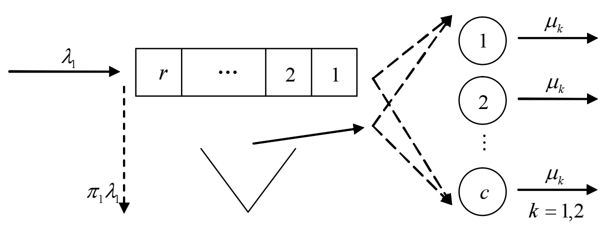

Рис. 2. Схема функционирования модели ЦОВ с двумя типами вызовов

Таким образом, 1-вызовы обладают относительным приоритетом по отношению к 2-вызовам. В накопителе могут находиться лишь 1-вызовы, число 2-вызовов в системе не превышает c, и находиться они могут только на приборах. Будем считать, что обслуживаемый 1-вызов находится на приборе и места в накопителе не занимает, так что полная ёмкость системы $R := r + c$, если накопитель полон, то вновь поступивший 1-вызов теряется с вероятностью π_1. Длительность занятия прибора i-вызовом имеет экспоненциальное распределение с интенсивностью $\mu_k, k = 1, 2$. Рассматриваемую СМО будем обозначать $\begin{array}{c|c|c|l} M, \text{Б} & M, M & \multirow{2}{*}{c} & \multirow{2}{*}{r < \infty.} \\ \lambda_1 & \mu_1, \mu_2 & & \end{array}$

Введём два случайных процесса $X_1(t)$ — суммарное количество 1-вызовов на приборах и в накопителе, $X_2(t)$ — количество 2-вызовов на приборах в момент времени t, $X_1(t) = \overline{0, R}$, $X_2(t) = \overline{0, c}$, $X_\bullet(t) = \overline{c, R}$. Тогда функционирование системы может быть описано ступенчатым Марковским процессом $\overrightarrow{X}(t) = (X_1(t), X_2(t))$ со следующим пространством состояний (см. [4, прил. A]):

$$\Omega = \coprod_{\alpha=c}^{R} \Omega_\alpha, \quad \Omega_\alpha = \{(i, j) : i + j = \alpha\}, \quad \alpha = \overline{c, R}. \tag{1}$$

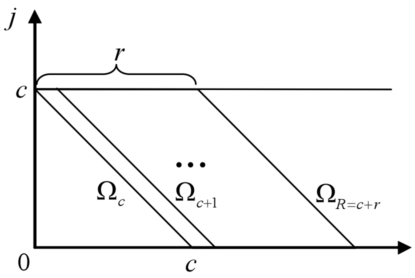

Рис. 3. Пространство состояний Ω

Мощность подпространств Ω_α и пространства Ω в соответствие с рис. 3 составляет:

$$|\Omega_\alpha| = c + 1, \quad \alpha = \overline{c, R}; \quad |\Omega| = (c + 1)(r + 1). \tag{2}$$

Легко убедиться, что матрица интенсивностей переходов $\mathbf{A} := (a_{\alpha-j,j})_{j=\overline{0,c};\, \alpha=\overline{c,R}}$ для рассматриваемой СМО имеет вид (3), т.е. является блочной трёхдиагональной или квазиякобиевой размерностью $(r + 1) \times (r + 1)$.

$$\begin{array}{c|cccccc|c} \mathbf{A} & \Omega_c & \Omega_{c+1} & \cdots & \Omega_{R-1} & \Omega_R & \Sigma \\ \hline \Omega_c & \mathbf{A}_c & \mathbf{\Lambda} & & & & \vec{0} \\ \Omega_{c+1} & \mathbf{B} & \mathbf{A}_1 & \ddots & & & \vec{0} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \Omega_{R-1} & & & \ddots & \mathbf{A}_1 & \mathbf{\Lambda} & \vec{0} \\ \Omega_R & & & & \mathbf{B} & \mathbf{A}_R & \vec{0} \end{array} \tag{3}$$

При этом все блоки являются квадратными матрицами $(c+1) \times (c+1)$, причём матрицы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_R$ и $\mathbf{\Lambda} = \lambda_1 \mathrm{I}_{c+1}$ диагональные, а матрицы $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{B}$ — двухдиагональные.

Пример.

На рис. 4 представлен граф интенсивностей переходов для рассматриваемой СМО с параметрами $c = 2$ и $r = 3$.

Матрица $\mathbf{A}$ (см. (3)) для рассматриваемого примера имеет вид (4).

	Ω_2			Ω_3			Ω_4			Ω_5			
A	$(0,2)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(3,0)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(4,0)$	$(3,2)$	$(4,1)$	$(5,0)$	$\sum$
$(0,2)$	$-\lambda_1$			λ_1									0
$(1,1)$	μ_1	$-(\lambda_1+\mu_1)$			λ_1								0
$(2,0)$		$2\mu_1$	$-(\lambda_1+2\mu_1)$			λ_1							0
$(1,2)$		$2\mu_2$		$-(\lambda_1+2\mu_2)$			λ_1						0
$(2,1)$		μ_1	μ_2		$-(\lambda_1+\mu_\bullet)$			λ_1					0
$(3,0)$			$2\mu_1$			$-(\lambda_1+2\mu_1)$			λ_1				0
$(2,2)$					$2\mu_2$		$-(\lambda_1+2\mu_2)$			λ_1			0
$(3,1)$					μ_1	μ_2		$-(\lambda_1+\mu_\bullet)$			λ_1		0
$(4,0)$						$2\mu_1$			$-(\lambda_1+2\mu_1)$			λ_1	0
$(3,2)$								$2\mu_2$		$-2\mu_2$			0
$(4,1)$								μ_1	μ_2		$-\mu_\bullet$		0
$(5,0)$									$2\mu_1$			$-2\mu_1$	0

(4)

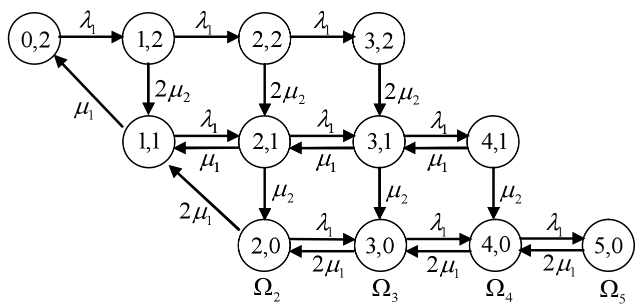

Рис. 4. Граф интенсивностей переходов

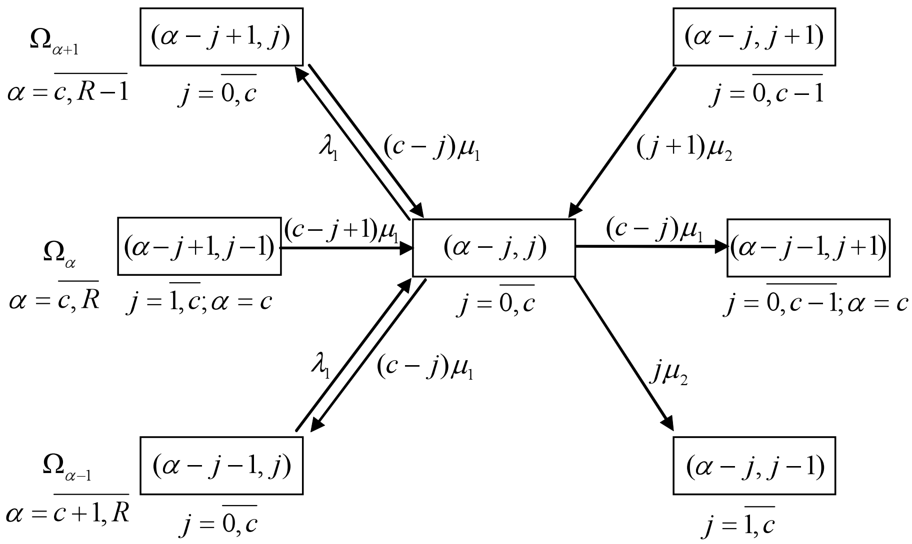

Рис. 5. Диаграмма интенсивностей переходов между $(\alpha-j,j), j=\overline{0,c}$; $\alpha=\overline{c,R}$ и «соседними» состояниями из Ω

Система уравнений глобального баланса (СУГБ) для равновесного (стационарного) распределения $P\{\overrightarrow{X}=(i,j)\}=:p(i,j)$ рассматриваемой системы представлена ниже:

$$
\begin{cases}
p(\alpha-j,j)[\lambda_1+(c-j)\mu_1]=p(\alpha-j+1,j-1)u(j)(\alpha-j+1)\mu_1+\\
\qquad +p(\alpha-j+1,j)(c-j)\mu_1+p(\alpha-j,j+1)u(c-j)(j+1)\mu_2,\\
\qquad\qquad \alpha=c;\quad j=\overline{0,c},\\
p(\alpha-j,j)[\lambda_1+(c-j)\mu_1+j\mu_2]=p(\alpha-j-1,j)\lambda_1+\\
\qquad +p(\alpha-j,j+1)u(c-j)(j+1)\mu_2+p(\alpha-j+1,j)(c-j)\mu_1,\\
\qquad\qquad \alpha=\overline{c+1,R-1};\quad j=\overline{0,c},\\
p(\alpha-j,j)[(c-j)\mu_1+j\mu_2]=p(\alpha-j-1,j)\lambda_1,\quad \alpha=R;j=\overline{0,c}.
\end{cases}
\tag{5}
$$

Условие нормировки:

$$\sum_{\alpha=c}^{R}\sum_{j=0}^{c} p(\alpha-j,j)=1. \tag{6}$$

Легко убедиться, что СУГБ (5) при $\mu_1 \neq \mu_2$ не имеет мультипликативного решения (см. (4)). Однако при $\mu_1=\mu_2$ равновесное распределение числа $X_\bullet$ заявок в системе имеет мультипликативный вид.

Теорема 1. *Равновесное распределение числа заявок в системе* $M,\text{Б}|\ M,M|\ c|\ r$ *при* $r<\infty$ *и* $\mu_1=\mu_2$ *определяется следующей формулой*

$$p(\alpha):=P(\Omega_\alpha)=\frac{\rho^{\alpha-c}}{\sum\limits_{i=c}^{R}\rho^{i-c}},\quad \alpha=\overline{c,R},\ \textit{где}\ \rho_1=\frac{\lambda_1}{\mu_1},\quad \rho=\frac{\rho_1}{c}. \tag{7}$$

Доказательство. Сначала суммируем все уравнения (5) из Ω_R, тогда

$$p(R)=\rho p(R-1).$$

Затем суммируем все уравнения из $\Omega_R \coprod \Omega_{R-1}$, получим

$$p(R-1)=\rho p(R-2).$$

Продолжая суммировать все уравнения (5) из $\coprod\limits_{m=1}^{r-1}\Omega_{R-m}$, получим

$$p(\alpha)=\rho p(\alpha-1),\quad \alpha=\overline{c+1,R}. \tag{8}$$

Из соотношения (10), выражая рекуррентно вероятности $p(\alpha), \alpha=\overline{c+1,R}$ через $p(c)$ и используя условие нормировки $\sum\limits_{\alpha=c}^{R}p(\alpha)=1$, получаем формулу (7).

$\square$

3. Параметры производительности системы

Производительность ЦОВ определяется следующими параметрами:

— вероятность блокировки 1-вызовов

$$\pi_1=\sum_{j=0}^{c}p(R-j,j), \tag{9}$$

— интенсивность обслуженного потока 1-вызовов

$$(c-EX_2)\mu_1=\mu_1\sum_{\alpha=c}^{R}\sum_{j=0}^{c-1}(c-j)p(\alpha-j,j), \tag{10}$$

— среднее число 1-вызовов в очереди

$$EX_1+EX_2-c=\sum_{\alpha=c+1}^{R}\sum_{j=0}^{c}(\alpha-c)p(\alpha-j,j). \tag{11}$$

В случае ЦОВ с обслуживанием только 1-вызовов, т.е. $\mu_2^{-1}=0$, вероятность блокировок можно получить с помощью С-формулы Эрланга [4, §1.3] для СМО $\left.\begin{matrix}M\\ \lambda_1\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}M\\ \mu_1\end{matrix}\right|c\Big|\,r$.

Заметим, что СМО $\left.\begin{matrix}M,\text{Б}\\ \lambda_1\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}M,M\\ \mu_1,\mu_2\end{matrix}\right|c\Big|\,r_1<\infty$ является предельным случаем $\left.\begin{matrix}\overrightarrow{M}\\ \lambda_1,\lambda_2\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\overrightarrow{M}\\ \mu_1,\mu_2\end{matrix}\right|c\Big|\,r_1,r_2=\infty$ при $\mu_2^{-1}=0$.

4. Численный пример

На рис. 6 представлены графики зависимости π_1 от ρ_1 для различных μ_2.

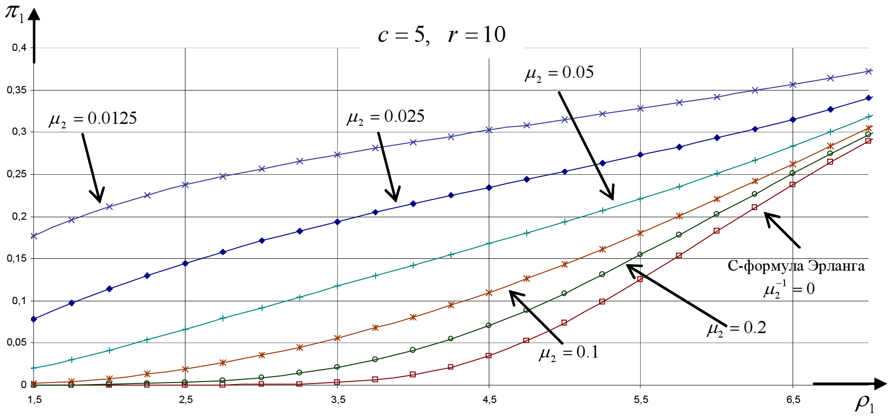

Рис. 6. Зависимость π_1 от ρ_1 для различных μ_2

Как видно из рис. 6, при наиболее часто встречающихся на практике значениях 1-нагрузки 2-вызовы оказывают существенное влияние на вероятность π_1 блокировки 1-вызовов.

5. Заключение

В статье изучено функционирование мультисервисного ЦОВ, который обеспечивает обработку и распределение Интернет-запросов, сохраняя возможность распределения телефонных вызовов. Обработка телефонных вызовов имеет наибольший приоритет по сравнению с запросами из Интернета. Для анализа параметров производительности разработана соответствующая математическая модель в виде СМО. Было найдено аналитическое решение СУГБ для случая $\mu_1 = \mu_2$. Численный анализ показал, что Интернет-вызовы оказывают существенное влияние на функционирование ЦОВ.

Литература

1. *Росляков А. В., Ваняшин С. В.* Математические модели центров обслуживания вызовов. — М.: ИРИАС, 2006. — 336 с.
2. *Koole G.* Call Center Mathematics, Version of January 26 of 2007. — `http://www.math.vu.nl/~koole/ccmath/book.pdf`.
3. *Башарин Г. П., Самуйлов К. Е.* Об однофазной системе массового обслуживания с двумя типами заявок и относительным приоритетом // Изв. АН СССР. Техн. киберн. — № 3. — 1983. — С. 48–55.
4. *Башарин Г. П.* Лекции по математической теории телетрафика. — М.: Изд-во РУДН, 2004.

UDC 621.39

A Mathematical Model of Call Center with Interactive Requests

G. P. Basharin, S. N. Klapouschak, D. V. Khurtin

Telecommunication Systems Department
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

Now in Russia call centers market is growing roughly. All large companies have chosen call centers as main way to contact their clients. Modern call centers allow to process both voice requests and so-called internet-requests that not demand immediate reaction from an operator: received by e-mail, fax, chat, etc. According market researches a share of internet-requests makes 30% from the general number of client inquiries. The traffic this type of requests produce have quite different characteristics from voice calls traffic. Nevertheless majority of call centers performance evaluation techniques make no distinctions between voice and internet-requests and use common Erlang-C model for calculations.

This work presents a model of call center with both types of requests as a priority queuing system with bunker and two types of incoming traffic. An algorithm for calculation of stationary probabilities for number of requests in service is proposed and comparative analysis with Erlang-C model is given.